Aiordăchioaie Dorel
Culea – Florescu Anisia

PRELUCRAREA STATISTICĂ ȘI INFORMAȚIONALĂ A SEMNALELOR

Aiordăchioaie Dorel
Culea – Florescu Anisia

PRELUCRAREA STATISTICĂ ȘI INFORMAȚIONALĂ A SEMNALELOR

Galați University Press
2016

Copyright © 2016 Galati University Press
Toate drepturile rezervate. Nicio parte a acestei publicații nu poate fi reprodusă în nicio formă fără acordul scris al editurii.

Colecția Științe Inginerești

Galati University Press – Cod CNCS 281
Editura Universității „Dunărea de Jos" din Galați
Str. Domnească, nr. 47, 800008 – Galați, ROMANIA
Tel. 0336 13 01 39; Fax: 00 40 236 46 13 53
gup@ugal.ro

Referenți ştiințifici:
Conf. dr. ing. Nicolae MĂRĂȘESCU
Conf. dr. ing. Rustem POPA

Lector
Conf. univ. dr. Gina NECULA

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
AIORDĂCHIOAIE, DOREL
Prelucrarea statistică şi informaţională a semnalelor /
Aiordăchioaie Dorel, Culea-Florescu Anisia. - Galaţi : Galaţi University Press, 2016
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-696-070-0

I. Culea-Florescu, Anisia

519.22:621.391.8

ISBN 978-606-696-070-0
Tipărit la Editura Universității „Dunărea de Jos" din Galați.

Prefață

Lucrarea se adresează studenților din domeniul Inginerie Electronică și Telecomunicații, și poate fi folosită, în egală măsură, de studenții din domeniile Ingineria Sistemelor, Inginerie Electrică, precum și Calculatoare și Tehnologia Informației, de la toate nivelurile de studii: licență, master și doctorat.

Obiectivul lucrării este prezentarea aspectelor de bază de modelare și prelucrare statistică și informațională a semnalelor mai des întâlnite în sistemele de comunicații electronice, cu obiective de analiză, detecție, estimare și decizie în cadrul sistemelor de transmisiune. Din această perspectivă, lucrarea poate fi numită echivalent „Detecție, estimare și decizie în prelucrarea semnalelor și informației”.

Prin continut și mod de abordare, lucrarea este o completare necesară a disciplinei „Semnale și sisteme” din curricula ingineriei electrice și electronice.

Capitolul 1 prezintă aspectele de bază privind analiza și sinteza semnalelor aleatoare, ultima funcție necesară în aplicațiile de laborator pentru simulare numerică în diverse condiții de mediu.

Capitolul 2 abordează modelul de proces aleator pentru studiul perturbațiilor de pe canalele reale de transmisiune a informației.

Capitolul 3 prezintă aspectele de bază privind descrierea canalor de transmisiune, atât din punct de vedere statistic cât și din punct de vedere informațional.

Capitolul 4 este alocat problemei detecției și deciziei asupra semnalului emis, presupus cunoscut. Este abordată, mai întâi, problemetica sistemelor binare și, apoi, problematica deciziei în cazul ipotezei multiple.

Capitolul 5 se adresează problemei estimării, atât în general, ca și concepte, cât și în particular, prin folosirea unor relații simple și recursive pentru estimarea mărimilor de interes.

Pentru creșterea caracterului pragmatic al lucrării, s-au prezentat atât codurile sursă ale unor programe folosite în simulare cât și exemple simple de calcul matematic. Modul de abordare a problematicii este unul pragmatic, ingieres, cu multe exemple și exerciții simple pentru înțelegerea și aplicarea principiilor prezentate.

Galați, iulie 2016

Dorel Aiordăchioaie

Cuprins

Cap. 1 - Introducere. Variabile aleatoare……. 9

1.1. *Semnale aleatoare. Semnificație fizică. Perturbații*…… 9
1.2. *Descrierea semnalelor aleatoare continue*…… 16
1.3. *Valori medii statistice ale variabilelor aleatoare*…… 20
1.4. *Funcții de distribuție des întâlnite în practică*…… 21
1.5. *Valoarea de vârf a unui semnal aleator*…… 26
1.6. *Distribuția Gaussiană bidimensională*…… 32
1.7. *Funcții de variabile aleatoare*…… 35
1.8. *Generarea numerică a semnalelor aleatoare*…… 39

Cap. 2 – Procese aleatoare…… 46

2.1. *Procese aleatoare. Introducere*…… 46
2.2. *Descrierea procelor aleatoare continue*…… 49
2.2.1 *Valori medii statistice*…… 52
2.2.2. *Valori medii temporale*…… 57
2.3. *Staționaritatea proceselor aleatoare*…… 60
2.4. *Corelația proceselor aleatoare în sens larg*…… 66
2.5. *Estimarea timpului de întârziere a unui canal* …… 71
2.6. *Estimarea funcției pondere a unui canal*…… 73
2.7. *Densitatea spectrală de putere a proceselor aleatoare* …… 79
2.8. *Proprietățile funcției densitate spectrală de putere*…… 82
2.9. *Ergodicitatea proceselor aleatoare*…… 83
2.10. *Clasificarea proceselor aleatoare după banda de frecvență ocupată*…… 85
2.11. *Calculul puterii într-o bandă de frecvență*…… 86
2.12. *Calculul benzii efective și a benzii medii pătratice*…… 86
2.13. *Descrierea perturbațiilor de bandă largă*…… 88
2.14. *Descrierea perturbațiilor de bandă îngustă*…… 90
2.15. *Procese aleatoare discrete în timp*…… 94
2.15.1. *Calculul mediilor temporale a unei secvențe aleatoare*…… 96
2.15.2. *Funcția de autocorelație a secvențelor binare aleatoare*…… 97
2.15.3. *Densitatea spectrală de putere a secvențelor binare aleatoare*…… 99
2.15.4. *Secvențe binare pseudo-aleatoare periodice*…… 101
2.15.5. *Expresii practice pentru estimarea momentelor secvențelor aleatoare*…… 103

Cap. 3 – Descrierea canalelor continue de transmisiune……... 108

3.1. *Descrierea statistică a canalelor continue*…… 108
3.1.1. *Descrierea timp-frecvență*…… 108
3.1.2. *Calculul mediei ieșirii canalului*…… 109
3.1.3. *Calculul autocorelației ieșirii canalului*…… 110
3.1.4. *Calculul funcției de corelație dintre ieșirea și intrarea canalului*…… 112
3.1.5. *Funcția densitate spectrală de putere a ieșirii canalului*…… 113
3.1.6. *Puterea medie a ieșirii canalului*…… 114
3.1.7. *Banda echivalentă de zgomot*…… 114
3.1.8. *Metodă de calcul a integralelor functiilor raționale* …… 115
3.2. *Descrierea informațională a surselor continue*…… 124

3.2.1. *Informaţia semnalelor continue discretizate* 125
3.2.2. *Entropia surselor continue*..... 126
3.2.3. *Entropia surselor continue limitate în amplitudine*..... 128
3.2.4. *Entropia surselor continue de putere limitată*..... 128
3.3. *Descrierea informaţională a canalelor continue*..... 129
3.3.1. *Entropiile asociate canalului* 129
3.3.2 *Capacitatea canalului continuu*..... 131
3.3.3. *Valoarea maximă a capacităţii canalului continuu* 136

Cap. 4 – Detecţia semnalelor cunoscute……... **141**
4.1. *Introducere. Definirea problemei* 141
4.2. *Un exemplu de detecţie*..... 142
4.3. *Ipoteze şi decizii*..... 145
4.4. *Interpretarea geometrică a problemei detecţiei binare*..... 147
4.5. *Calculul probabilităţilor detecţiei*..... 149
4.6. *Criteriul plauzibilităţii maxime*..... 151
4.7. *Criteriul riscului minim (Bayes)*..... 153
4.8. *Detecţia unui semnal prin observarea discretă şi zgomot alb*..... 158
4.9. *Caracteristica de operare a detectorului*..... 162
4.10. *Detecţia multiplă* 170
4.11. *Detecţia secvenţială* 186
4.11.1. *Detecţia secvenţială în ipoteza binară*..... 186
4.11.2 *Detecţia secvenţială prin observare discretă şi zgomot alb gaussian.* 189
4.12. *Detecţia cu receptor filtru adaptat la semnalul emis* 200

Cap. 5 – Estimarea parametrilor …… **209**
5.1. *Cadrul general al problemei estimării*..... 209
5.2. *Estimarea unui parametru determinist după metoda plauzibilităţii maxime* . 212
5.3. *Estimarea unui parametru aleator prin metoda minimizării funcţiei de cost*. 215
5.4. *Criterii de evaluare a calităţii estimatului*..... 218
5.5. *Calculul estimatului unui parametru aleator invariant în timp*..... 222
5.6. *Estimarea parametrilor prin relaţii recursive*..... 225

Bibliografie …… **232**

Anexa 1 - Codul Matlab pentru generarea secvenţelor aleatoare … **234**

Anexa 2 - Proprietăţile secvenţelor pseudoaleatoare periodice …… **236**

Anexa 3– Codul Matlab pentru estimarea dsp..... **237**

Capitolul 1 – Introducere. Variabile aleatorii

Cuprins

Semnale aleatorii. Semnificație fizică. Perturbații
Descrierea semnalelor aleatorii continue
Valori medii statistice ale variabilelor aleatorii
Funcții de distribuție des întâlnite în practică
Valoarea de vârf a unui semnal aleatoriu
Distribuția gaussiană bidimensională
Funcții de variabile aleatorii (transformări de variabile aleatorii)
Generarea numerică a semnalelor aleatorii
Concluzii

1.1. Semnale aleatorii. Semnificație fizică. Perturbații

În sistemele electrice se utilizează forme de undă de curent și tensiune pentru achiziția, transmiterea și procesarea informației. Semnalele, indiferent dacă sunt de tensiune sau de curent, sunt funcții de timp și fac parte din una din clasele de bază: deterministe sau aleatorii.

Semnalele deterministe pot fi descrise prin funcții matematice cu un număr finit de parametri, cu variabila *t* - cu semnificație de timp - ca variabilă independentă.

În contrast cu semnalele deterministe, un semnal aleatoriu are întotdeauna câteva elemente de incertitudine, astfel încât nu este posibilă determinarea exactă a valorii la un moment dat de timp. Se mai spune că funcția matematică ce descrie un semnal aleatoriu are un număr infinit de parametri.

Exemple de semnale aleatorii sunt: semnalul audio transmis pe un canal telefonic sau sarcina instantanee a unui sistem energetic. În aceste exemple nu vom putea preciza cu exactitate, în avans, valoarea semnalului aleatoriu. Vom putea însă să descriem semnalul aleatoriu în funcţie de:

- proprietăți medii, cum ar fi puterea medie a semnalului;
- distribuția valorilor față de medie (dispersia);
- probabilitatea ca semnalul aleatoriu să depășească o anumită valoare;
- probabilitatea ca semnalul aleatoriu să ia valori într-un anumit interval.

Exemplul 1 (sistem de comunicație binar): În fig. 1 s-a prezentat un exemplu de forme de undă tipice dintr-un sistem de comunicație binar, între un terminal și un calculator central, ca destinatar. Terminalul emite simboluri binare, *a(k)*, emițătorul transformă simbolurile binare în semnale electrice (impulsuri) cu amplitudine ± 1 și durata *T*, capabile să se propage pe canalul de transmisiune. Forma de undă recepționată este distorsionată și afectată de zgomotul de pe canal. Din semnalul recepționat, receptorul trebuie să extragă simbolurile transmise. Este ușor de observat că, dacă zgomotul de pe canal depășește o anumită valoare, secvența binară extrasă din semnalul recepționat poate să conțină erori. În legătură cu acest exemplu tipic, trebuie rezolvate o serie de probleme:

1. Cum afectează zgomotul performanțele receptorului de a reface informația binară din semnalul recepționat ?
2. Care este algoritmul de procesare cel mai indicat al semnalului recepționat, pentru obținerea unor performanțe de transmisie impuse (de exemplu, erori minime de transmisie) ?

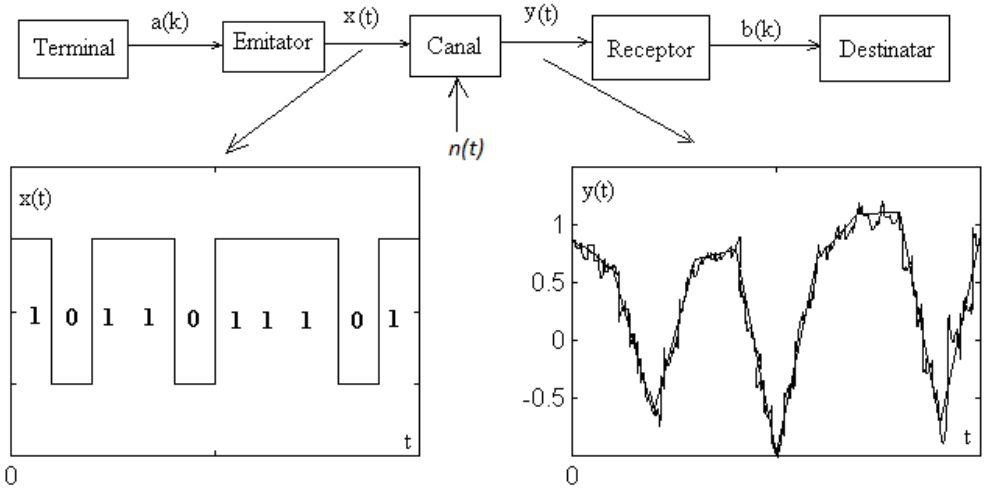


Fig. 1: Forme de undă în sistemele binare de transmisiune

Ecuațiile ce descriu funcționarea sistemului sunt:

$$a(k) \in X = \{0,1\} \tag{1}$$

$$x(t) = \begin{cases} s_1(t) = 1V \quad daca \quad a(k) = 1 \\ s_0(t) = -1V \quad daca \quad a(k) = 0 \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_0 + T] \tag{2}$$

$$y(t) = x(t) + n(t) \tag{3}$$

$$b(k) \in X = \{0,1\} \tag{4}$$

Problema: estimează (determină) simbolurile recepționate din semnalul recepționat

$$b(k) = a(k), \quad \forall n(t), \forall k = 0,1,2,... \tag{5}$$

Exemplul 2 (radiodifuziune): În fig. 2 se prezintă un sistem de transmisiune compus dintr-un emițător și mai multe receptoare, distribuite aleatoriu în spațiul de recepție. Exemplul este tipic pentru sistemele de radiodifuziune.

Amplitudinea și faza formelor de undă recepționate de fiecare receptor vor depinde de distanța dintre emițător și receptor. Întrucât numărul de receptoare este mare și este distribuit aleatoriu în spațiu, distanța dintre emițător și receptor poate fi considerată ca o variabilă aleatorie continuă. Întrucât atenuarea și faza sunt dependente de distanță, acestea vor fi - de asemenea - variabile aleatorii, și se poate reprezenta mulțimea formelor de undă recepționate printr-o funcție de forma

$$Y(t) = A(t) \cdot \cos(10^8 t + \theta(t))$$

unde $A(t)$ și $\theta(t)$ sunt variabile aleatorii, reprezentând amplitudinea și faza formelor de undă recepționate.

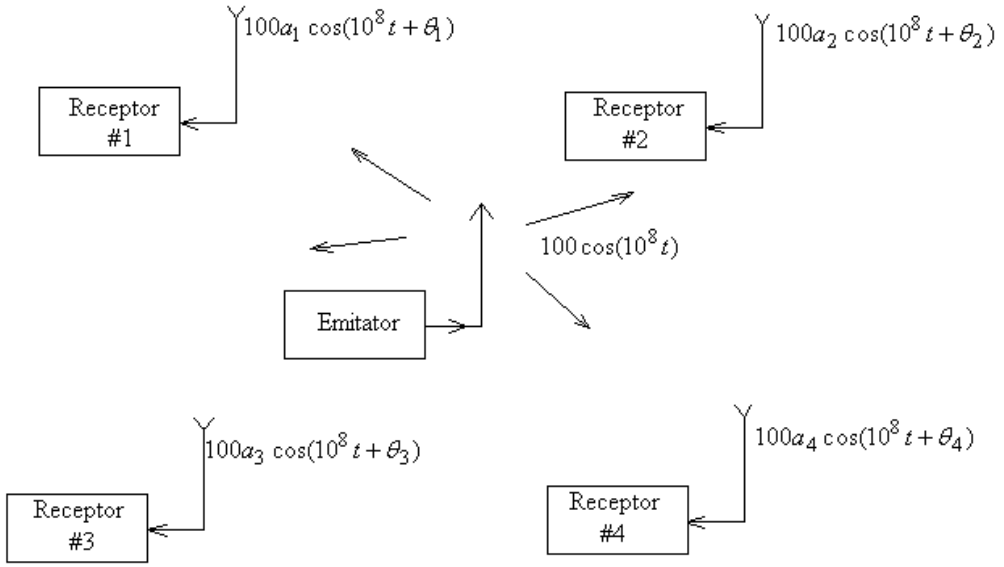


Fig. 2: Exemplu de sistem de transmisiune (radiodifuziune)

Pentru analiza sistemului de transmisiune trebuie considerate toate semnalele de pe lanțul de transmisiune:

- fie semnalul emis ca fiind un semnal sinusoidal cu modulație în frecvență (MF) cu semnal modulator *s(t)*:

$$x_{MF}(t) = 100\cos(2\pi(1+\cdot s(t))\cdot f_0)$$

- semnalul recepționat are un zgomot aditiv:

$$y(t) = x_{MF}(t) + n(t) = (100 + n_A(t))\cdot\cos(2\pi(1+\cdot s(t))\cdot f_0 + n_B(t)) =$$
$$= A(t)\cdot\cos(2\pi(1+\cdot s(t))\cdot f_0 + n_B(t))$$

- semnalul demodulat conține și zgomot pe lângă semnalul util:

$$s'(t) = s(t) + n(t)$$

- problema cea mai importantă este proiectarea receptorului (hardware și software), astfel încât semnalul demodulat să fie cât mai aproape de semnalul modulator:

$$s'(t) - s(t) = n(t) \to 0\,.$$

Exemplul 3 (SONAR): Sonarul [1], ca și radarul, sunt tehnici folosite în navigația obiectelor mobile prin estimarea distanțelor până la diverse obstacole și – eventual - a dimensiunilor și formelor obiectului detectat. În fig. 3 se prezintă structura unei aplicații sonar și forme de undă tipice pentru semnalul emis și cel recepționat. Semnalul recepționat este constituit din semnalul emis afectat de propagarea prin mediul de transmisiune, pe calea de la emițător, reflector și receptor.

Problema detecției obiectelor constă în problema detecției ecoului în semnalul recepționat. Putem considera două ipoteze:

H_0 : Nu există ecou (obstacol);
H_1 : Există ecou (obstacol).

În funcție de zgomotul de pe canal, cele două ipoteze pot fi adevărate sau nu. Important este că pentru fiecare ipoteză se pot asocia

[1] SONAR = **SO**und **NA**vigation & **R**anging

mărimi numerice de tip probabilitate, adică putem calcula probabilitățile celor două ipoteze considerate: $P(H_0)$ și, respectiv, $P(H_1)$.

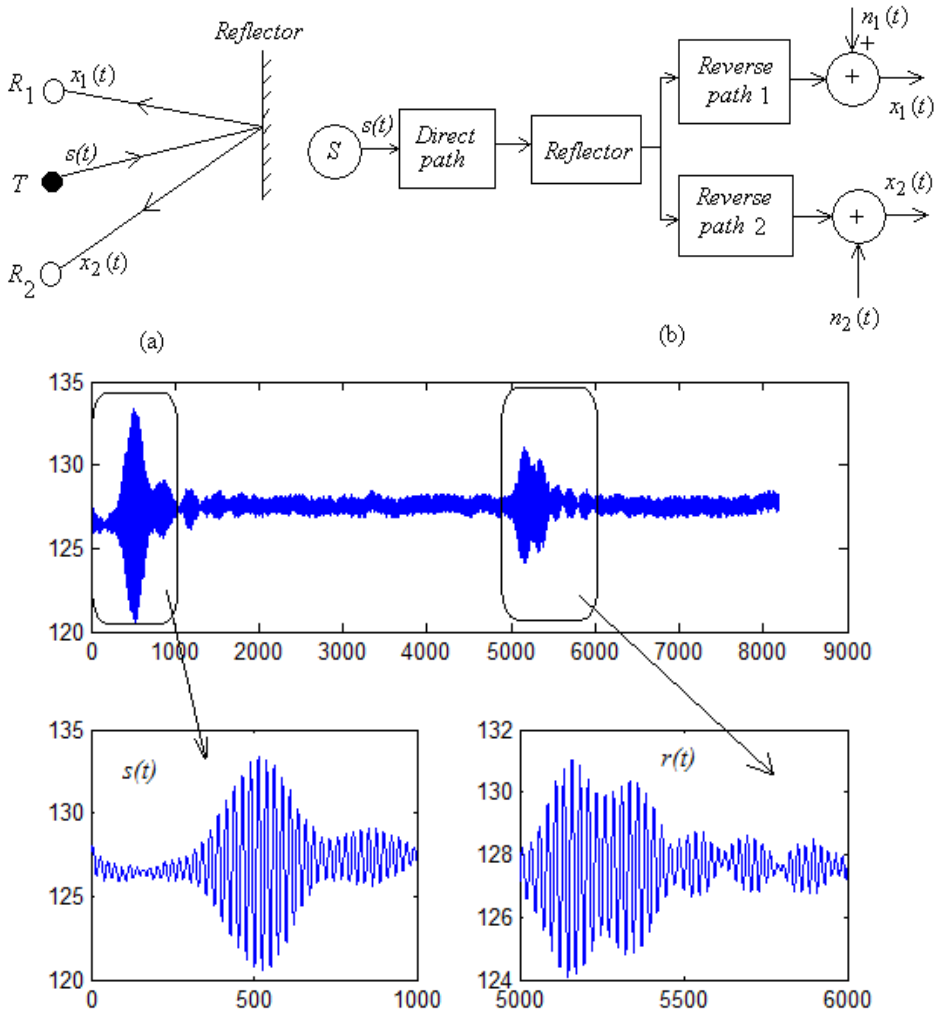


Fig. 3: Semnale din cadrul unei aplicații sonar

Perturbații

În sistemele de comunicații, zgomotul și distorsiunile introduse de circuite și de canal sunt mărimile cele mai importante ce creează probleme sistemelor de comunicații. Zgomotele electrice au – de obicei – o natură aleatorie.

Înțelegem prin perturbații semnalele efecte ale unor semnale din sistem sau din afara acestuia, deterministe sau aleatorii, care afectează

sistemul de comunicații. Natura fizică de manifestare a perturbațiilor este un semnal perturbator.

Perturbațiile introduse de semnalele deterministe pot fi generate de interferențe cu celelalte căi de comunicații. Perturbațiile introduse de zgomote sunt generate de sursele de zgomot de pe canalul de comunicație.

Din punct de vedere fizic se pot evidenția mai multe tipuri de zgomote:

1. zgomotul acustic provine de la obiectele în mișcare, vibrații (de exemplu: mașini, aer condiționat, ventilatoare, vocea umană din fundal, ploaie, vânt etc.);
2. zgomotul electromagnetic este prezent în toate frecvențele, fiind generat de dispozitivele care consumă sau transmit putere; în general, cu cât tensiunea sau curentul sunt mai mari, cu atât zgomotul indus va fi mai mare (sursele comune de zgomot electromagnetic sunt: transformatoarele, emițătoarele radio-tv, telefoanele mobile, motoarele, releele, lămpile fluorescente);
3. zgomotul electrostatic este generat de prezența tensiunii cu sau fără circulație de curent (surse comune de zgomot electrostatic sunt lămpile fluorescente);
4. zgomotele de canal (ecou, *fading*) sunt cauzate de caracteristicile ne-ideale ale canalelor de transmisiune; semnalele cu frecvențe radio, în particular cele folosite în comunicațiile mobile, sunt sensibile la caracteristicile de propagare (atenuare și întârzieri selective);
5. zgomotul de procesare: este zgomotul ce rezultă din erorile de procesare la operațiile de discretizare (eșantionare + cuantizare), deci la trecerea de la valorile continue la cele discrete.

Din punctul de vedere al caracteristicilor în timp și frecvență, zgomotele pot fi clasificate în câteva categorii:

1). Zgomotul alb este definit ca un semnal necorelat (eșantioane necorelate) cu putere egală la toate frecvențele, așa cum s-a prezentat în fig. 4.

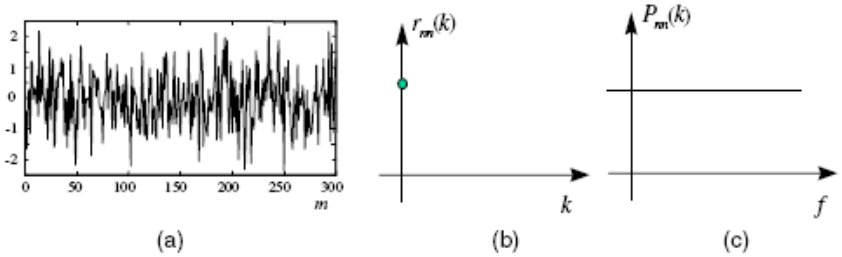


Fig. 4: (a) zgomot alb; (b) autocorelație; (c) spectrul de putere

Un zgomot care are aceeași putere la toate frecvențele, de la *–inf* la + *inf*, are în mod necesar o putere infinită și este – deci – un concept teoretic. În practică, se acceptă ca fiind zgomot alb orice zgomot care are spectrul de putere constant într-o bandă de frecvență, mai mare decât banda sistemului de comunicație. Acest caz mai este cunoscut și sub numele de zgomot cvasi-alb.

2). Zgomotul colorat. Termenul de zgomot colorat se referă la orice zgomot care nu are spectru de zgomot alb. De exemplu, zgomotul de audio frecvență de la mașini, zgomotul de calculator, vorbirea umană în background zgomote colorate. Toate acestea au un spectru dominant în partea de joasă frecvență. De asemenea, un zgomot alb ce traversează un canal va fi modelat ("*colorat*") de forma caracteristicii de frecvență a canalului. Un exemplu se prezintă în fig. 5, pentru forma de undă și densitatea spectrală de putere.

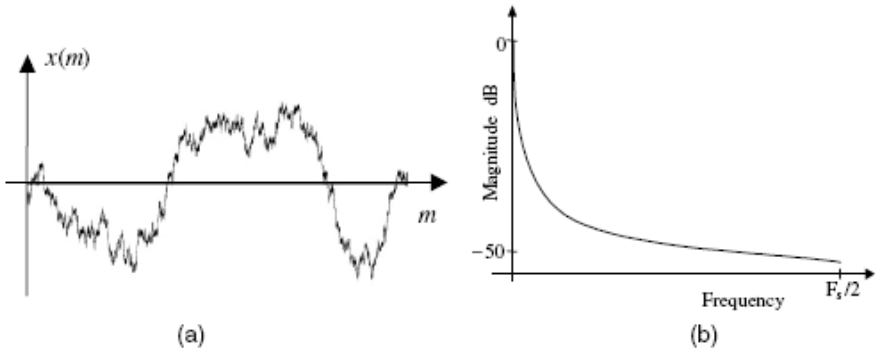


Fig. 5 : Zgomot colorat: a) evoluție în timp și (b) în frecvență

3). Zgomotul impulsiv constă din impulsuri de scurtă durată, cauzat de surse variate: zgomot de comutație, căile auxiliare dintr-un sistem de comunicație, "*clikurile*" de la tastatura unui calculator.

În sistemele de comunicații, zgomotul de tip impulsuri are o durată mai mică decât durata unui simbol transmis (o perioadă, cel mai des). Zgomotul de tip impuls este localizat în timp și spațiu, ca apariție, însă – apoi – se propagă pe canal până la locul de recepție. Ca atare, zgomotul recepționat este dispersat în timp și este afectat de canal, sub o formă echivalentă impusă de răspunsul canalului la zgomot.

Un caz particular îl constituie zgomotul de tip impuls tranzitoriu format dintr-un impuls inițial, relativ scurt în timp, urmat de o oscilație amortizată de joasă frecvență, ca în fig. 6. Impulsul inițial este dat de surse externe sau de interferențele interne, în timp ce oscilațiile sunt date adesea

de rezonanța sistemului de comunicație excitat de impulsul inițial, și poate fi considerat ca răspuns al canalului la impulsul initial.

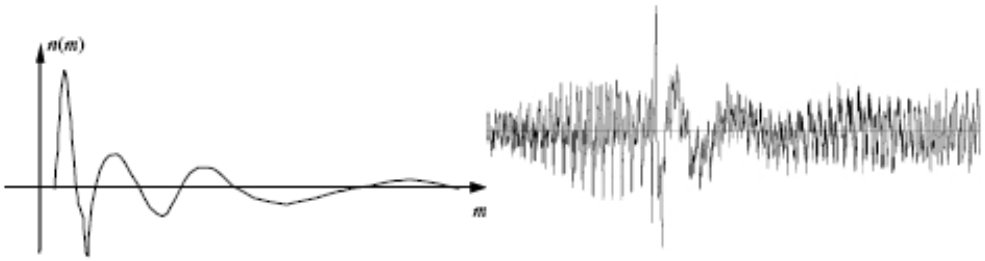


Fig. 6: Zgomot de tip impuls tranzitoriu

Aproape pentru toate dispozitivele electronice se pot întâlni două tipuri de zgomote:

1. Zgomotul termic este generat de mișcările aleatorii ale particulelor energizate de temperatură. Conceptul are rădăcinile în termodinamică și este asociat cu mișcarea liberă a particulelor, mișcare aleatorie dependentă de temperatură. Zgomotul termic este de tip zgomot alb, întrucât are densitatea spectrală de putere constantă cu frecvența.

2. Zgomotul de alice (*Shot noise*) este caracteristic dispozitivelor electronice și este dat de mișcarea aleatorie a electronilor dintr-un flux de particule.

Diferența dintre zgomotul termic și cel de alice se referă la faptul că, în timp ce zgomotul termic este dat de mișcarea liberă, neforțată, a electronilor, zgomotul de alice este dat de mișcarea direcționată a acestora.

1.2. Descrierea semnalelor aleatorii continue

Semnalele aleatorii continue pot fi modelate prin variabile aleatorii continue. Acestea au un număr infinit de valori. Pentru semnale aleatorii continue se definește funcția de distribuție cumulativă (sau funcția de repartiție a probabilității), definită ca probabilitatea ca semnalul să ia o valoare mai mică decât *x*:

$$P(X \leq x) = F_X(x) \tag{6}$$

Întrucât probabilitatea ca o variabilă aleatorie X să ia valori în intervalul $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ este

$$P(x-\varepsilon \le X \le x+\varepsilon) \tag{7}$$

atunci *funcția densitate de probabilitate în punctul x*, notată cu $f(x)$, este

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} P(x-\varepsilon < X \le x+\varepsilon) = \\ &\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left[P(X \le x+e) - P(X \le x-e)\right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left[F(x+e) - F(x-e)\right] = \frac{dF(x)}{dx} \end{aligned} \tag{8}$$

Precizarea valorii variabilei aleatorii $X(t_1)$ nu se poate face decât probabilistic. Dacă avem n realizări, deci n valori ale variabilei aleatorii, și vrem să determinăm probabilitatea ca variabila aleatorie X să aibă valoarea mai mică decât un număr real, fie acesta x_1, se poate proceda astfel: dacă n_1 din realizări au valori mai mici decât x_1 și n este numărul total de realizări, atunci probabilitatea se calculează cu relația:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_1}{n} = P\left(X \le x_1\right) \tag{9}$$

Această probabilitate se noteaza cu $F(x)$ și se numește *funcția de repartiție (distribuție) a probabilității de ordinul întâi* sau - pe scurt - funcția de repartiție (distribuție) de ordinul întâi:

$$F_1(x_1) = P\left(X \le x_1\right) \tag{10}$$

așa cum s-a reprezentat tipic în fig. 7. Funcția de repartiție a probabilității arată un aspect cumulativ și este – deci – o funcție monoton crescătoare. Este ușor de observat că funcția de repartiție este o funcție monoton crescătoare și are valorile limită:

$$F(-\infty) = 0 \tag{11}$$

$$F(+\infty) = 1 \tag{12}$$

așa cum se poate observa în fig. 7.

Cele două funcții definte până acum, funcția de repartiție și funcția densitate de probabilitate, depind una de alta prin relațiile:

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x) \tag{13}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy\,. \tag{14}$$

Se pot ușor accepta, justifica și demonstra următoarele proprietăți ale funcției densitate de probabilitate:

$$f(x)\geq 0 \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \tag{16}$$

Probabilitatea ca o variabilă aleatorie să ia valori în intervalul $[x_1, x_2]$ este:

$$P(x_1\leq X\leq x_2)=F(x_2)-F(x_1) \tag{17}$$

și poate fi calculată cu relația

$$P(x_1\leq X\leq x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(y)dy \tag{18}$$

egală cu aria cuprinsă între curba *f(x)* și axa abciselor.

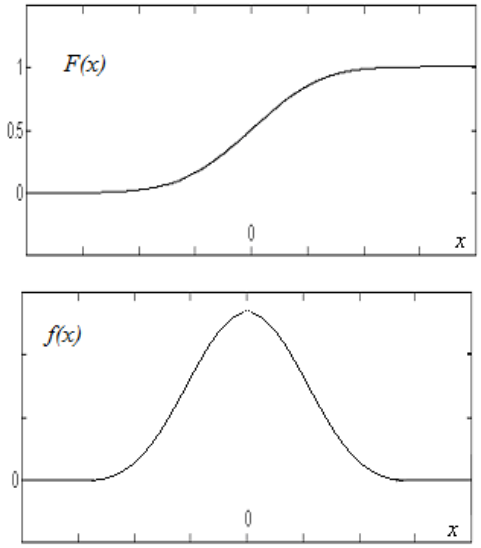


Fig. 7: Functiile de repartiție (distribuție) a probabilității și densitatea de probabilitate

Exerciţiu: În cadrul unui proces de modelare statistică, se consideră funcția densitate de probabilitate (fdp) a unui semnal aleatoriu cu expresia

$$f(x)=\begin{cases} cx, & 0<x<3 \\ 0, & altfel \end{cases}$$

1). Să se calculeze constanta *c*.
2). Să se calculeaze probabilitatea ca semnalul să ia valori în intervalul [1,2].
3). Să se calculeze funcția de distribuție a probabilității.

Soluție: 1). Se impune condiția ca aria de sub densitatea de probabilitate să fie 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)=\int_{0}^{3} cx = c\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{c}{2}(9-0)=1 \rightarrow c=2/9.$$

2). Probabilitatea căutată este

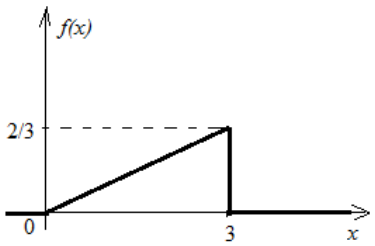
$$P(1<X<2)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 \frac{2x}{9}dx=\frac{2\cdot x^2}{2\cdot 9}\Big|_1^2=\frac{1}{9}(4-1)=1/3=0.33.$$

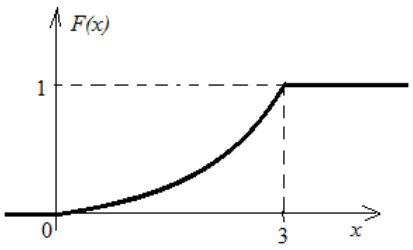
3). Pentru intervalul $[0,3]$, funcția de distributie a probabilității este

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy=\int_0^x \frac{2y}{9}dy=\frac{2}{9}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^x=\frac{x^2}{9}$$

cu forma finală

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{9}, & 0\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}.$$





1.3. Valori medii statistice ale variabilelor aleatorii

În practică se folosesc o serie de mărimi importante în caracterizarea variabilelor aleatorii, cum sunt *valoarea medie statistică* sau *valoarea medie* sau *valoarea așteptată*:

1. Media variabilei aleatorii X este:

$$m_X = \mu_X \overset{def}{=} E\{X\} = \overline{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \tag{19}$$

2. Valoarea pătratică medie:

$$\overline{X^2} \overset{def}{=} E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx \tag{20}$$

3. Dispersia (varianța):

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 \overset{def}{=} E\left\{\left[X-\mu_X\right]^2\right\} = \overline{\left[X-\overline{X}\right]^2} = E\{X^2 - 2X\cdot\mu_X + \mu_X^2\} = \\ = E\{X^2\} - 2E\{2X\cdot\mu_X\} + E\{\mu_X^2\} = \overline{X^2} - \mu_X^2\end{aligned} \tag{21}$$

Rădăcina pătrată din dispersie se numește *deviație standard*. Dispersia este o măsură a împrăștierii valorilor semnalului aleatoriu.

Inegalitatea lui Cebîșev: Fie X o variabilă aleatorie cu medie μ_X și dispersie σ_X^2. Pentru orice $\varepsilon > 0$ este valabilă inegalitatea

$$P\left(|X-\mu_X| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2} \tag{22}$$

Dacă se consideră $\varepsilon = k\cdot\sigma_X$, atunci se obtine relația

$$P\left(|X-\mu_X| \geq k\cdot\sigma_X\right) \leq \frac{1}{k^2} \tag{23}$$

sau, echivalent,

$$P\left(\left|X-\mu_X\right|\geq k\right)\leq\frac{\sigma_X^2}{k^2} \tag{24}$$

relație foarte utilă în practică pentru descrierea probabilistică a valorilor semnalului aleatoriu dintr-un interval simetric.

1.4. Funcții de distribuție des întâlnite în practică

Se prezintă clasele cele mai importante de variabile aleatorii utilizate în modelarea semnalelor aleatorii.

1. Distribuția gaussiană (normală). În figura de mai jos se prezintă funcția de repartiție și densitatea de probabilitate pentru un semnal aleatoriu Gaussian, cu diverse valori ale dispersiei.

Expresiile matematice utile sunt:

- funcția densitate de probabilitate:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{25}$$

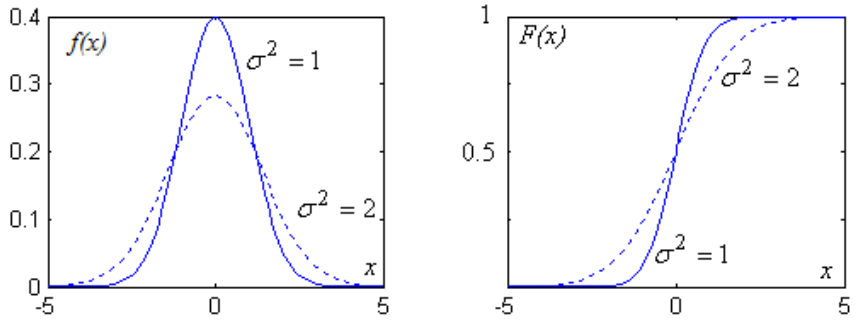


Fig. 8: Distribuție normală (gaussiană): densitatea de probabilitate și funcția de repartiție

- funcția de repartiție a probabilității:

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy \tag{26}$$

Distribuția normală se folosește mult pentru că aproximează o clasă mare de distribuții din practică, cum ar fi eșantioanele zgomotului de agitație termică. În plus, în vederea modelării zgomotului produs de mai multe surse independente, se folosește tot un model Gaussian, bazându-ne pe teorema limită centrală [2]. Al doilea motiv este că funcția densitate de probabilitate are numai doi parametri: media și dispersia. Făcând o schimbare de variabilă în expresia densității de probabilitate:

$$z = \frac{x - x0}{\sigma} \tag{27}$$

se obţine o variabilă aleatorie gaussiană normată sau standard ce are media zero și dispersia 1, ceea ce se evidenţiază prin notaţia $N(m,\sigma^2)=N(0,1)$. Funcţia de repartiţie a variabilei aleatorii standard este:

$$F(a) = P(X(t) \le a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{28}$$

Prin scrierea $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ se înțelege că variabila aleatorie X are distribuție normală cu parametrii dintre paranteze media μ și dispersia σ^2).

2. Distribuția uniformă. În fig. 9 se prezintă o realizare, funcția de repartiție și funcția densitate de probabilitate pentru un semnal cu distribuție uniformă, pe intervalul [0,1]. Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatorii cu distribuție uniformă pe intervalul [*a*,*b*] este:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x<a \text{ si } x>b \end{cases} \tag{29}$$

[2] DACĂ sunt îndeplinite condițiile: (1) $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ sunt variabile aleatorii continue; (2) mediile acestora sunt zero; (3) variabilele aleatorii sunt independente și cu aceeași distribuție; (4) nici o variabilă aleatorie nu este dominantă, deci fiecare v.a. este neglijabilă față de suma lor, ATUNCI variabila aleatorie: $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$ are, pentru *n* mare, o densitate de probabilitate ce tinde la $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y)^2}{2\sigma^2}}$. Mai mult, în practică este suficient să considerăm că suma are o distribuție gaussiană și pentru număr mic de termeni, de exemplu trei-patru termeni.

Funcția de repartiție are expresia:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^x dx=\dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x<a\\ 1, & x>b\end{cases} \tag{30}$$

Media și dipersia sunt:

$$\mu_X=\frac{a+b}{2},\qquad \sigma_X^2=\frac{(b-a)^2}{12} \tag{31}$$

O astfel de repartiție o are mulțimea eșantioanelor semnalului de televiziune.

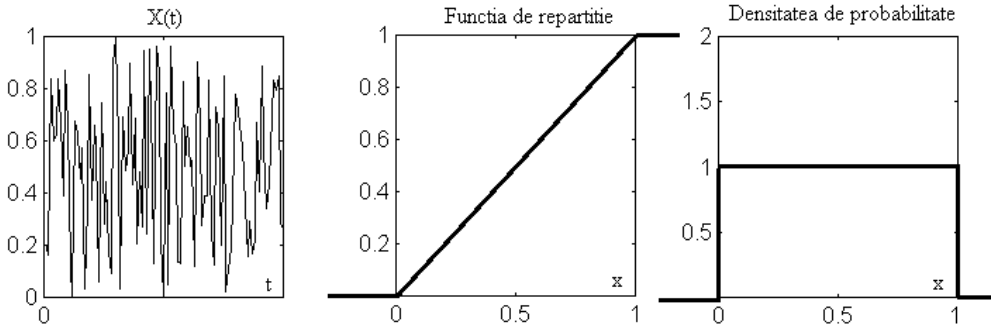


Fig. 9: Semnal aleatoriu cu distribuție uniformă în intervalul [0,1].

3). Distribuția Rayleigh. Undele radio reflectate de ionosferă au o anvelopă ce respectă o distribuție Rayleigh. De asemenea, și anvelopa zgomotului de fluctuații. Densitatea de probabilitate este

$$f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x\ge 0 \tag{32}$$

unde σ este un parametru cu semnificație de dispersie. Valoarea medie statistică este

$$\overline{X(t)}=\int_0^\infty x\cdot f(x)dx=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma \tag{33}$$

Dispersia statistică [3]

$$\sigma_X^2 = E\left\{\left[X(t)-\overline{X(t)}\right]^2\right\} = \int_0^\infty (x-\frac{\pi\sigma^2}{2})^2 \cdot w(x)dx$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^3 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = .. = \left(2-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sigma^2 \quad (34)$$

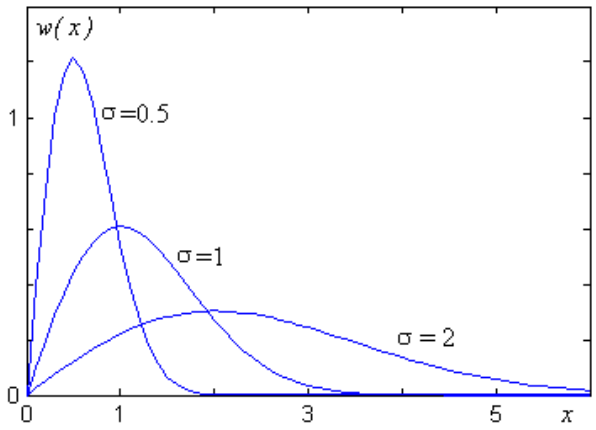


Fig. 10: Densități de probabilitate Rayleigh

4. Distributia exponențială. Funcția de repartiție a probabilității este

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (35)$$

unde λ este un parametru numit rata schimbării. Funcția densitate de probabilitate este

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x},\ x > 0 \quad (36)$$

Media și varianța (dispersia) sunt

$$\mu = E\{X(t)\} = \frac{1}{\lambda} \quad (37)$$

[3] Pentru fdp se mai folosește și notația *w(x)*.

$$\sigma^2 = var\{X(t)\} = E\left\{\left[x(t) - \mu\right]^2\right\} = \frac{1}{\lambda^2} \tag{38}$$

Funcțiile densitate de probabilitate și de repartiție a probabilității sunt prezentate în fig. 11.

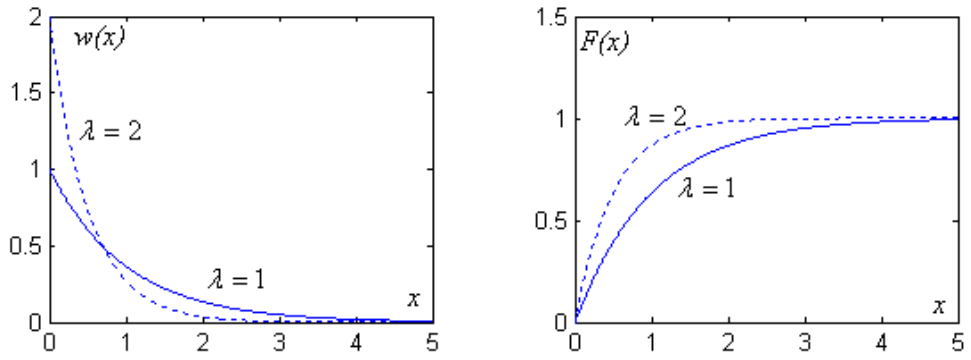


Fig. 11: Densitatea de probabilitate și funcția de repartiție a distribuției exponențiale

5. Distribuția Maxwell. Distribuția lui Maxwell (sau Maxwell-Boltzmann) reprezintă viteza moleculelor în echilibru termic. Pentru intervalul $[0,\infty)$ funcția de repartiție a probabilității este

$$F(x) = erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}\cdot a}\right) - \frac{x\cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{a}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{39}$$

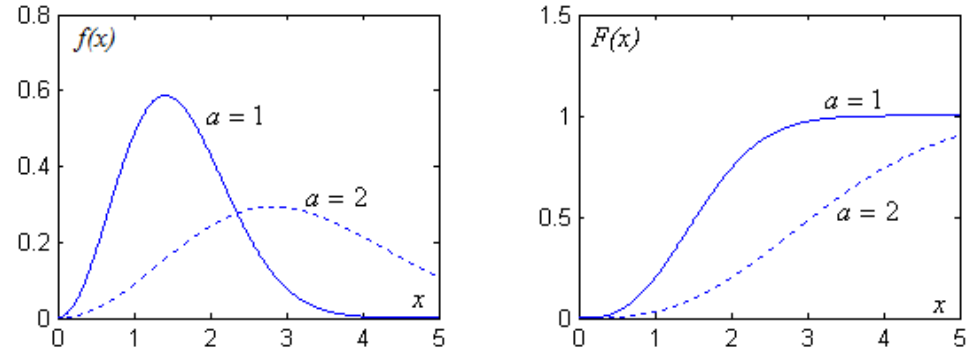


Fig. 12: Densitatea de probabilitate și funcția de repartiție a distribuției Maxwell

Funcția densitate de probabilitate este

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{a^3} \tag{40}$$

Media este

$$\mu=2a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{41}$$

și varianța

$$\sigma^2=\frac{a^2(3\pi-8)}{\pi} \tag{42}$$

Exerciţii propuse: 1). Să se calculeze media și dispersia unui semnal aleatoriu cu distribuție Rayleigh.

2). Se consideră o variabilă aleatorie X cu densitatea de probabilitate $f(x)=\begin{cases}1/4, & |x|\le 1\\ 1/8, & 1<|x|\le 3\\ 0, & |x|>3\end{cases}$. Să se calculeaze media și dispersia.

1.5. Valoarea de vârf a unui semnal aleatoriu

Semnalele aleatorii au valori pe întreaga axă reală. Se pune problema de ordin practic de a calcula probabilitatea ca un semnal aleatoriu să depășească anumite valori, de prag, notate cu V_v, în scopul protecției la perturbații prin filtrare sau alte tehnici de compensare, așa cum se prezintă în fig. 13.

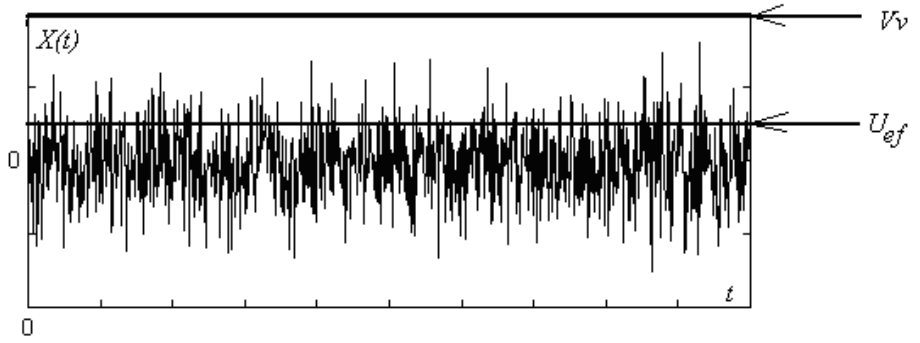


Fig. 13: Comparație între valoarea efectivă și valoarea de vârf a zgomotului

În acest sens, se definește valoarea de vârf a unui semnal aleatoriu *X(t)* ca fiind valoarea ce poate fi luată cu o probabilitate impusă, de obicei mică, de exemplu P_V

$$P_V = P(|X(t)| > V) \cong 0 \tag{43}$$

În acest fel, neglijarea valorilor ce depășesc valoarea de vârf nu va avea un efect mare, întrucât probabilitatea de apariție a acestora este foarte mică. Ultima relație se poate scrie mai departe astfel:

$$P_V = P(|X(t)| > V) = 1 - P(|X(t)| \le V) = 1 - \int_{-|V|}^{|V|} f(x)dx \tag{44}$$

Particularizând pentru semnale aleatorii cu distribuție normală $N(0, \sigma^2)$, se obține:

$$P_V = 1 - \int_{-|V|}^{|V|} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-|V|}^{|V|} exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)dx \tag{45}$$

Întrucât dispersia σ^2 a semnalului aleatoriu este egală cu puterea zgomotului aleatoriu disipată pe o rezistență unitară, se poate scrie:

$$\sigma^2 = U_{ef}^2 \tag{46}$$

de unde rezultă relația finală:

$$P_V = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi U_{ef}^2}} \int_{-|V|}^{|V|} exp\left(-\frac{x^2}{2U_{ef}^2}\right)dx \tag{47}$$

De exemplu, considerând valoarea de prag de patru ori mai mare decât valoarea sa efectivă, $V=4U_{ef}$., rezultă o probabilitate P_V = 0,000032. Deci valoarea de vârf a unui zgomot cu repartiție normală (sau apropiată de cea normală) este de 4 ori mai mare decât valoarea sa efectivă, așa cum s-a prezentat și în fig. 13.

În legătură cu valoarea de vârf, problema poate fi formulată și invers: să se calculeze valoarea de vârf impunându-se o anumită

probabilitate. Soluția constă în folosirea relației generale (44) și rezolvarea acestei ecuații, însă cu necunoscuta *V*.

Funcția de repartiție a probabilității *F(x)* se mai notează și cu *Φ(x)* și se numește funcție de distribuție cumulativă. O alta funcție utilizată în practică este

$$Fc(x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \int_{x}^{\infty} f(u)du \tag{48}$$

și are semnificația de probabilitatea ca variabila aleatorie să depașească o anumită valoare, *x*. *Fc(x)* se numește funcție de repartiție cumulativă complementară.

Funcţia de repartiţie a variabilei aleatorii standard *N*(0,1) este:

$$F(a) = P(X(t) \le a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{49}$$

Integrala nu poate fi evaluată decât pe cale numerică. Există mai multe soluții.

1). Folosirea unor valori tabelate ale funcției sau integralei *Laplace* pentru valori pozitive ale argumentului:

$$Q(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \tag{50}$$

Ultima relație corespunde unei probabilități mai mici cu 0.5 a unei variabile aleatorii cu distribuție normală normate *N*(0,1). Valorile funcției de repartiție normate, ca funcție de *Q*, sunt:

$$F(a) = P(X(t) \le a) = 0{,}5 + Q(a), \quad a \ge 0 \tag{51}$$

$$P(X(t) > a) = 1 - P(X(t) \le a) = 1 - [0.5 + Q(a)] = 0{,}5 - Q(a) \tag{52}$$

$$F(-a) = 1 - F(a) \tag{53}$$

așa cum se reprezintă și în fig. 14. Se va ține seama că, în cazul unei variabile aleatorii ce nu este normată, deci cu media μ_X și dipersia σ^2 , trebuie considerată relația:

$$P(X(t) \le a) = 0.5 + Q\left(\frac{a-\mu_X}{\sigma X}\right) \tag{54}$$

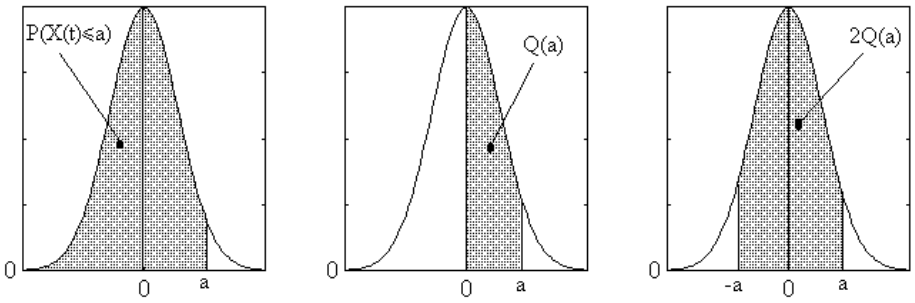


Fig. 14: Calculul probabilităților cu funcția *Q(a)*

2). A doua soluție constă în folosirea ***funcției eroare***. În mediul de simulare Matlab există funcția [4]:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{55}$$

și corespunde unei valori cu 0.5 mai mare decât a unei distribuții Gausiene cu medie zero și variantă (dispersie) $\sigma^2 = 1/2$. Ceea ce trebuie făcut pentru a folosi funcția (50), este o schimbare de variabilă convenabilă. Legătura dintre funcțiile *Q(a)* și *erf(a)* este:

$$Q(a) = \frac{erf(a/\sqrt{2})}{2} \tag{56}$$

3). A treia soluție constă în folosirea unei aproximări pentru *Fc(x)* de forma:

[4] Mediul Matlab mai are disponibilă și ***funcția eroare complementară:***

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt = 1 - erf(x)$$

$$\hat{Fc}(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (57)$$

ce realizează o aproximare foarte bună [5] pentru $x > 2$ și acceptabilă pentru $x>1$ (cca. 0.1), așa cum se poate observa în fig. 15.

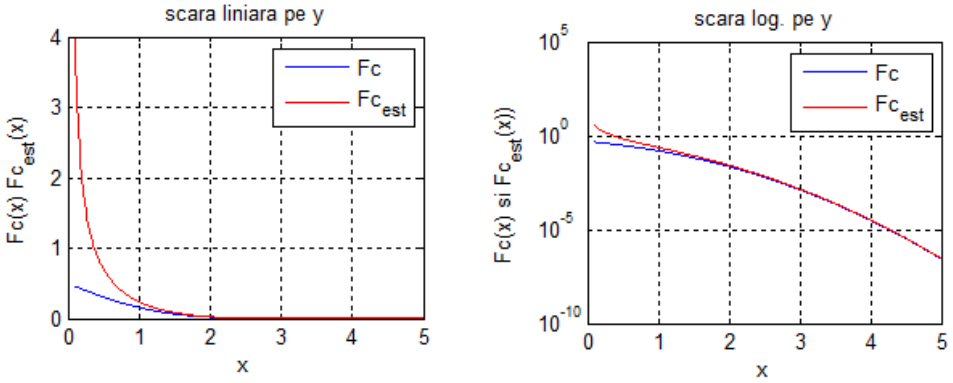


Fig. 15: Aproximarea functiei de distributie complementară cu relația (46)

4). A patra soluție constă în aproximarea integralei cu o sumă finită, după relația:

$$F(a) = P(X(t) \le a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \cong \frac{T_e}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{N} e^{-\frac{z(i)^2}{2}} \qquad (58)$$

unde T_e este pasul de eșantionare, cu valori între 0.01 și 0.001. Numărul de termeni N din ultima sumă trebuie să fie cât mai mare posibil, de exemplu 50-100.

Exemplul 1: Tensiunea X a unui generator de zgomot este o variabilă aleatorie normală standard. Să se calculeze probabilitatea ca tensiunea generatorului să ia valori mai mari de 2,3 V și probabilitatea ca să ia valori în intervalul [1; 2,3].

Soluție: Folosind funcția Q obținem:

$$P(X(t) > 2{,}3) = 0.5 - Q(2.3) = 0.5 - 0.48928 = 0.01072 \cong 0.011$$

[5] vezi (Kay, 1998)

$$P(1 \le X(t) \le 2{,}3) = \int_{1}^{2{,}3} f(x)dx = Q(2{,}3) - Q(1) = 0{,}48928 - 0{,}34134 \cong 0{,}148$$

Folosind funcția eroare *erf(x)* se obține:

$$P(X(t) > 2{,}3) = \int_{2.3}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2.3}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Folosind schimbarea de variabilă $x/\sqrt{2} = t$ se obține

$$P(X(t) > 2{,}3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2.3/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-t^2} \sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1.63}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1.63}^{\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot erfc(1.63) = 0.0106$$

$$P(1 \le X(t) \le 2{,}3) = \int_{1}^{2.3} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1}^{2.3} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/\sqrt{2}}^{2.3/\sqrt{2}} e^{-t^2} \sqrt{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0.707}^{1.631} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot [erf(1.631) - erf(0.707)] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (0.9789 - 0.6826) \cong 0.1482$$

Folosind a treia soluție, prin aproximarea funcției *Fc*, putem scrie

$$P(X(t) > 2{,}3) = Fc(2{,}3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2.3}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x} e^{-\frac{x^2}{2}} \Bigg|_{x=2.3} = 0.0123$$

$$P(1 \le X(t) \le 2{,}3) = Fc(1) - Fc(2.3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1} e^{-\frac{1^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2.3} e^{-\frac{2.3^2}{2}} =$$

$$= 0.2420 - 0.0123 \cong 0.2297$$

Exemplul 2: Tensiunea X a unui generator de zgomot este o variabilă aleatorie normală cu medie 0.1 și dispersie 0.01. Să se calculeze valoarea de vârf Vv pentru o probabilitate Pv=0.01.

Soluție: Ecuația ce trebuie rezolvată este

$$P_V = P(|X(t)| > Vv) = 1 - \int_{-|Vv|}^{|Vv|} f(x)dx = 0.01$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \int_{-Vv}^{Vv} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0.99 \text{ sau } \frac{2}{\sqrt{2\pi \cdot 0.01}} \int_{0}^{Vv} e^{-\frac{(x-0.1)^2}{2\cdot 0.01}} dx = 0.99$$

Se face schimbarea de variabilă $\frac{x-0.1}{0.1\cdot\sqrt{2}} = u$, $dx = 0.1\sqrt{2}\cdot du$. Se obține

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{Vv-0.1}{0.1\cdot\sqrt{2}}} e^{-u^2} du \rightarrow erf\left(\frac{Vv-0.1}{0.1\cdot\sqrt{2}}\right) + erf\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.99$$

Folosind un program simplu[6], se obține soluția Vv = 0.1211 V

1.6. Densitatea de probabilitate bidimensională

Există dese situații în practică când valorile instantanee ale unui semnal $X(t)$ de la intrarea unui canal de transmisiune au fdp gaussiană. Semnalul de la ieșirea canalului liniar, $Y(t)$, are de asemenea distribuție gaussiană. Suntem interesați de ambele amplitudini ale semnalelor de la intrarea și de la ieșirea canalului. Situația este descrisă de o funcție densitate de probabilitate bidimensională a unui semnal $Z(t)$ cu două variabile de forma:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{z}{2(1-\rho^2)}} \qquad (59)$$

unde

[6] dV=1e-4; Vv=0; V1= ..; V2= .. while [erf(V1) + erf(V2)]< 0.99, Vv=Vv+dV; V1=..; end;

$$z = \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \tag{60}$$

și

$$\rho = \rho_{xy} = \frac{E\{(X(t)-\mu_x)(Y(t)-\mu_y)\}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{61}$$

este coeficientul de intercorelație. De observat că sunt valabile relațiile:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy \quad \text{și} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx \tag{62}$$

Se pot defini și funcțiile densitate de probabilitate condiționată, de forma :

$$f_{Y/X}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \tag{63}$$

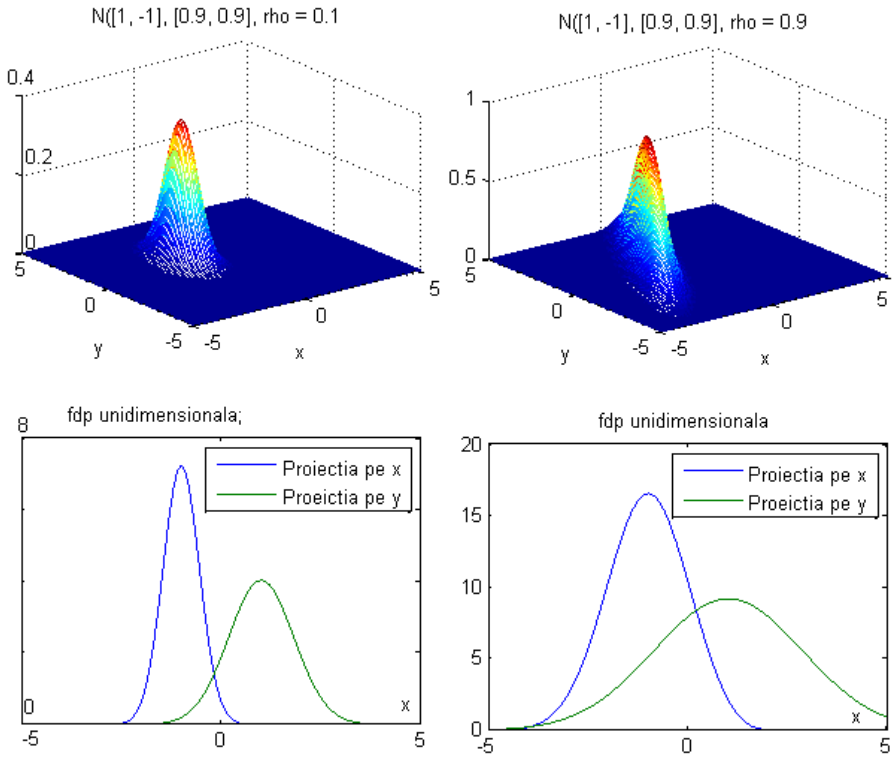
$$f_{X/Y}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{64}$$

Exemplul 1: Fie două semnale aleatorii continue cu fdp gaussiană și parametrii $N(\mu,\sigma^2)$ de forma (1; 0.9) și, respectiv, (-1, 1.5). Se consideră două cazuri. Semnalele sunt corelate cu un coeficient de corelație $\rho = 0.1$ și $\rho = 0.5$. Densitățile de probabilitate în spațiul 2D cât și proiecțiile verticale ale acestora sunt prezentate în figura de mai jos.

O măsură simplă a corelației liniare dintre două variabile aleatorii este dată de coeficientul de corelație:

$$\rho_{xy} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{E\{(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \tag{65}$$

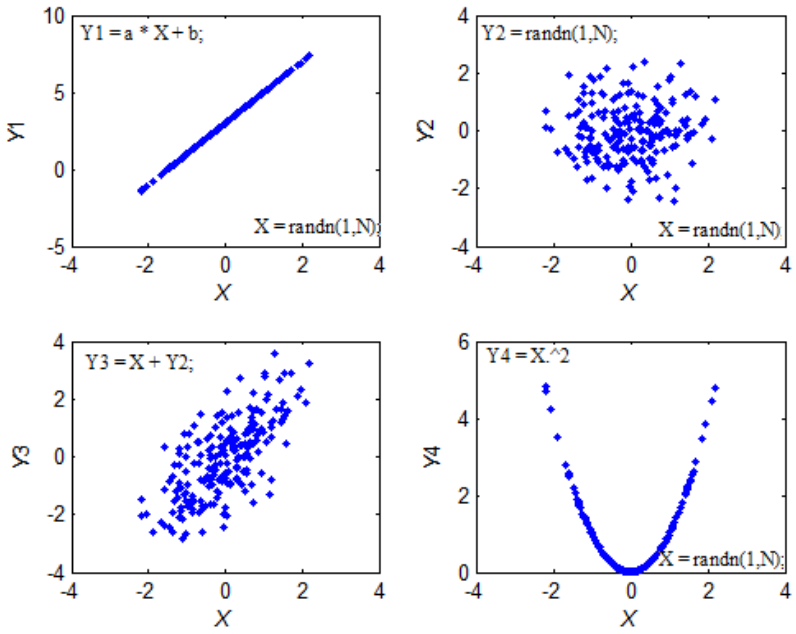
Acesta este o măsură a dependenței liniare a două variabile, cu valori între -1 și 1. Dacă $0 < \rho_{xy} < 1$, atunci semnalele *X(t)* și *Y(t)* sunt dependente într-o manieră liniară, de exemplu $Y= aX + b$, unde *a* și *b* sunt constante. Dacă $\rho_{xy}= 0$ nu există relație liniară între *X* și *Y*. Astfel, chiar dacă coeficientul de corelație este zero, între *X* și *Y* poate să existe o relație neliniară (vezi exemplul următor, unde *X(t)* este uniform distribuit în intervalul [-1,1] și $Y(t)=X(t)^2$).



Exemplul 2: Să se calculeze și să se reprezinte grafic dependența variabilelor aleatorii *X* și *Y*, cu diferite valori ale coeficientului de corelație.

Se consideră codul Matlab de mai jos pentru generarea unor semnale aleatorii și vizualizarea calitativă a dependenței dintre acestea.

a = 2; b = 3; X = randn(1,N); Y1 = a * X + b; Y2 = randn(1,N); Y3 = X + Y2; Y4 = X.^2	*% parametri* *% semnal aleatoriu cu distribuție gaussiană* *% dep. liniară între X și Y1:* ro_xy1 = 1.00 *% independente:* ro_xy2 = 0.02 *% Y3 parțial dep. de X:* ro_xy3 = 0.69 *% Y4 depinde neliniar de X:* ro_xy4 = -0.037



1.7. Funcții de variabile aleatorii

1.7.1. Funcții de o variabilă

Fie problema determinării funcției densitate de probabilitate a variabilei aleatorii *Y*, unde *Y* este o funcție de *X*, *Y=g(X).* Variabila *X* are densitatea de probabilitate $f_X(x)$ cunoscută. Se presupune că funcția *g(.)* este monoton crescătoare și diferențiabilă, așa cum se arată în fig. 16.a.

Pe baza fig. 16, se poate scrie că funcția distribuție a variabilei *Y* este

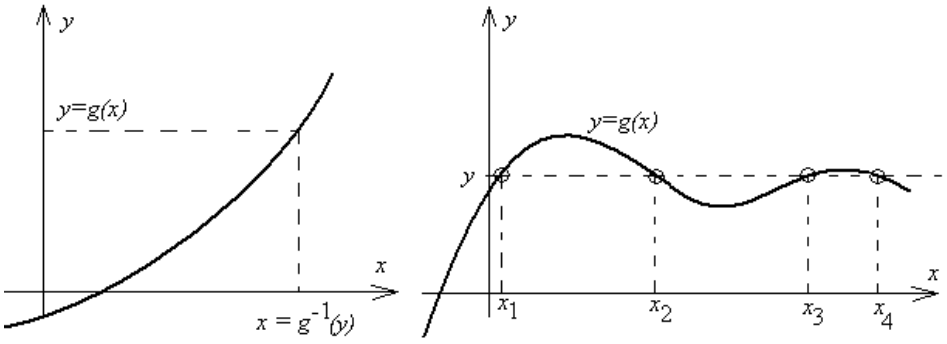
$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left[X \le x = g^{-1}(y)\right] \tag{66}$$

Întrucât se cunoaște funcția densitate a lui *X* se poate scrie că

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx \tag{67}$$

Prin diferențierea ultimei relații se obține

$$f_Y(y) = f_X\left[g^{-1}(y)\right] \cdot \underbrace{\frac{d}{dy}\left[g^{-1}(y)\right]}_{\geq 0} \tag{68}$$



(a) *(b)*

Fig. 16: Funcții densitate de probabilitate *g(x)*

Dacă funcția *g* ar fi fost monoton descrescătoare am fi avut

$$F_Y(y) = \int_{g^{-1}(y)}^{\infty} f_X(x)dx \tag{69}$$

și, în mod consecvent,

$$f_Y(y) = -f_X\left[g^{-1}(y)\right] \cdot \underbrace{\frac{d}{dy}\left[g^{-1}(y)\right]}_{\leq 0} \tag{70}$$

Combinând ambele rezultate (3) și (5), funcția densitate a lui *Y* este

$$f_Y(y) = \left| f_X\left[g^{-1}(y)\right] \right| \cdot \left\{ \frac{d}{dy}\left[g^{-1}(y)\right] \right\} \tag{71}$$

Rezultatul poate fi generalizat pentru cazul în care funcția *g(x)* are mai multe rădăcini reale x_1, x_2,...,x_n,... ca în fig. 16.b.. Funcția densitate a variabilei aleatorii *Y=g(X)*, știindu-se densitatea de probabilitate a variabilei *X*, este

$$f_Y(y)=\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}+\frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}+\frac{f_X(x_3)}{|g'(x_3)|}+...\frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}+... \qquad (72)$$

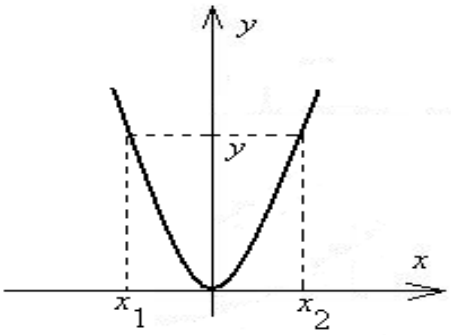
Rezultatul este cunoscut sub numele de teorema fundamentală. Un caz particular este pentru $Y=aX+b$. Ecuația în x, $y=g(x)=ax+b$, are rădăcina $x_1=(y-b)/a$. Derivata funcției $g(x)$ este constanta a. Rezultă

$$f_Y(y)=\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \qquad (73)$$

Exemplu [7]: Să se determine funcția densitate de probabilitate a variabilei aleatorii Y, unde $Y=g(X)=a\cdot X^2$, cunoscând parametrul a pozitiv și densitatea de probabilitate a variabilei X, $f_X(x)$.

□

Soluție: Relația de aplicare a teoremei fundamentale este



$$f_Y(y)=\frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|}+\frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|}$$

unde

$$g'(x)=2ax$$

$$x_1=-\sqrt{y/a}\ ,\ x_2=\sqrt{y/a}$$

$$g'(x_1)=2ax_1=-2a\sqrt{y/a}=-2\sqrt{ay}$$

$$g'(x_2)=2ax_2=2a\sqrt{y/a}=2\sqrt{ay}$$

Rezultă

$$f_Y(y)=\frac{f_X(-\sqrt{y/a})}{2\sqrt{ay}}+\frac{f_X(\sqrt{y/a})}{2\sqrt{ay}}$$

Se poate aplica și metoda bazată pe definiția funcției densitate de probabilitate. Se calculează, mai întâi, funcția de ditribuție a probabilității:

[7] Din (Barkat, 2005), pag. 51.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(X \le x_2) - P(X \le x_1) =$$
$$= P\left(X \le \sqrt{\frac{y}{a}}\right) - P\left(X \le -\sqrt{\frac{y}{a}}\right) = F_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)$$

Prin diferențierea relației anterioare obținem

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[F_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)\right] = \frac{1}{2a\sqrt{y/a}}\left[f_X\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right) + f_X\left(-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)\right],$$

$y > 0$

1.7.2. Funcții de două variabile

Fie variabila aleatorie $Z = g(X,Y)$. Se cunoaște densitatea de probabilitate compusă $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, întrucât se presupune că X și Y sunt independente. Dacă $Z = X + Y$, funcția densitate a lui Z este convoluția funcțiilor densitate a lui X și Y:

$$f_Z(z) = f_X(x) \otimes f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y) \cdot dy \tag{74}$$

Dacă $Z = X - Y$ funcția densitate a lui Z este:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z+y, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z+y) \cdot f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(x-z)dx \tag{75}$$

Expresii ale funcțiilor de distribuție și de densitate de probabilitate se pot găsi, de exemplu, în (*Barkat*, 2005), și pentru alte cazuri, cum sunt $Z = X \cdot Y$ și $Z = X / Y$.

1.8. Generarea numerică a semnalelor aleatorii

Semnalele aleatorii sunt reprezentate numeric prin eșantioane, cu valori numere aleatorii. În plus, numerele aleatorii sunt necesare pentru simularea efectului zgomotului asupra semnalelor utile și se poate studia efectul acestora asupra sistemelor de comunicatii, evaluând performanțele acestor sisteme în prezența zgomotului.

1.8.1. Generarea distribuției uniforme

În practica simulărilor numerice (pe calculatoare), se utilizează funcții predefinite pentru generarea numerelor aleatorii. Distribuția de bază este distribuția uniformă. De exemplu, un generator de numere aleatorii uniform distribuite va genera valori ale variabilei A în intervalul [0,1]. Funcția densitate de probabilitate uniformă și funcția de repartiție a probabilității sunt prezentate în fig. 17. Media variabilei A este 0.5.

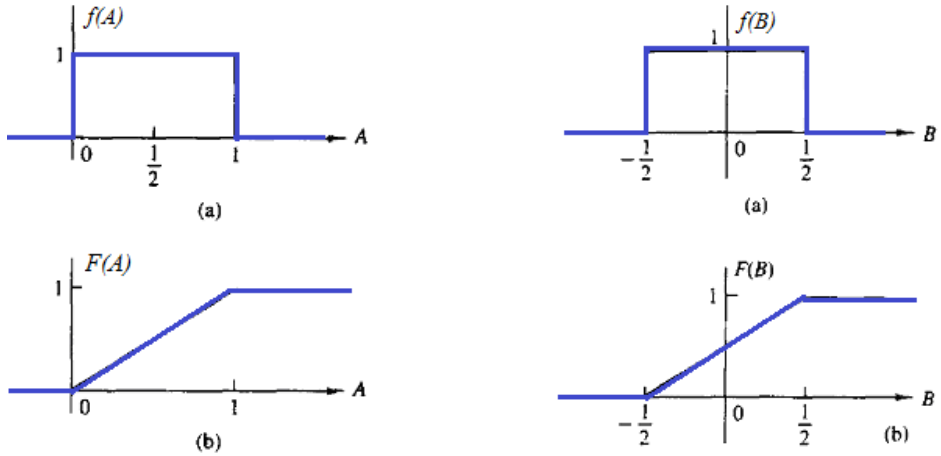


Fig. 17: Densitatea de probabilitate și funcția de repartiție a probabilității distribuției uniforme

Unul dintre algoritmii simpli este algoritmul multiplicativ congruențial bazat pe 3 parametri și o valoare inițială, x_0, numită *seed*, după relația:

$$x(k+1) = (a \cdot x(k) + c) \bmod m \qquad (76)$$

unde "*mod m*" înseamnă restul după împărțire la *m*. Se generează numere în intervalul (1, *m*-1), iar perioada este (*m*-1). Ca valori uzuale se pot folosi a =

65539, $c = 0$, si $m = 2^{31}$. Alte metode se pot găsi în referințele de specialitate *(Random papers generation,* 2010*)* sau *(Moler,* 2010*).*

Programul Matlab de generare a distribuției uniforme este prezentat în Anexa 1.

Dacă se dorește generarea unui zgomot distribuit uniform în intervalul (b,b+1), se poate adăuga la valoarea A valoarea deplasării b. Se obține astfel o valoare medie:

$$E\{B\} = E\{A + b\} = E\{A\} + b = 0.5 + b \tag{77}$$

Dacă b = -0.5, atunci variabila aleatorie B este distribuită uniform în intervalul (-0.5; 0.5). Funcțiile densitate și repartiție de probabilitate sunt prezentate în fig. 17.

1.8.2. Generarea unei distribuții oarecare

O variabilă aleatorie uniform distribuită în domeniul (0,1) poate fi utilizată la generarea variabilelor aleatorii cu alte funcții de distribuție a probabilității. De exemplu, presupunem că dorim generarea unei variabile aleatorii Y cu funcția de distribuție a probabilității $F_Y(y)$ din fig. 18.a.

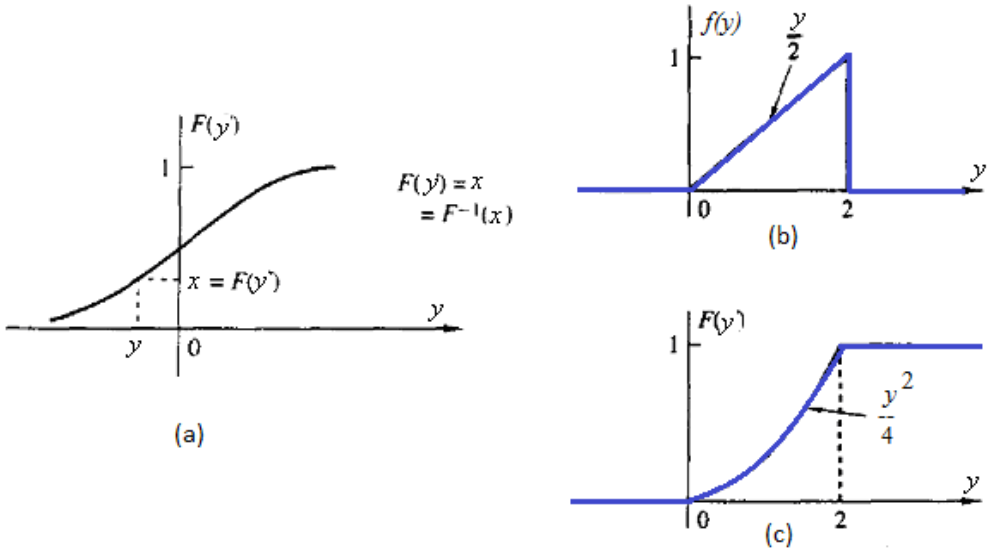


Fig. 18: Densitatea de probabilitate și funcția de repartiție

Întrucât domeniul de variație al funcției *F(X)* este intervalul (0,1), se generează mai întâi o variabilă uniform distribuită *X* în intervalul (0,1). Apoi, se impune condiția

$$F_Y(y)=X \tag{78}$$

și se obține:

$$y = F^{-1}(x) \tag{79}$$

ce constituie o nouă variabilă *Y* cu densitatea de probabilitate *F(y).*

Exemplu: Să se genereze o variabilă aleatorie *Y* cu pdf liniară ca în fig. 18.b cu expresia

$$f_Y(y)=\begin{cases} y/2, & 0 \le y \le 2 \\ 0, \textit{ altfel} \end{cases}$$

Soluție: Funcția de distribuție a probabilității variabilei *Y* este

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(x)dx=\begin{cases} 0, & y \ge 0 \\ y^2/4, & 0 < y \le 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

și este prezentată în fig. 18.c. Se generează o variabilă aleatorie uniform distribuită *X* . Condiția ca *F(y)=x* este

$$F_Y(y)=\frac{y^2}{4}=x$$

Soluția ecuației în *y* este

$$y = 2\sqrt{x}$$

și constituie ecuația de definire a valorilor v.a. *Y* în funcție de valorile variabilei aleatorii *X*, pentru intervalul (0,2].

1.8.3. Generarea distribuției gaussiene

În exemplul anterior, funcția inversă a fost simplu de calculat, ceea ce nu este cazul întotdeauna, ca în exemplul generării funcției de distribuție

gaussiene. Se prezintă o metodă de generare a două variabile aleatorii cu distribuție gaussiană, variabile independente statistic, notate cu *C* și *D*.

Funcția densitate de probabilitate a distribuției gaussiene cu medie zero și dispersie σ^2 este:

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \tag{80}$$

Funcția de repartiție a probabilității este

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(x)dx \tag{81}$$

Integrala de mai sus nu poate fi exprimată în termeni de funcții simple și, astfel, stabilirea inversei este dificilă. Una din soluții este prezentată în continuare.

Metoda face apel la o variabilă aleatorie *R* cu distribuție Rayleigh cu funcția de distribuție

$$F(r)=\begin{cases}0, & r<0\\ 1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, & r\geq 0\end{cases} \tag{82}$$

unde parametrul σ^2 are semnificație de dispersie (varianță). Considerând și o v.a. cu distribuție uniformă Θ pe intervalul $(0,2\pi)$, sunt valabile următoarele relații pentru variabilele cu distribuție gaussiană:

$$C=R\cos\Theta \tag{83}$$

$$D=R\sin\Theta \tag{84}$$

Întrucât *F(r)* este ușor de inversat obținem:

$$F(r)=1-exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)=A \tag{85}$$

și

$$R=\sqrt{2\sigma^2\, ln[1/(1-A)]} \tag{86}$$

unde *A* este uniform distribuită în intervalul (0,1). Se generează apoi o a doua variabilă aleatorie uniform distribuită *B* și se definește

$$\Theta = 2 \cdot \pi \cdot B \tag{87}$$

Se obțin astfel două variabile aleatorii gaussiene independente statistic, *C* și *D*. Aceste variabile au media zero și varianța σ^2. Dacă se dorește o variabilă gaussiană cu medie nenulă, atunci se adaugă media dorită la variabila respectivă. Pseudocodul pentru generarea unei v.a. gaussiene este atunci:

PROGRAM Generare v.a. continuă cu distribuție gaussiană, *Y*:

1: Date inițiale: *media* μ, *dispersia* σ^2, *numarul de valori N*.
2: Generează v.a. cu distribuție uniformă, *X*, în intervalul [0,1];
3: Generează v.a. cu distribuție uniformă, Θ, în intervalul [0,2π];
4: Calculează valorile v.a. cu distribuție Rayleigh:
$R = \sqrt{2\ln[1/(1-X)]}$;
5: Calculează valorile v.a. cu distribuție gaussiană în (0,1):
$Y = R \cdot cos\Theta$; și $Y = R \cdot \sin\Theta$;
6: Actualizare medie: $Y = Y + \mu$.
7: Actualizare dispersie: $Y = Y * sqrt(\sigma^2)$.

END.

Un exemplu de cod Matlab pentru generarea variabilelor aleatorii cu diverse distribuții este prezentat în Anexa 1.

Exerciții propuse:

1). Se dă semnalul aleatoriu *X(t)* caracterizat de variabila aleatorie *X* cu media $\overline{X} = E\{X\} = 2/3$ și f.d.p. $f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta \cdot x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & in \quad rest \end{cases}$. Să se calculeze parametrii α și β. Să se calculeze valoarea pătratică medie $E\{X^2\}$ și dispersia σ_X^2.

(Rezultate: $\alpha = 1/3; \beta = 2; E\{X^2\} = 0.511; \sigma_X^2 = 0.667$)

2). Dacă $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, să se demonstreze relația $P(X > \gamma) = Fc\left(\frac{\gamma - \mu}{\sigma}\right)$, unde *Fc* este funcția de distribuție cumulativă complementară a probabilității.

3). Tensiunea *X* a unui generator de zgomot este o variabilă aleatorie normală, cu media μ și dispersia σ^2. Să se calculeze probabilitatea ca tensiunea generatorului să ia valori mai mari de 1 V și probabilitatea ca să ia valori în intervalul [2.1; 2,5].

4) Tensiunea *X* a unui generator de zgomot este o variabilă aleatorie normală cu medie μ și dispersie σ^2. Să se calculeze valoarea de vârf *Vv* pentru o probabilitate *Pv*=0.1.

Concluzii

În sistemele de comunicații, semnalele utile, cele emise de emițător, sunt perturbate (afectate) de diverse surse de zgomot de pe lanțul (calea) de comunicație (transmisiune).

Sursele de zgomot își manifestă prezența prin semnale aleatorii, de natură continuă sau discretă (în amplitudine, deci ca valori).

Modelul matematic cel mai simplu pentru un semnal aleatoriu este acoperit de variabila aleatorie, în timp continuu sau discret.

Variabilele aleatorii sunt descrise de funcția de distribuție a probabilității și de funcția densitate de probabilitate. Cele două funcții nu sunt independente.

Mărimile probabilistice cele mai importante în descrierea unei variabile aleatorii sunt: media statistică μ, valoarea pătratică medie $\overline{X^2}$ și dispersia (varianța) (asociată cu puterea componentei alternative) σ^2.

Cele mai întâlnite și des folosite distribuții de probabilitate sunt: uniformă, gaussiană, Rayleigh și exponențială.

S-a discutat despre valoarea de vârf a unui semnal aleatoriu și s-au prezentat metode de calcul numeric a acesteia. Valoarea de vârf este o mărime relativă, în sensul că este asociată unei probabilități. Schimbând probabilitatea impusă se schimbă și valoarea de vârf.

S-au prezentat metode de generare a secvențelor aleatorii cu distribuție uniformă, gaussiană și oarecare. Secvența de plecare are distribuție uniformă.

Larga utilizare a distribuției gaussiene are la bază:

- existența multor fenomene fizice cu această distribuție;
- procesele ne-gaussiene se pot aproxima printr-o combinație ponderată de procese gaussiene cu medii și variațe adecvate;
- suma unor procese aleatorii independente are o distribuție gaussiană;
- forma matematică simplă, cu numai doi parametri (media și dispersia);
- orice transformare liniară a unui proces Gaussian este tot un proces Gaussian.

Mai multe detalii și formalisme superioare de analiză și reprezentare se pot găsi în referințele (*Davenport and Root, 1987*), (*Desurvire, 2006*), (*Gardner, 1989*), (*Grintead and Snell, 2000*), *(Miller and Childers, 2004)* sau (*(Mihoc și Micu, 1980*).

Capitolul 2 – Procese aleatorii

Cuprins

Procese aleatorii. Introducere
Descrierea procelor aleatorii continue
Valori medii statistice
Valori medii temporale
Staționaritatea proceselor aleatorii
Staționaritate în sens strict (SSS)
Staționaritate în sens larg (SSL)
Corelația proceselor aleatorii în sens larg
Aplicații:
Estimarea timpului de întârziere a unui canal
Estimarea funcției pondere a unui canal
Densitatea spectrală de putere a proceselor aleatorii SSL
Proprietățile funcției densitate spectrală de putere
Ergodicitatea proceselor aleatorii
Clasificarea proceselor aleatorii după banda de frecvență ocupată
Calculul puterii într-o bandă de frecvență
Calculul benzii efective și a benzii medii pătratice
Descrierea perturbațiilor de bandă largă
Descrierea perturbațiilor de bandă îngustă
Procesele aleatorii discrete în timp (secvențe aleatorii)
Calculul mediilor temporale ale unei secvențe aleatorii
Funcția de autocorelație a secvențelor binare aleatorii
Densitatea spectrală de putere a secvențelor binare aleatorii
Secvențe binare pseudo-aleatorii periodice
Expresii practice pentru estimarea momentelor secvențelor aleatorii
Concluzii

2.1. Procese aleatorii. Introducere

Modelul probabilistic general utilizat pentru caracterizarea semnalului aleatoriu din sistemele de transmisiune a informației este numit proces aleatoriu, întâlnit și sub numele de proces stochastic sau serie de timp.

Se va utiliza procesul aleatoriu ca un model pentru caracterizarea unei mulțimi de semnale, așa cum se prezintă în fig. 1. Din punct de vedere matematic, un proces aleatoriu este o funcție de două variabile:

$$X(k,t) = X^{(k)}(t) : T \to V, \quad k = 1,2,...N \tag{88}$$

unde *k* ia valori în spațiul eșantioanelor (al realizărilor) și $t \in T$ ia valori pe axa reală a timpului. Atât *T*, cât și *V* pot fi intervale continue sau mulțimi de elemente. Pentru orice valoare particulară a timpului $t = t_1$, $X(k,t_1) = X^{(k)}(t_1)$ este o variabilă aleatorie definită pe mulțimea numerelor *k*, așa cum se sugerează în fig. 1. $X^{(k)}(t)$ se numește o realizare particulară, realizarea *k*, a procesului *X(t)* sau o reprezentare a procesului *X(t).*

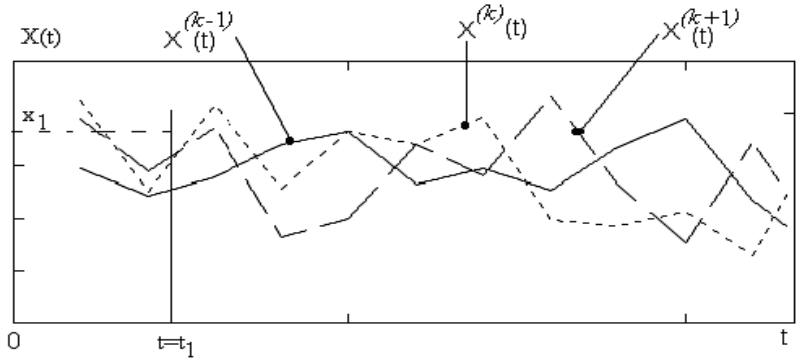


Fig. 1: Realizări ale procesului aleatoriu *X(t)*, $X(k,t)=X^{(k)}(t)$. Reprezentare 1D

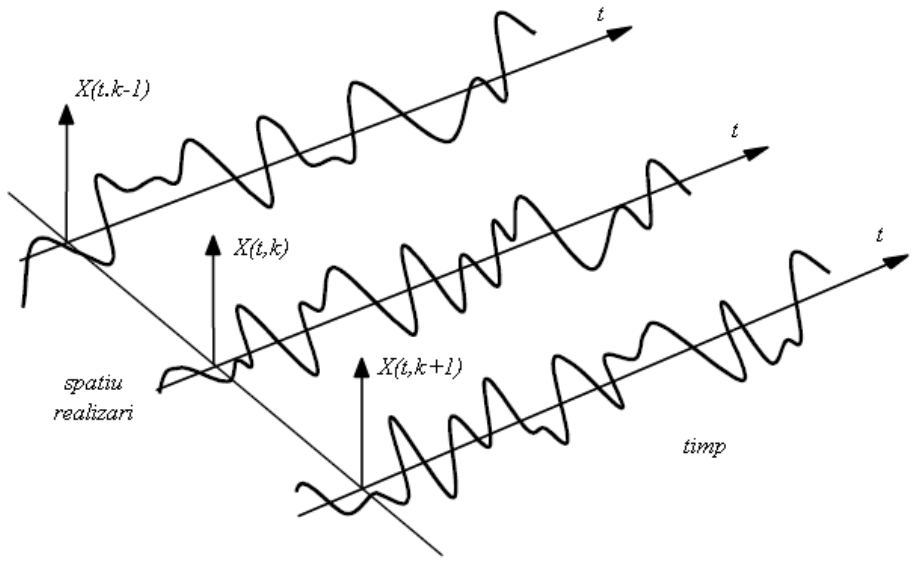


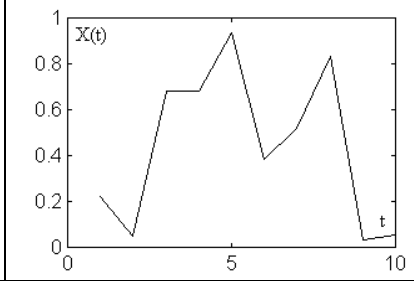
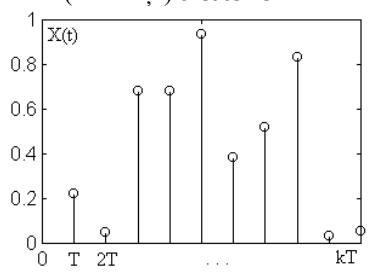
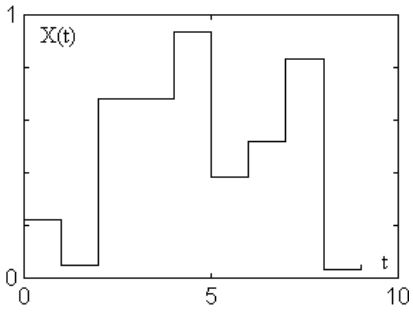
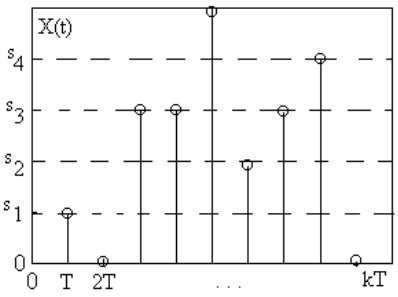
Fig. 2: Realizări ale procesului aleatoriu *X(t)*, $X(k,t)=X^{(k)}(t)$; Reprezentare 2D

Realizările particulare pot fi definite pentru momente de timp discrete t_1, t_2, ..., t_n, caz în care se numesc serii (secvențe) aleatorii de timp sau serii (secvențe) aleatorii, sau pentru o mulțime continuă de valori ale lui *t*, caz în care se numește proces aleatoriu. Denumirile de "*continuu*" sau "*discret*" se referă la natura valorilor amplitudinilor lui *X(t)*, în timp ce "*proces*" sau "*secvență*" sunt utilizate pentru a specifica timpul continuu sau discret.

Pentru un moment dat de timp $t=t_1$, prin măsurarea valorilor tuturor realizărilor particulare 1,2,...,*n*, se obține o mulțime de eșantioane $\{x_i, i=1,2,..,n\}$. Această mulțime constituie valorile variabilei aleatorii notată cu $X(t_1)$.

Procesele aleatorii se notează cu litere romane majuscule sau cu litere grecești minuscule. Valorile variabilelor aleatorii se notează cu litere mici.

Tabel 1 - Clasificarea proceselor aleatorii după codomeniul variabilelor *x* și *t*

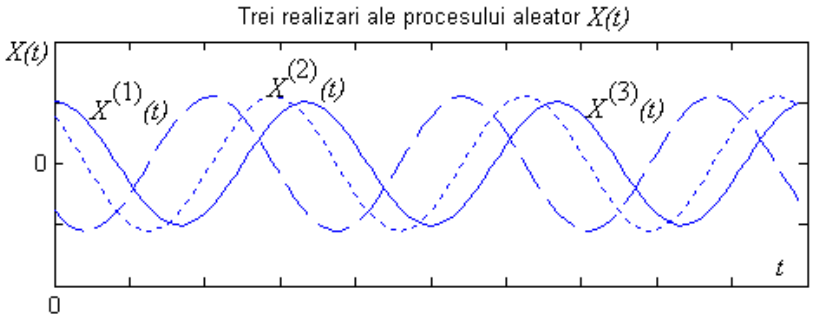
X(t) \ *t*	Continuu	Discret
Continuă	Proces aleatoriu continuu 	Serie (secvență) aleatorie continuă 
Discretă	Proces aleatoriu discret 	Serie (secvență) aleatorie discretă 

Exemplul 1: Un exemplu[8] din telecomunicații este de forma următoare: zgomotul de pe fiecare linie telefonică variază în timp și poate fi notat cu $X^{(k)}(t)$, unde *t* este variabila timp și *k* indică numărul liniei. Colecția

[8] Din (Vaseghi, 2000).

(mulțimea) de zgomote de pe diferite linii $k = 1,2,\ldots, N$ formează ansamblul (sau spațiul) procesului zgomot, notat cu $X(t) = \{X^{(k)}(t), k = 1,2,\ldots\}$.

Exemplul 2: Fie procesul aleatoriu $X(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \Theta)$, unde Θ este o variabilă aleatorie cu distribuție uniformă în intervalul $(0,2\pi)$. În figura următoare se prezintă trei realizări ale procesului aleatoriu *X(t)*, acestea corespunzând valorilor 0, π/4 și 3π/4 ale fazei inițiale.



Funcții eșantion (realizări) ale procesului aleatoriu *X(t)*

2.2. Descrierea proceselor aleatorii continue

Pentru orice moment de timp $t = t_1$ fixat, procesul aleatoriu devine o variabilă aleatorie. Ca urmare, procesul aleatoriu poate fi descris prin funcția de repartiție (distribuție) a probabilității de ordinul întâi :

$$F_1(x;t_1) = P(X(t_1) \le x_1) \qquad (89),$$

iar densitatea de probabilitate se definește ca derivata parțială a funcției de distribuție în raport cu x:

$$f_1(x;t_1) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(x;t_1) \qquad (90)$$

Produsul $f_1(x_1,t_1) \cdot dx_1$ este probabilitatea ca procesul aleatoriu *X(t)* să treacă – la momentul de timp t_1 - prin vecinătatea dx_1 a ordonatei x_1, ca în fig. 3. Reprezentarea grafică sau expresia analitică a densității de probabilitate $f_1(x_1,t_1)$ se numește lege de repartiție de ordinul întâi.

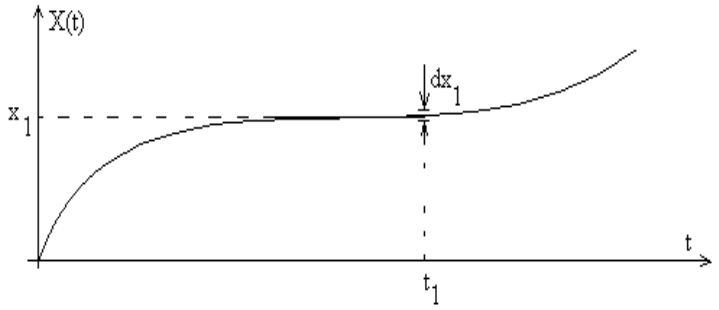


Fig. 3: Interpretarea produsului $f_1(x_1,t_1)\cdot dx_1$

O funcție densitate de probabilitate bidimensională

$$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)=f_2(x_1,x_2;t_1,t_2) \tag{91}$$

descrie probabilitatea ca eșantioanele procesului la momentele de timp t_1 și t_2 să ia valorile x_1 și, respectiv, x_2, după relația:

$$\begin{aligned} &f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2 = dF_2(x_1;x_2;t_1,t_2)= \\ &F_2(x_1+dx_1;x_2+dx_2;t_1,t_2)-F_2(x_1;x_2;t_1,t_2)= \\ &P(x_1\le X(t_1)\le x_1+dx_1;x_2\le X(t_2)\le x_2+dx_2) \end{aligned} \tag{92}$$

Generalizare: Din densitatea de probabilitate de ordinul întâi se poate deduce numai probabilitatea ca procesul aleatoriu să treacă printr-o vecinătate, la orice moment de timp *t*. Nu se specifică nimic despre modul de desfășurare în timp a procesului aleatoriu. În acest sens, pentru a cunoaște mai bine procesul aleatoriu, se definesc funcții de repartiție și functii densitate de probabilitate de ordin superior.

Funcția de repartiție de ordinul *n* se definește similar cu relația (3), dar pentru mai multe numere reale: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corespunzătoare momentelor de timp $t_1, t_2, \ldots, t_n$ după relația:

$$F_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=P(X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\ldots,X(t_n)\le x_n) \tag{93}$$

Densitatea de probabilitate de ordinul *n* este:

$$f_n(x_1,...,x_n;t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}F_n(x_1,x_2,...,x_n;t_1,...,t_n) \quad (94)$$

Astfel, cantitatea

$$f_n(x_1,x_2,...,x_n;t_1,t_2,...,t_n)dx_1dx_2,...,dx_n \quad (95)$$

reprezintă probabilitatea ca procesul aleatoriu *X(t)* să treacă la momentul t_1 prin vecinătatea dx_1 a ordonatei x_1, la momentul t_2 să treacă prin vecinătatea dx_2 a lui x_2, ș.a.m.d., ca în fig. 4. Evident, cu cât ordinul *n* este mai mare, cu atât procesul aleatoriu este descris mai bine.

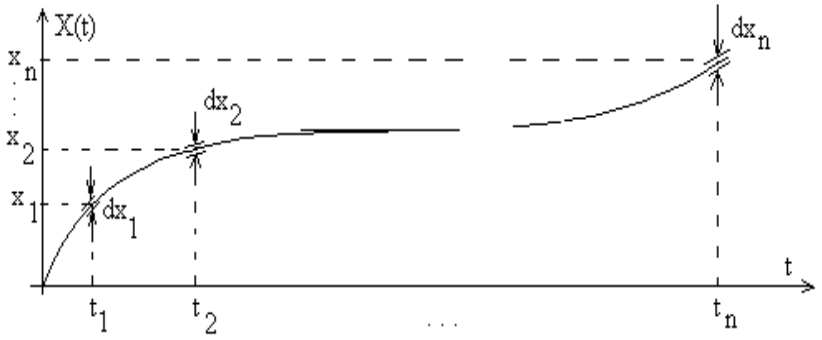


Fig. 4: Interpretarea funcției densitate de probabilitate de ordinul *n*

Valori medii ale proceselor aleatorii continue

Cunoașterea proceselor aleatorii presupune folosirea unor modele (probabilistice) matematice cu anumiți parametri. Cei mai folosiți parametri se referă la momente (medii) statistice de diferite ordine cum sunt media, varianța, corelația și spectrul de putere. Mediile de diferite ordine se mai numesc valori *așteptate* [9].

Valorile medii de diferite ordine pot fi calculate fie pe mulțimea realizărilor particulare disponibile la momentele de timp alese arbitrar $t_1, t_2, \ldots, t_n$, fie dintr-o singură realizare particulară $X^{(k)}(t)$. În primul caz se spune că se obțin valori medii statistice (sau medii pe mulțimi), iar în al doilea caz, valori medii temporale.

Ca definiție generală, valoarea medie a unei funcții $h(X(t_1), X(t_2),..., X(t_M))$ a unui proces aleatoriu *X* se definește cu

[9] (*expected value*, în engleză)

$$E\{h(X(t_1),X(t_2),...,X(t_M))\} =$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}}_{de\ \ M\ \ ori} h(x_1,x_2,...,x_M)) \cdot f_M(x_1,x_2,...,x_M;t_1,t_2,...,t_M)dx_1dx_2...dx_M \qquad (96)$$

În cele mai multe aplicații interesează sau sunt suficiente numai valorile medii rezultate din funcțiile de repartiție de ordinele unu și doi.

2.2.1 Valori medii statistice (medii pe mulțimi)

Fie un proces aleatoriu pentru care se cunoaște mulțimea realizărilor posibile *X(t)* la diferite momente de timp $t_1, t_2, \ldots, t_n$, arbitrar alese. Valorile medii statistice care reprezintă interes în aplicații sunt:

1. Media procesului aleatoriu *X(t)* este:

$$\mu_X(t) \overset{def}{=} E\{X(t)\} = \overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x,t)dx \qquad (97)$$

și este media tuturor valorilor realizărilor procesului *X(t)* la momentul de timp *t*.

2. Valoarea pătratică medie:

$$\overline{X^2(t)} \overset{def}{=} E\{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x,t)dx \qquad (98)$$

3. Autocorelația lui *X(t),* notată[10] prin $R_{XX}(t_1,t_2)$, este valoarea medie a produsului $X(t_1) \cdot X^*(t_2)$:

$$R_{XX}(t_1,t_2) \overset{def}{=} \overline{X(t_1) \cdot X^*(t_2)} = E\{X(t_1) \cdot X^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f(x_1,x_2;t_1,t_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \qquad (99)$$

[10] Se mai folosește notația $B_{XX}(t_1,t_2)$

unde * arată conjugarea. Autocorelația este o măsură a similarității valorilor procesului aleatoriu.

4. Funcția de intercorelație a două procese *X(t)* și *Y(t):*

$$R_{XY}(t_1,t_2) \overset{def}{=} \overline{X(t_1)\cdot Y^*(t_2)} = E\{X(t_1)\cdot Y^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot y\cdot f(x,y;t_1,t_2)\cdot dxdy \tag{100}$$

5. Dispersia (varianța) procesului aleatoriu:

$$\sigma^2(t) \overset{def}{=} E\left\{\left[X(t)-\mu_X(t)\right]^2\right\} = \overline{\left[X(t)-\overline{X(t)}\right]^2} = E\{X^2(t)-2X(t)\cdot\mu_X(t)+\mu_X^2(t)\} = \tag{101}$$
$$= E\{X^2(t)\}-2E\{2X(t)\cdot\mu_X(t)\}+E\{\mu_X^2(t)\} = X^2(t)-\mu_X^2(t)$$

Rădăcina pătrată din dispersie se numește *deviație standard*. Dispersia este o măsură a împrăștierii valorilor semnalului aleatoriu.

6. Funcții de covarianță:
6.1. Autocovarianța lui *X(t)* este definită prin:

$$K_{XX}(t_1,t_2) \overset{def}{=} E\left\{\left[X(t_1)-\mu_X(t_1)\right]\cdot\left[X(t_2)-\mu_X(t_2)\right]^*\right\} \tag{102}$$

Prin prelucrări algebrice simple se obține

$$K_{XX}(t_1,t_2) = E\left\{\left[X(t_1)-\mu(t_1)\right]\cdot\left[X(t_2)-\mu(t_2)\right]^*\right\} = \tag{103}$$
$$E\{X(t_1)\cdot X(t_2)^*\}-E\{X(t_1)\cdot\mu(t_2)^*\}-$$
$$E\{\mu(t_1)\cdot X(t_2)^*\}+E\{\mu(t_1)\cdot\mu(t_2)^*\} =$$
$$R_{XX}(t_1,t_2)-E\{X(t_1)\}\cdot\mu(t_2)^*-\mu(t_1)\cdot E\{X(t_2)^*\}+$$
$$\mu(t_1)\cdot\mu(t_2)^* =$$
$$R_{XX}(t_1,t_2)-\mu(t_1)\cdot\mu(t_2)^*-\mu(t_1)\cdot\mu(t_2)^*+\mu(t_1)\cdot\mu(t_2)^* =$$
$$= R_{XX}(t_1,t_2)-\mu(t_1)\cdot\mu(t_2)^*$$

Autocovarianța este o măsură a dispersiei (împrăștierii) valorilor procesului aleatoriu în comparație cu valoarea medie.

Pentru procesele cu medie zero, funcțiile de autocorelație și autocovarianță sunt identice:

$$K_{XX}(t_1,t_2) = R_{XX}(t_1,t_2) \tag{104}$$

Funcția de autocovarianță evaluată la momente egale de timp este egală cu dispersia (varianța) procesului:

$$\begin{aligned} K_{XX}(t_1,t_1) &= R_{XX}(t_1,t_1) - \mu_X(t_1)\cdot\mu_X(t_1)^* = \\ &= \sigma_X^2(t_1) + \mu_X^2(t_1) - \mu_X^2(t_1) = \sigma_X^2(t_1) \end{aligned} \tag{105}$$

6.2.Intercovarianța a două procese aleatorii *X(t)* și *Y(t):*

$$\begin{aligned} K_{XY}(t_1,t_2) &\overset{def}{=} E\left\{\left[X(t_1)-\mu_X(t_1)\right]\cdot\left[Y(t_2)-\mu_Y(t_2)\right]^*\right\} = \\ &R_{XY}(t_1,t_2) - \mu_X(t_1)\cdot\mu_Y^*(t_2) \end{aligned} \tag{106}$$

Pentru procese cu medie zero, funcțiile de intercorelație sunt egale cu cele de intercovarianță.

7. Coeficientul de corelație

$$\rho_{XX}(t_1,t_2) \overset{def}{=} \frac{K_{XX}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_{XX}(t_1,t_1)\cdot K_{XX}(t_2,t_2)}} \tag{107}$$

8. Coeficientul de intercorelație:

$$\rho_{XY}(t_1,t_2) \overset{def}{=} \frac{K_{XY}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_{XX}(t_1,t_1)\cdot K_{YY}(t_2,t_2)}} \tag{108}$$

Funcția de autocorelație și funcția de autocovarianță sunt momente de ordinul doi și descriu parțial comportarea procesului aleatoriu în domeniul timp.

Pentru secvențe aleatorii se obțin expresii asemănătoare cu cele definite mai sus, argumentul discret k înlocuind variabila continuă t, k_1 și k_2 înlocuind t_1 și t_2. Cele patru funcții devin funcții discrete în timp[11].

Definiția 1: Două procese aleatorii sunt egale dacă realizările lor sunt identice pentru orice valoare a variabilei t. Egalitatea implică că procesele sunt definite în același experiment.

Definiția 2: Două procese $X(t)$ și $Y(t)$ sunt necorelate în intervalul de timp $I \subset \Re$, dacă funcția de intercovarianță este zero:

$$K_{XY}(t_1,t_2)=0,\forall t_1,t_2 \in I \subset \Re \tag{109}$$

Definiția 3: Procesele aleatorii $X(t)$ și $Y(t)$ sunt ortogonale pe intervalul $I \subset \Re$, dacă funcția de intercorelație este zero pe acest interval:

$$R_{XY}(t_1,t_2)=0,\forall t_1,t_2 \in I \subset \Re \tag{110}$$

Definiția 4: Procesele aleatorii $X(t)$ și $Y(t)$ sunt statistic independente pe intervalul I dacă:

$$\begin{aligned} &P\left[X(t_1)\le x_1,...,X(t_n)\le x_n;Y(t'_1)\le y_1,...,Y(t'_m)\le y_m\right]= \\ &=P\left[X(t_1)\le x_1,...,X(t_n)\le x_n\right]\cdot P\left[Y(t'_1)\le y_1,...,Y(t'_m\le y_m\right] \\ &\forall n,m \quad \text{si} \quad t_1,t_2,...,t_n,t'_1,t'_2,\dots,t'_m \in I \end{aligned} \tag{111}$$

Proprietate P1: Funcția de intercorelație a două procese aleatorii statistic independente, cu medie zero, este zero.

Proprietate P2: Funcția de intercovarianță a două procese aleatorii statistic independente este zero, chiar dacă mediile nu sunt zero.

Proprietatea P3: Independența implică necorelarea dar nu și invers.

Exercițiu: Un semnal aleatoriu are realizări particulare de forma $X(t)=A\cos(100\cdot t+\theta)$, unde A este o variabilă aleatorie normală cu valoarea medie zero și varianța 1, iar θ este o variabilă aleatorie uniform distribuită în intervalul $[-\pi, \pi]$. Presupunând că cele două variabile aleatorii,

[11] Varianta discretă va fi studiată într-o secțiune separată, dedicată.

A și θ, sunt statistic independente, să se calculeze valoarea medie statistică și funcția de autocorelație statistică. *(Shanmungan, 1988)*

Soluție: Media statistică este

$$\overline{X(t)} = \mu_X = E\{X(t)\} = E\{A\cos(100t+\theta)\} = E\{A\}\cdot E\{\cos(100t+\theta)\} = \\ = 0\cdot E\{\cos(100t+\theta)\} = 0$$

Funcția de autocorelație statistică este*

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{X(t)X(t+\tau)\} = \\ = E\{A\cos(100t+\theta)\cdot A\cos(100t+100\tau+\theta)\} = \\ E\left\{A^2\cdot\frac{1}{2}[\cos(200t+100\tau+\theta)+\cos(100\tau)]\right\} = \\ = \frac{1}{2}E\{A^2\}\cdot[E\{\cos(200t+100\tau+\theta)\}+E\{\cos(100\tau)\}] = \\ \frac{1}{2}\cdot 1\cdot[0+\cos(100\tau)] = \frac{\cos(100\tau)}{2}$$

S-a folosit, în ultima relație, faptul că varianța variabilei aleatorii *A* este 1, deci $E\{A^2\}=1$.

Exercițiu [12]: Fie *I(t)* și *Q(t)* două procese aleatorii definite prin

$$I(t) = X\cdot\cos\omega t + Y\cdot\sin\omega t$$
$$Q(t) = Y\cdot\cos\omega t - X\cdot\sin\omega t$$

unde *X* și *Y* sunt variabile aleatorii necorelate și cu medie zero. Se cunosc valorile mediilor pătratice $\overline{X^2} = \overline{Y^2} = \sigma^2$.

Să se calculeze funcția de intercorelație dintre *I(t)* și *Q(t).*

* $\cos\alpha\cdot\cos\beta = [\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]/2$

[12] Din (*Barkat, 2005*) pag. 152.

Soluție [13]:

$$R_{IQ}(t_1,t_2) = E\{I(t_1)Q(t_1+\tau)\} = E\{I(t)Q(t+\tau)\} =$$
$$= E\{(X\cdot\cos\omega t + Y\cdot\sin\omega\cdot t)(Y\cdot\cos\omega(t+\tau) - X\cdot\sin\omega(t+\tau))\} =$$
$$= E\begin{Bmatrix} XY\cos\omega t\cdot\cos\omega(t+\tau) - XX\cos\omega t\cdot\cdot\sin\omega(t+\tau) - \\ XX\cdot\cos\omega t\cdot\sin\omega(t+\tau) + YY\cdot\sin\omega t\cdot\cos\omega(t+\tau)) \end{Bmatrix} =$$
$$= E\{YY\cdot\sin\omega t\cdot\cos\omega(t+\tau) - XX\cos\omega t\cdot\sin\omega(t+\tau)\} =$$
$$= \sigma^2\cdot E\{\sin\omega t\cos\omega(t+\tau) - \cos\omega t\cdot\sin\omega(t+\tau)\} =$$
$$= \sigma^2\cdot E\{\sin(\omega t - \omega t - \omega\tau)\} = -\sigma^2\cdot\sin(\omega\tau)$$

2.2.2. Valori medii temporale

Fie, din mulțimea tuturor realizărilor posibile ale procesului aleatoriu *X(t)*, realizarea *k*, notată cu $X^{(k)}(t)$. Momentele de diferite ordine ale procesului *X(t)* se obțin din momentele corespunzătoare realizării $X^{(k)}(t)$ pe o fereastră de observație de durata *T*, prin trecere la limită. Se va nota $X(t) = X^{(k)}(t)$.

1. Media temporală a procesului aleatoriu *X(t)* este:

$$\tilde{\tilde{\tilde{X}}}(t) = <\mu_X>_T = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T X(t)\cdot dt \qquad (112)$$

și reprezintă, din punct de vedere fizic, componenta continuă a semnalului. Valoarea medie nu depinde de originea timpului.

2. Valoarea patratică medie temporală:

$$\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{[X(t)]^2}}}}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T [X(t)]^2 dt \qquad (113)$$

reprezintă, din punct de vedere fizic, puterea medie a semnalului aleatoriu pe o rezistență unitară și nu depinde de originea timpului.

[13] $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

3. Dispersia temporală este egală cu diferența dintre valoarea patratică medie și pătratul mediei:

$$\sigma^2 = \overset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{[X(t)]^2} - \left[\overset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{[X(t)]}\right]^2 \qquad (114)$$

4. Funcția de autocorelație temporală

$$R_{XX}(t_1,t_2) = \overset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{X(t+t_1)\cdot X(t+t_2)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T X(t+t_1)X(t+t_2)dt \qquad (115)$$

nu depinde de originea timpului, ci numai de diferența $\tau = t_2 - t_1$.

$$R_{XX}(\tau) = \overset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{X(t)\cdot X(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T X(t)X(t+\tau)dt \qquad (116)$$

5. Funcția de intercorelație temporală

$$R_{XY}(t_1,t_2) = \overset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{X(t+t_1)\cdot Y(t+t_2)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T X(t+t_1)\cdot Y(t+t_2)dt \qquad (117)$$

nu depinde de originea timpului, ci numai de diferența $\tau = t_2 - t_1$.

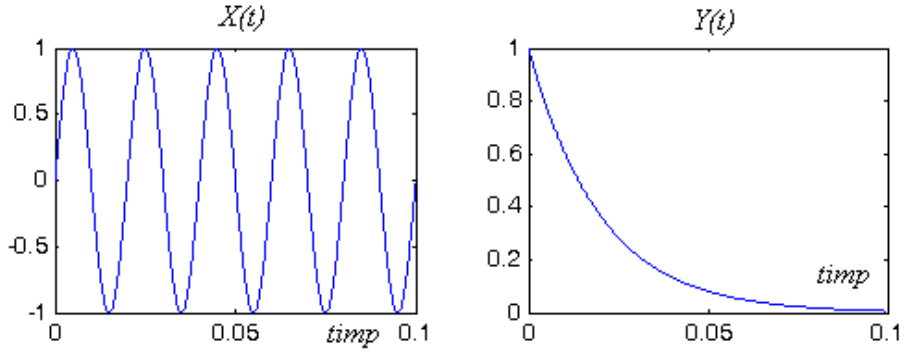
$$R_{XY}(\tau) = \overset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{X(t)\cdot Y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T X(t)\cdot Y(t+\tau)dt \qquad (118)$$

6. Funcția de intercovarianță

$$\begin{aligned} C_{XY}(\tau) &= \overset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left[X(t) - \overset{\sim\sim\sim\sim\sim}{X(t)}\right]\cdot\left[Y(t+\tau) - \overset{\sim\sim\sim\sim\sim}{Y(t+\tau)}\right]} = \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T\left[X(t) - \overset{\sim\sim\sim\sim\sim}{X(t)}\right]\cdot\left[Y(t+\tau) - \overset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{Y(t+\tau)}\right]dt \end{aligned} \qquad (119)$$

nu depinde de originea timpului, ci numai de diferența $\tau = t_2 - t_1$.

Exemplu: Fie două semnale, unul periodic și celălalt tranzitoriu (aperiodic): (a) $X(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$; (b) $Y(t) = Ae^{-\alpha \cdot t}$, $\alpha = 25$, definite pe un interval de timp T = 0.1 s. Să se calculeze media, valoarea pătratică medie (puterea totală) și disperia (puterea componentei alternative).



Reprezentarea grafică a semnalelor *X(t)* si *Y(t)*

Soluție: Pentru semnalului sinusoidal pe o perioada [14] T a semnalului *X(t)* se obține [15]:

$$\mu_X(t) = < X(t) > = \frac{1}{T}\int_T X(t)dt = \frac{A}{T}\int_T sin(\omega \cdot t)dt = 0$$

$$< X^2(t) > = \frac{1}{T}\int_T X(t)^2 dt = \frac{A^2}{T}\int_T sin^2(\omega \cdot t)dt = \frac{A^2}{2T}\int_T [1 - cos(2\omega \cdot t)]dt = \frac{A^2}{2}$$

$$\sigma_X^2(t) = < X^2(t) > - \mu_X^2(t) = \frac{A^2}{2} - 0 = \frac{A^2}{2}$$

Pentru cazul semnalului tranzitoriu, obținem:

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} Y(t)dt = \frac{A}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\alpha \cdot t}dt = \frac{A}{T}\frac{1}{(-\alpha)}e^{-\alpha \cdot t}\Big|_{t_0}^{t_0+T} =$$

$$= \frac{A}{\alpha \cdot T}\left(e^{-\alpha \cdot t_0} - e^{-\alpha(t_0+T)}\right) = e^{-\alpha \cdot t_0} \cdot \frac{A}{\alpha \cdot T} \cdot \left(1 - e^{-\alpha \cdot T}\right)$$

[14] Pentru semnale periodice în timp, mărimile statistice se calculează pe durata unei perioade.

[15] $sin^2 x = 1 - cos 2x/2$

$$< Y^2(t) >= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} Y(t)^2 dt = \frac{A^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} e^{-2\alpha \cdot t} dt =$$

$$e^{-2\alpha \cdot t_0} \cdot \frac{A^2}{2\alpha \cdot T} \cdot \left(1 - e^{-2\alpha \cdot T}\right)$$

$$\sigma_Y^2(t) = < Y^2(t) > - < Y(t) >$$

Toate mărimile depind de timp, atât de originea t_0, cât și de durata ferestrei de observare, T. Considerând $t_0 = 0$, $\alpha = 25$ și $T = 0.1$ se obține

$$\mu_Y(t) = \frac{1}{25 \cdot 0.1} \cdot \left(1 - e^{-25 \cdot 0.1}\right) = 0.3672 \quad \text{V}$$

$$< Y^2(t) >= \frac{1}{2 \cdot 25 \cdot 0.1} \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot 25 \cdot 0.1}\right) = 0.1987 \quad \text{W}$$

$$\sigma_Y^2(t) = < Y^2(t) > - < Y(t) >^2 = 0.1987 - 0.3672^2 = 0.0639 \quad \text{W}$$

Exercițiu propus: Fie procesul aleatoriu $X(t) = A \cdot \exp(j(\omega t + \Theta))$, unde A este o variabilă aleatorie cu funcția densitate de probabilitate $f_A(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \geq 0$. Parametrul σ^2 este o constantă și Θ este o variabilă aleatorie uniform distribuită pe intervalul $(0, 2\pi)$. A și Θ sunt independente statistic. Să se calculeze mediile statistice: (a) $E\{X(t)\}$; b) $R_{XX}(t_1, t_2)$.

2.3. Staționaritatea proceselor aleatorii

Sistemele invariante în timp și analiza de regim staționar sunt termeni des folosiți de specialiștii din domeniul ingineriei electrice, în general. Staționaritatea joacă un rol similar în descrierea proceselor aleatorii și descrie invarianța în timp a anumitor proprietăți statistice ale procesului aleatoriu.

Deși valorile unui proces aleatoriu variază în timp, caracteristicile procesului care a generat semnalul pot fi invariante în timp (staționare) sau variabile în timp (ne-staționare).

Un exemplu de proces ne-staționar este vorbirea, a cărei tărie (intensitate) și compoziție spectrală se schimbă în continuu, pe măsura ce vorbitorul generează diverse sunete.

Un proces este staționar dacă parametrii modelului procesului sunt invarianți în timp. Altfel, procesul este nestaționar (așa cum se vede în fig. 5). Ambele proprietăți, staționaritate și nestaționaritate, sunt relative, în sensul că un semnal nestaționar pe un interval mare de timp poate fi staționar pe intervale mai mici de timp, așa cum se observa în fig. 5, unde – pentru semnalul de jos care este nestaționar - se pot evidenția porțiuni în care semnalul este staționar.

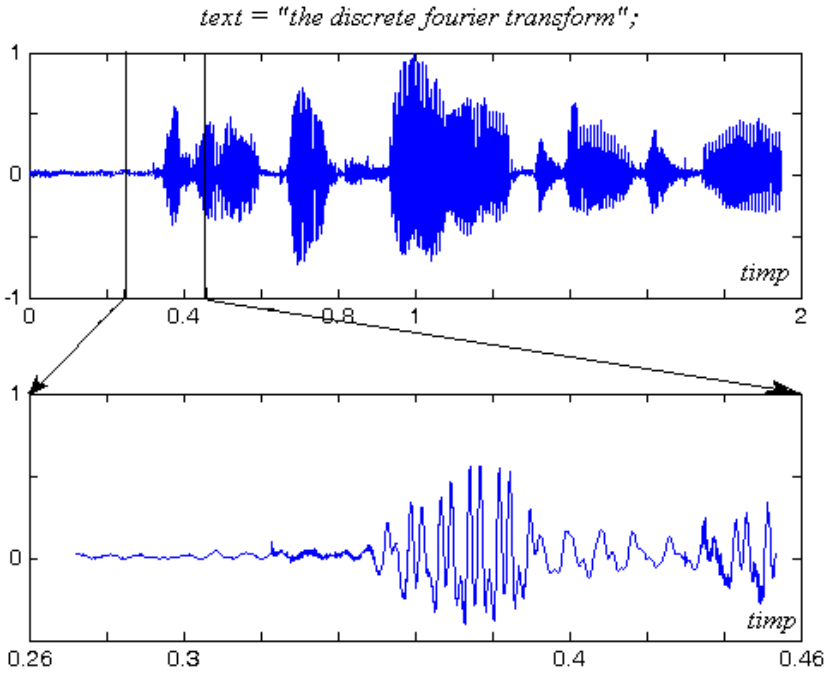
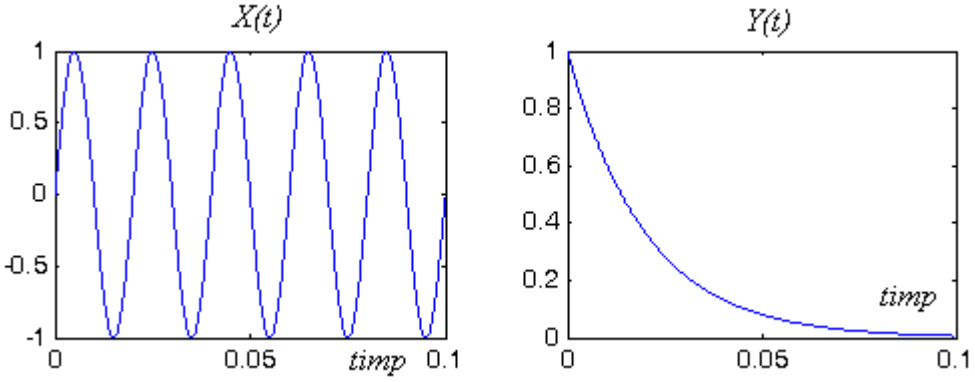


Fig. 5: Exemplu de cvasi-staționaritate și de ne-staționaritate a unui segment de vorbire

Proprietatea de staționaritate implică că mărimile statistice (cum sunt media, varianța, corelația, densitatea spectrală de putere, precum și momentele de ordin superior) să fie invariante în timp. În practică, se folosesc mai multe tipuri de staționaritate, după cum una sau mai multe mărimi statistice se modifică sau nu în timp. De exemplu, un proces aleatoriu poate să aibă media constantă în timp dar să aibă putere variabilă, deci dispersie variabilă în timp.

Exemplu: Considerăm pentru calcul valorile medii temporale și dorim să evaluăm staționaritatea mediei și a puterii (totale) pentru semnalele: (a) $X(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$; (b) un semnal tranzitoriu $Y(t) = Ae^{-\alpha \cdot t}$, $\alpha = 25$, pe un interval de timp T = 0.1 s.



Reprezentarea grafică a semnalelor *X(t)* si *Y(t)*

Soluție: Media și puterea totală a semnalului sinusoidal pe o perioadă[16] T a semnalului *X(t)* sunt[17] constante în raport cu timpul:

$$\mu_X(t) = < X(t) > = \frac{1}{T}\int_T X(t)dt = \frac{A}{T}\int_T sin(\omega \cdot t)dt = 0 = ct.$$

$$E\{X^2(t)\} = \frac{1}{T}\int_T X(t)^2 dt = \frac{A^2}{T}\int_T sin^2(\omega \cdot t)dt = \frac{A^2}{2T}\int_T [1 - cos(2\omega \cdot t)]dt =$$

$$= \frac{A^2}{2} = ct.$$

deci semnalul *X(t)* are media și puterea staționare. Pentru cazul semnalului tranzitoriu, media și puterea sunt:

$$\mu_Y(t) = < Y(t) > = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} Y(t)dt = \frac{A}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\alpha \cdot t}dt = \frac{A}{T}\frac{1}{(-\alpha)}e^{-\alpha \cdot t}\Big|_{t_0}^{t_0+T} =$$

$$\frac{A}{\alpha \cdot T}\left(e^{-\alpha \cdot t_0} - e^{-\alpha(t_0+T)}\right) = e^{-\alpha \cdot t}0 \cdot \frac{A}{\alpha \cdot T} \cdot \left(1 - e^{-\alpha \cdot T}\right)$$

[16] Pentru semnale periodice în timp, mărimile statistice se calculează pe durata unei perioade.

[17] $sin^2 x = 1 - cos\, 2x/2$

$$E\{X^2(t)=\} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} Y(t)^2\,dt = \frac{A^2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} e^{-2\alpha\cdot t}dt =$$

$$e^{-2\alpha\cdot t_0}\cdot\frac{A}{2\alpha\cdot T}\cdot\left(1-e^{-2\alpha\cdot T}\right)$$

Ambele mărimi depind de timp, atât de originea t_0, cât și de durata ferestrei de observare, T. Rezultă ca semnalul $Y(t)$ este nestaționar în timp.
Un proces nu depinde de originea timpului (parametrul t_0) dacă funcția de probabilitate (de distribuție sau de densitate) nu depinde de t_0. În mod echivalent, o translație a axei timpului nu modifică valorile medii statistice.

2.3.1. Staționaritate în sens strict (SSS)

Definiție: Un proces aleatoriu este staționar în timp sau staționar în sens strict (SSS) dacă toate funcțiile de distribuție ce descriu procesul sunt invariante (nu se modifică) la o translație a axei timpului.
După definiție, pentru toate valorile $t_1, t_2, \ldots, t_k, t_1+\tau, t_2+\tau, \ldots, t_k+\tau$ și k=1,2,…, avem relația:

$$\begin{aligned} &P\left[X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2, \ldots, X(t_k)\le x_k\right] = \\ &= P\left[X(t_1+\tau)\le x_1, X(t_2+\tau)\le x_2, \ldots, X(t_k+\tau)\le x_k\right] \end{aligned} \qquad (120)$$

Dacă definiția de mai sus este valabilă pentru toate valorile lui k=1,…,N, dar nu în mod necesar și pentru $k>N$, se spune că avem un proces staționar de ordin N. Din ultima ecuație rezultă că pentru un proces staționar în sens strict avem:

$$P\left[X(t)\le x\right] = P\left[X(t+\tau)\le x\right], \quad \forall\,\tau \qquad (121)$$

și, pentru $\tau = -t$, avem

$$P\left[X(t+\tau)\le x\right] = P\left[X(0)\le x\right], \quad \forall\,\tau \qquad (122)$$

Deci Funcția de repartiție de ordinul întâi este independentă de variabila timp t. (nu apare variabila t în ultima expresie).

În mod similar, este valabilă relația:

$$P\left[X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2\right] = P\left[X(t_1+\tau)\le x_1, X(t_2+\tau)\le x_2\right] = \\ = P\left[X(0)\le x_1, X(t_2-t_1)\le x_2\right],\ \ \forall\tau \quad (123)$$

ceea ce determină ca funcția de repartiție de ordinul doi să depindă numai de diferența de timp t_2-t_1.

Ultimele două relații pot fi scrise și la nivel de funcții densitate de probabilitate:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_k;t_1,t_2,\dots t_k) = f(x_1,x_2,\dots,x_k;t_1+\tau,t_2+\tau,\dots,t_k+\tau) \quad (124)$$

sau, alegând $\tau = -t_1$,

$$f(x_1,x_2,\dots,x_k;t_1,t_2,\dots t_k) = f(x_1,x_2,\dots,x_k;0,t_2-t_1,\dots,t_k-t_1) \quad (125)$$

Ca urmare, funcția densitate de probabilitate de ordinul întâi nu depinde de timp:

$$f(x_1;t_1) = f(x_1) \quad (126)$$

și funcția densitate de probabilitate de ordinul doi depinde numai de diferența de timp:

$$f(x_1,x_2;t_1,t_2) = f(x_1,x_2;t_2-t_1) \quad (127)$$

Ca o consecință a ultimelor două relații, pentru un proces aleatoriu staționar în sens strict (SSS), avem proprietățile:

- media nu depinde de timp:

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x,t)\cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx = \mu_X = const. \quad (128)$$

- dispersia nu depinde de timp:

$$\sigma^2(t) = \overline{\left[X(t)-\overline{X(t)}\right]^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\mu_X\right)^2 f(x)dx = \sigma^2 \quad (129)$$

- funcția de autocorelație depinde numai de diferența de timp

$$R_{XX}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot f(x,y,t_2-t_1)dxdy= \\ R_{XX}(t_2-t_1)=R_{XX}(\tau) \tag{130}$$

Observaţii:

1. Un proces aleatoriu cu medie constantă și funcție de autocorelație dependentă numai de diferența de timp nu este în mod necesar staționară în sens strict.
2. Două procese reale *X(t)* și *Y(t)* sunt comun staționare în sens strict dacă distribuțiile comune (compuse) ale lui *X(t)* și *Y(t)* sunt invariante la o translație a axei timpului.
3. Un proces complex *Z(t)=X(t)+jY(t)* este staționar în sens strict dacă procesele *X(t)* și *Y(t)* sunt comun staționare în sens strict.

2.3.2. Staționaritate în sens larg (SSL)

O formă de staționaritate, mai puțin strictă și des folosită în practică, este bazată pe staționaritatea de ordin mic.

Definiție: Un proces aleatoriu *X(t)* este staționar în sens larg sau staționar până la ordinul doi dacă media sa este constantă și funcția de autocorelație depinde numai de diferența de timp:

$$E\{X(t)\}=\mu_X \tag{131}$$

$$E\{X(t)\cdot X^*(t+\tau)\}=R_{XX}(\tau) \tag{132}$$

Definiție: Două procese *X(t)* și *Y(t)* sunt comun staționare în sens larg dacă fiecare este staționar în sens larg și satisfac ecuația:

$$E\{X(t)\cdot Y^*(t+\tau)\}=R_{XY}(\tau) \tag{133}$$

Definiție: Un proces *X(t)* este asimptotic staționar dacă distribuția valorilor lui $X(t_1+\tau)$, $X(t_2+\tau)$, …, $X(t_n+\tau)$ nu depinde de τ, când τ este mare.

Definiție: Un proces *X(t)* este staționar în intervalul *D* dacă condiția de staționaritate este îndeplinită pentru orice valoare τ pentru care $t_1+\tau$, $t_2+\tau$, …, $t_k+\tau$ aparțin intervalului considerat.

Observații:

1. Procesele aleatorii staționare în sens strict sunt staționare și în sens larg. Reciproca nu este întotdeauna adevarată. O excepție o face procesul cu funcție de repartiție normală, staționar în sens larg, care este complet descris de momentele de ordinul întâi și doi, și care este staționar și în sens strict.
2. Testul staționarității. Dacă există o descriere detaliată a procesului aleatoriu, atunci verificarea stationarității procesului aleatoriu este relativ ușoară. Când nu este posibilă o descriere completă, staționaritatea procesului este stabilită prin achiziționarea și analizarea unor realizări ale procesului. Metoda generală este de a divide durata observației în N intervale disjuncte, în care datele pot fi presupuse ca fiind independente. Se verifică dependența de timp a momentelor (medie și dispersia, cel mai des) din fiecare subinterval. Dacă procesul este staționar, atunci valorile obținute pentru fiecare sub-interval nu trebuie să difere prea mult. Variații excesive ale valorilor estimate de la un interval la altul indică ne-staționaritatea procesului considerat.

2.4. Corelația proceselor aleatorii staționare în sens larg (SSL)

Pentru procese aleatorii staționare, funcția de autocorelație $R_{XX}(\tau)$ aduce informații despre dinamica în timp a valorilor procesului aleatoriu.

Dacă funcția de autocorelație scade rapid la zero, atunci procesul își schimbă rapid valorile în timp. O scădere mai puțin pronunțată a funcției de autocorelație arată o dinamică mai mică a procesului aleatoriu.

Aceste rezultate se prezintă calitativ în fig. 6, unde semnalul, $s_2(t)$, cu frecvența mai mare are funcția de corelație cu frecvențe mai mari decât corelația primului semnal, $s_1(t)$.

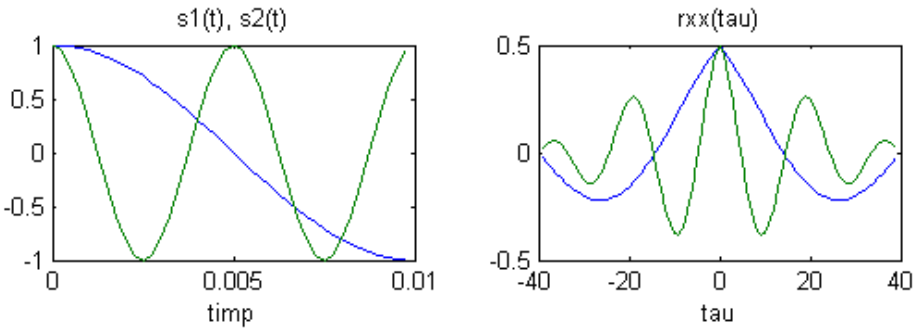


Fig. 6 :Funcții de corelație pentru procese aleatorii de frecvență joasă și, respectiv, înaltă

2.4.1. Proprietățile funcției de autocorelație

1). Funcția de autocorelație a proceselor aleatorii staționare în sens larg cu valori reale se calculează cu relația:

$$R_{XX}(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} \tag{134}$$

deci depinde numai de diferența momentelor de timp.
2). Dacă *X(t)* este un semnal aleatoriu de tensiune pe o rezistență de 1Ω, atunci media statistică (pe mulțime) a valorilor lui $X_2(t)$ este puterea medie (totală) disipată pe rezistorul de 1Ω de procesul aleatoriu *X(t):*

$$E\{X^2(t)\} = \textit{Puterea medie} = R_{XX}(0) \geq 0 \tag{135}$$

3). Legătura dintre dispersie, medie și puterea medie este (v. fig. 7)

$$\sigma^2 = E\{[X(t)-\mu][X(t)-\mu]\} = E\{X^2(t)\} - \mu^2 = R_{XX}(0) - \mu^2 \tag{136}$$

de unde rezultă

$$R_{XX}(0) = \sigma^2 + \mu^2 \tag{137}$$

4). Funcția de autocorelație $R_{XX}(\tau)$ este o funcție pară:

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau) \tag{138}$$

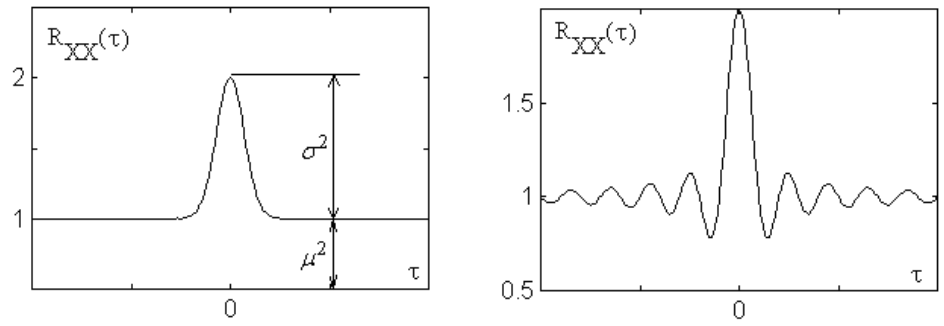


Fig. 7: Funcții tipice de autocorelație

5). Funcția de autocorelație este mărginită de valoarea din origine, $R_{XX}(0)$*:*

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0) \tag{139}$$

Proprietatea se interpretează astfel: întrucât funcția de autocorelație măsoară gradul de dependență statistică dintre două eșantioane, rezultă că, la limită, când $\tau \to 0$, dependența trebuie să fie maximă.

6). Dacă *X(t)* conține o componentă periodică, atunci și funcția de autocorelație conține o componentă periodică de aceeași perioadă.

$$\begin{gathered} Daca \quad \exists \quad T_0 \quad ai \quad X(t+T_0) = X(t) \to \\ \exists T_0 \; ai \; R_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau + T_0) \end{gathered} \tag{140}$$

7). Limita la infinit a autocorelației este pătratul mediei:

$$\lim_{\tau \to \infty} R_{XX}(\tau) = C, \text{atunci } C = \mu_X^2 \tag{141}$$

Demonstrație: Dacă intervalul τ de observare a celor două eșantioane tinde la infinit, este plauzibil să presupunem că legătura dintre ele este neglijabilă. Se poate, deci, considera că două eșantioane distanțate la $\tau = \infty$ sunt statistic independente. Deoarece valoarea medie a produsului a două variabile independente este egală cu produsul valorilor medii, se poate scrie:

$$\begin{aligned} R_{XX}(\infty) &= \lim_{\tau \to \infty} R_{XX}(\tau) = \lim_{\tau \to \infty} E\{X(t)X(t+\tau)\} = \\ &= \lim_{\tau \to \infty} E\{X(t)\} \cdot E\{X(t+\tau)\} = \mu_X^2 \end{aligned} \tag{142}$$

În concluzie, funcția de autocorelație tinde asimptotic sau oscilant amortizat la o valoare constantă, ca în fig. 7.

8). Dacă există un $T_0 \neq 0$, astfel încât $R_{XX}(T_0)=R_{XX}(0)$, atunci R_{XX} este periodică cu perioada T_0.

9). Dacă $R_{XX}(0)<\infty$ și $R_{XX}(\tau)$ este continuă la $\tau=0$, atunci ea este continuă pentru orice τ.

Observații:

1. Proprietățile 2 și 9 au fost menționate și pentru a arăta că o funcție arbitrară nu poate fi interpretată ca funcție de autocorelație.
2. Funcția de autocorelație, spre deosebire de funcția de intecorelație, are trei proprietăți specifice: paritate, are maximumul la $\tau=0$ și pentru $\tau \to \infty$ tinde la o valoare constantă.

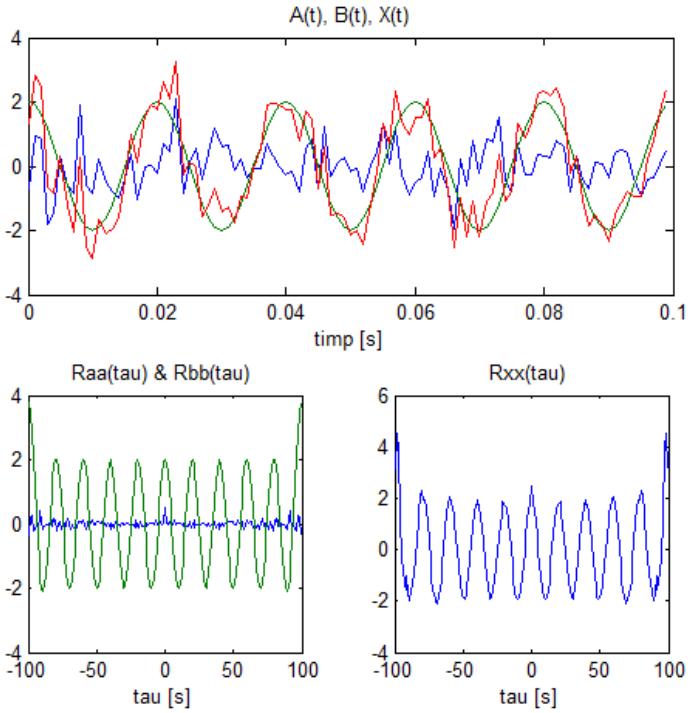
Exemplu: Să se calculeze funcția de autocorelație a procesului aleatoriu SSL $X(t)=A(t)+b(t)$, unde $b(t)=U\cos(\omega_0 t)$, $A(t)$ este o v.a. gaussiană cu medie zero și dispersie 1, U = 2 V, f_0=50 Hz, T = 0.1 s.

□

Soluție: Funcția de autocorelație este

$$R_{XX}(\tau)=E\{X(t)X(t+\tau)\}=$$
$$=E\{[A(t)+U\cos(\omega t)]\cdot[A(t+\tau)+U\cos(\omega(t+\tau)]\}=$$
$$=E\{A(t)A(t+\tau)\}+E\{A(t)U\cos(\omega t+\tau)\}+$$
$$E\{A(t+\tau)U\cos(\omega t)\}+E\{U^2\cos(\omega t)\cos(\omega(t+\tau)\}=$$
$$=R_{AA}(\tau)+E\{A(t)\}E\{U\cos(\omega t+\tau)\}+E\{A(t+\tau)\}E\{U\cos(\omega t)\}+$$
$$\frac{U^2}{2}E\{\cos(2\omega t+\tau)+\cos(\omega\tau)\}=R_{AA}(\tau)+\frac{U^2}{2}E\{\cos(2\omega t+\tau)\}+$$
$$+\frac{U^2}{2}E\{\cos(\omega\tau)\}=R_{AA}(\tau)+\frac{U^2}{2}\cos(\omega\tau)=R_{AA}(\tau)+R_{bb}(\tau)$$

deci o funcție periodică de amplitudine constantă, așa cum se prezintă în fig. de mai jos.



Autocorelația sumei a două semnale independente: determinist $b(t)$ și aleatoriu $A(t)$

2.4.2 Proprietățile funcției de intercorelație

1). Funcția de intercorelație a două procese aleatorii *X(t)* și *Y(t)*, cu valori reale, procese aleatorii staționare în sens larg (SSL), nu depinde de timp, ci numai de diferența momentelor de timp. Se scrie

$$R_{XY}(\tau) = E\{X(t)Y(t+\tau)\} \tag{143}$$

2). Asimetrie:

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \tag{144}$$

3). Mărginire:

$$|R_{XY}(\tau)| \le \sqrt{R_{XX}(0)\cdot R_{YY}(0)} \tag{145}$$

$$|R_{XY}(\tau)| \le \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)] \tag{146}$$

4). $$R_{XY}(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{daca procesele sunt ortogonale} \\ \mu_X \cdot \mu_Y, & \text{daca procesele sunt necorelate} \end{cases} \tag{147}$$

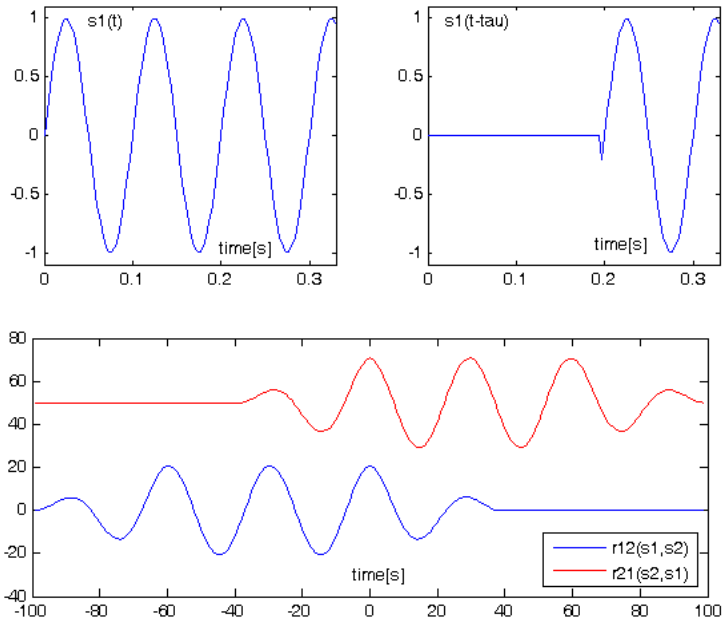


Fig. 8: Funcțiile de intercorelație $R_{s_1 s_2}(\tau)$ și $R_{s_2 s_1}(\tau)$

În fig. 8 se prezintă alura tipică a funcției de intercorelație a două semnale deterministe. Se remarcă proprietatea de asimetrie. dacă

2.5. Estimarea timpului de întârziere a unui canal

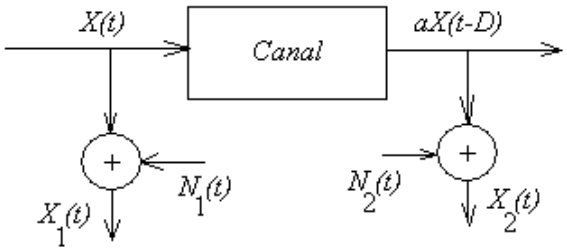
Aplicație[18] A1: Estimarea întârzierii. Fie două semnale aleatorii $X_1(t)$ și $X_2(t)$, fiecare compus dintr-un semnal determinist și un zgomot aditiv, după relațiile:

$$X_1(t) = X(t) + N_1(t) \qquad \text{(A1.1)}$$

$$X_2(t) = a \cdot X(t - D) + N_2(t) \qquad \text{(A1.2)}$$

unde *a* este un factor de atenuare și *D* este variabila timp de întârziere. Se cere timpul de întârziere.

Observație: Relațiile de mai sus corespund unei scheme de observare prin măsurători la intrarea și ieșirea unui canal de transmisiune, de exemplu, ca în fig. alăturată, unde există zgomot de măsurare în ambele puncte de măsurare (de acces).



Soluție: Calculând intercorelația dintre semnalele $X_1(t)$ și $X_2(t)$ și reprezentând grafic (ca în figura), se observă existența unui maxim ce corespunde unei valori a timpului egală cu valoarea întârzierii. Deci, vârful intercorelației a două semnale întârziate poate fi utilizat pentru estimarea întârzierii.

Funcția de intercorelație este

[18] Se pune în evidență importanța funcției de corelație în aplicații de tip *sonar* sau *radar*.

$$\begin{gathered} R_{X_1X_2}(t_1,t_2) = E\{X_1(t_1)\cdot X_2(t_2)\} = \\ E\{[X(t_1)+N_1(t_1)]\cdot[a\cdot X(t_2-D)+N_2(t_2)]\} = \\ = E\{X(t_1)\cdot a\cdot X(t_2-D)\}+E\{X(t_1)\cdot N_2(t_2)\}+ \\ E\{N_1(t_1)\cdot a\cdot X(t_2-D)\}+E\{N_1(t_1)\cdot N_2(t_2)\} = \\ = a\cdot R_{XX}(t_1,t_2-D)+R_{XN_2}(t_1,t_2)+a\cdot R_{N_1X}(t_1,t_2-D)+R_{N_1N_2}(t_1,t_2) \end{gathered} \quad \text{(A1.3)}$$

În baza ipotezei că semnalul aleatoriu *X(t)* și zgomotul de pe canal *N(t)* sunt necorelate, se pot scrie relațiile:

$$R_{XN_2}(t_1,t_2)=0 \text{ și } \quad R_{N_1X}(t_1,t_2-D)=0 \quad \text{(A1.4)}$$

Rezultă

$$\begin{gathered} R_{X_1X_2}(t_1,t_2) = a\cdot R_{XX}(t_1,t_2-D)+R_{N_1N_2}(t_1,t_2) \\ \cong a\cdot R_{XX}(t_1,t_2-D) \end{gathered} \quad \text{(A1.5)},$$

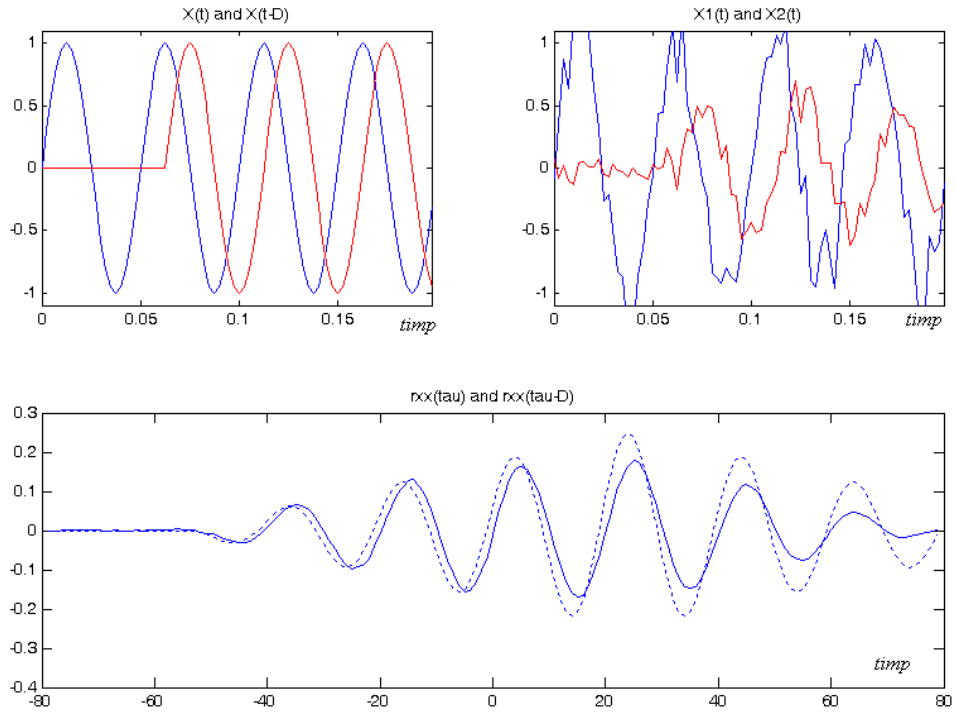
întrucât funcția de autocorelație a zgomotului (presupus alb) se anulează repede pentru puncte în afara originii (o să vedem mai târziu). Pentru semnale aleatorii staționare în sens larg se poate scrie mai departe că

$$\begin{gathered} R_{X_1X_2}(t_1,t_2) = R_{X_1X_2}(t_2-t_1) = R_{X_1X_2}(t_2-D-t_1) = \\ a\cdot R_{XX}(\tau-D) \end{gathered} \quad \text{(A1.6)}$$

```
D = 24;  % val. întârzierii (în nr. de eșant.)
N = 80;  % nr. de eșant. din  fereastră
F0 = 20;  % frecvența semnalului
Fs = F0 * 20;  % frecvența de eșantionare
Ts = 1 / Fs;  % perioada de eșantionare
a = 0.5;   % atenuarea în amplitudine
t = (0:N-1) .* Ts; % variabila timp

X = sin(2 * pi / T0 * t);   % semnalul transmis
sigma_1 = 0.2;  sigma_2 = 0.1; % amplitudinile semnalelor zgomot
N1 = sigma_1 * randn(1, N);  % zgomotul la intrare
N2 = sigma_2 * randn(1, N);  % zgomotul la ieșire
for i = 1:N,      % se definește semnalul întârziat
          if  i  < D,         xd(i) = 0;  else  xd(i) = x(i-D+1); end;
end;
x1 = x + N1;  x2 = xd + N2;  % se definesc semnalele recepționate
[rx2x1, t12] = xcorr(x2,x1);  % corelația recepționat și emis
[xmax,indmax] = max(rx2x1); % estimarea max. și a indicelui
disp(indmax - 80); % afișează indicele maximumului
```

Deci funcția de intercorelație va avea un maximum la valoarea $\tau = D$. Prin determinarea abcisei maximumului putem deci să estimăm valoarea întârzierii pe canalul de transmisiune. Parametrii folosiți și codul sursă Matlab sunt prezentați mai sus.



Estimarea întârzierii a două semnale prin estimarea momentului
în care se obține maximumul funcției de intercorelație

2.6. Estimarea funcției pondere a unui canal

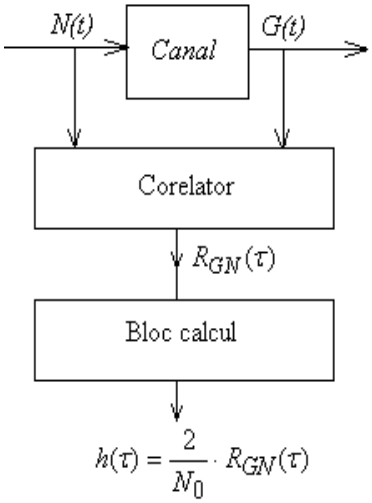
Aplicația A.2: Calculul funcției de pondere a unui canal de transmisiune, considerat ca un circuit liniar invariant în timp, prin metoda corelației.

Soluție: Se consideră schema bloc din figura alăturată, unde *N(t)* este un semnal de intrare de tip zgomot alb, *G(t)* este răspunsul canalului la semnalul *N(t)*, iar corelatorul este un circuit de calcul al funcției de corelație a două semnale.

Funcția de intercorelație temporală dintre intrarea și ieșirea canalului este

$$R_{NG}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{T}N(t)\cdot G(t+\tau)dt \qquad \text{(A2.1)}$$

Răspunsul circuitului se calculează folosind răspunsul la impuls al circuitului cu relația



Schema blox pentru estimarea funcției pondere prin tehnici de corelație

$$G(t)=h(t)*N(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot N(t-u)du \qquad \text{(A2.2)}$$

și

$$G(t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot N(t+\tau-u)du \qquad \text{(A2.3)}$$

Înlocuind în relația (A2.1), se obține:

$$R_{NG}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{T}N(t)\cdot G(t+\tau)dt=\frac{1}{T}\int_{T}N(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot N(t+\tau-u)du\right]dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot\underbrace{\frac{1}{T}\int_{T}N(t)\cdot N(t+\tau-u)dt}_{R_{NN}(\tau-u)=R_{NN}(u-\tau)}du=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot R_{NN}(\tau-u)tdu \qquad \text{(A.2.4)}$$

Considerând semnalul de la intrare de tip zgomot alb Gaussian cu densitatea spectrală de putere[19] constantă, $N_0/2$, se obține:

$$R_{NN}(\tau)=F^{-1}\{S_{NN}(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\cdot e^{j\omega\tau}d\omega= \\ \frac{N_0}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{N_0}{2}\cdot\delta(\tau) \tag{A.2.5}$$

Rezultă funcția de intercorelație

$$R_{NG}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot R_{NN}(\tau-u)du=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)\cdot\delta(\tau-u)du= \\ =\frac{N_0}{2}\cdot h(u)\Big|_{u=\tau}=\frac{N_0}{2}\cdot h(\tau) \tag{A.2.6}$$

În baza proprietăților funcției de intercorelație se poate scrie:

$$R_{NG}(\tau)=R_{GN}(-\tau) \tag{A.2.7}$$

și expresia finală:

$$R_{NG}(\tau)=\frac{N_0}{2}h(\tau)\rightarrow\quad h(\tau)=\frac{2}{N_0}\cdot R_{NG}(\tau),\quad \tau\geq 0 \tag{A.2.8}$$

Ultima relație arată că funcția de intercorelație este proporțională cu funcția pondere a circuitului necunoscut și – de aici – se poate calcula Funcția pondere.

Avantajul acestei metode față de metodele clasice determinsite (prin aplicarea unui impuls scurt și înregistrarea răspunsului), constă în faptul că funcția pondere astfel determinată nu este afectată de perturbațiile care intervin în funcționarea circuitului.

Alt avantaj îl constituie determinarea funcției pondere a sistemului (procesului/circuitului) în funcțiune, deci în condiții reale.

[19] În reprezentare bilaterală.

Exemplu principial de estimare prin simulare

Se consideră două sisteme de ordinul 1 și, respectiv, de ordinul 2. Semnalul de intrare este un zgomot gaussian cu medie zero și dispersie 1.
Codul Matlab de identificare este prezentat în continuare.

```
...
ordin = 1;

switch ordin,
   case 1,
      tau = 10;   [num] = tau;   [den] = [tau 1];    Ts = tau / 20;  N = 500;
   case 2,
      omegan = 2*pi*1; csi = 0.15;
      [num] = omegan^2;  [den] = [1 2*csi*omegan omegan^2];
      Ts = 1/50/omegan;
      N = 2500;
end;

t=(0:N-1).*Ts;    sys = tf(num, den);
h = impulse(sys, t); % răspuns teoretic
init_state = 1000;  randn('state', init_state); sigma2 = 1;
u = sqrt(sigma2) * randn(1,N);
y = conv(u,h).* Ts;
y = y(1:N); % calculul raspunsului
ryu = xcorr(y,u,'biased');  [x,ix] = max(ryu);
he = ryu(N:end) ./ sigma2 / Ts;   % corectie putere zgomot
…
```

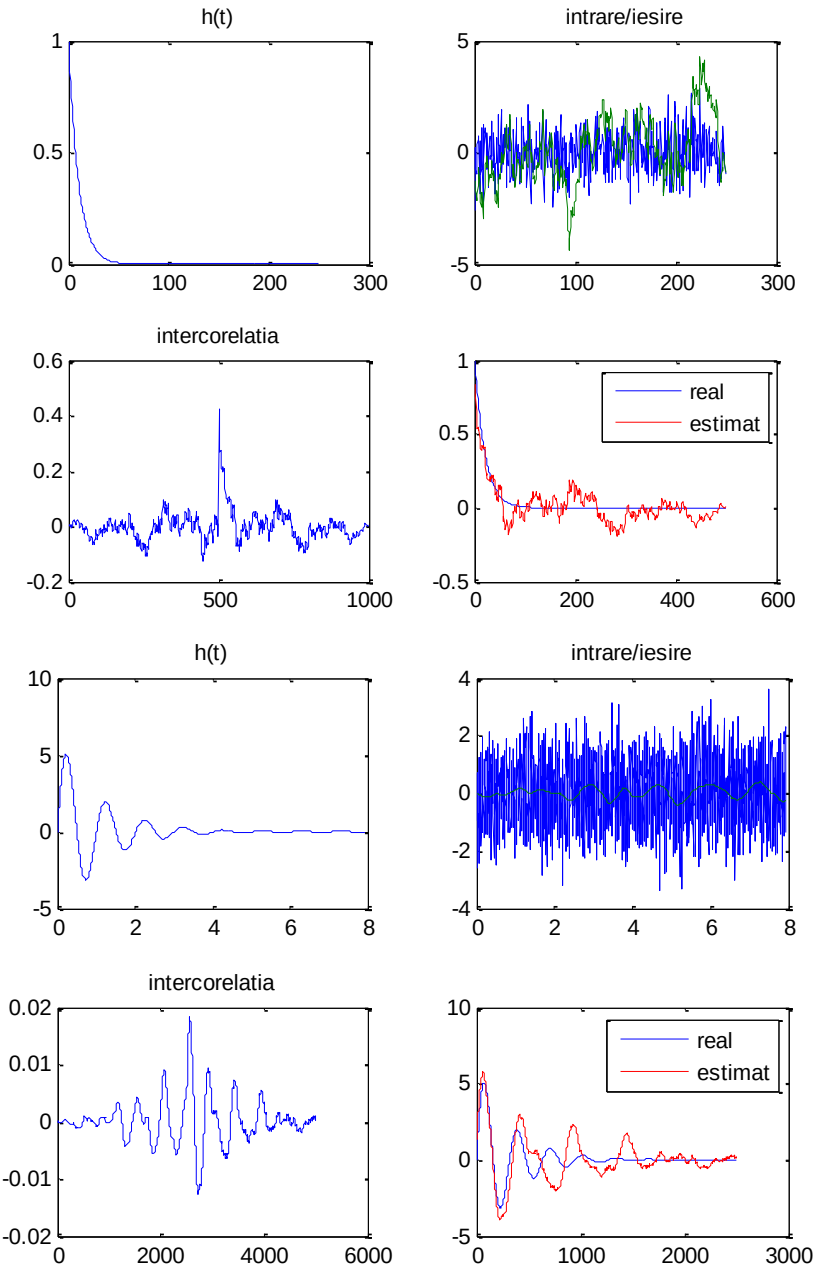
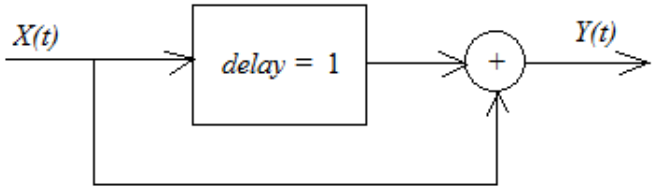


Fig. 9: Rezultatele estimării funcției pondere prin tehnici de corelație (a,b,c,d)

Exercițiu: Fie *X(t)*, un proces aleatoriu staționar în sens larg cu funcția de autocorelație $R_{XX}(\tau)=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|<1\\ 0, & altfel\end{cases}$, aplicat sistemului din figura. Să se

calculeze Funcția de autocorelație a ieșirii circuitului, $R_{YY}(\tau)$, și să se reprezinte grafic.



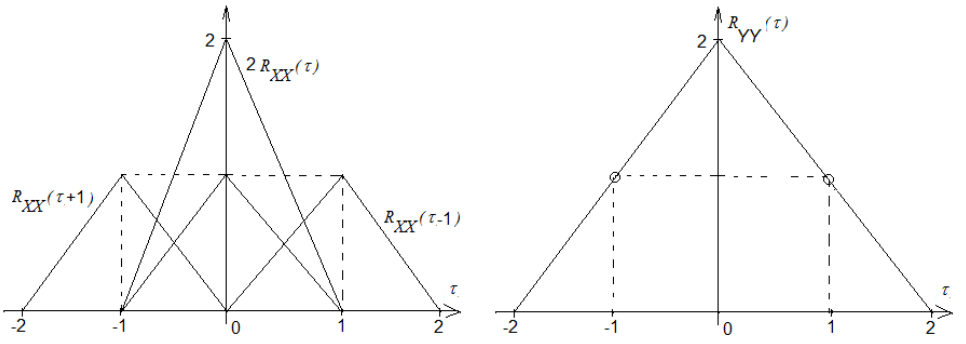
Soluție: Semnalul de la ieșirea circuitului este:

$$Y(t) = X(t) + X(t-1)$$

cu funcția de autocorelație

$$R_{YY}(\tau) = E\{Y(t)Y(t+\tau)\} = E\{[X(t)+X(t-1)]\cdot[X(t+\tau)+X(t+\tau-1)]\} =$$
$$= E\{X(t)\cdot X(t+\tau)\} + E\{X(t)\cdot X(t+\tau-1)\} + E\{X(t-1)\cdot X(t+\tau)\} + E\{X(t-1)\cdot X(t+\tau-1)\} =$$
$$= R_{XX}(\tau) + R_{XX}(\tau-1) + R_{XX}(\tau+1) + R_{XX}(\tau) =$$
$$= 2R_{XX}(\tau) + R_{XX}(\tau-1) + R_{XX}(\tau+1)$$

Pentru reprezentarea grafică se trasează individual cei trei membri din relația de mai sus și se sumează punct cu punct, așa cum se prezintă în fig. de mai jos.



■

Exercițiu propus. Fie două procese aleatorii *X(t)* și *Y(t)* independente statistic, staționare în sens larg, cu funcțiile de autocorelație de forma $R_{XX}(\tau) = 2\cdot\exp(-2|\tau|)\cdot\cos\omega\tau$ și $R_{YY}(\tau) = 9 + \exp(-2|\tau|)$. Fie procesul aleatoriu $Z(t) = A\cdot X(t) + Y(t)$, unde A este o variabilă aleatorie independentă statistic (față de *X* și *Y*) cu media μ_A și varianța σ_A^2.

1). Să se calculeze:
a). funcția de autocorelație $R_{ZZ}(\tau)$ a procesului aleatoriu *Z(t)*;
b). media și dispersia lui *Z(t).*
2). Să se stabilească soluția problemei de estimare a funcției răspuns la impuls (Aplicația 2), folosind mediile statistice (nu temporale) pentru evaluarea corelațiilor dintre semnale.

2.7. Densitatea spectrală de putere a proceselor aleatorii SSL

Pentru un semnal determinist *x(t),* puterea medie se poate calcula cu relația:

$$P_X = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t)dt \tag{148}$$

Dacă semnalul determinist este periodic cu perioada T_0, se poate defini o funcție de autocorelație, ca medie temporală $<R_{xx}(\tau)>_{T0}$, prin relația:

$$< R_{XX}(\tau) >_{T0} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)x(t+\tau)dt \tag{149}$$

Densitatea spectrală de putere $S_{xx}(f)$ și Funcția de autocorelație sunt perechi Fourier:

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)d\omega \tag{150}$$

Termenul din dreapta este puterea totală medie a semnalului, f este frecvența [Hz], $S_{xx}(f)$ este densitatea spectrală de putere a semnalului determinist *x(t)* și se măsoara în [W/Hz].

Fie un proces aleatoriu *X(t)* și o realizare $X^{(k)}(t)$. Analiza armonică a semnalelor deterministe nu se poate aplica direct semnalelor aleatorii pentru că - în general - integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| X^{(k)}(t) \right| dt \to \infty \tag{151}$$

deci semnalele aleatorii nu sunt de energie finită, nerespectându-se ipotezele analizei clasice (a semnalelor deterministe).

Pentru a putea aplica însă analiza clasică și în cazul unei realizări particulare a unui proces aleatoriu, realizarea $X^{(k)}(t)$ se trunchiază la o durată T, așa cum se indică în fig. 10, după relația:

$$X_T^{(k)}(t) = \begin{cases} X^{(k)}(t), & |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0\,, & |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases} \qquad (152)$$

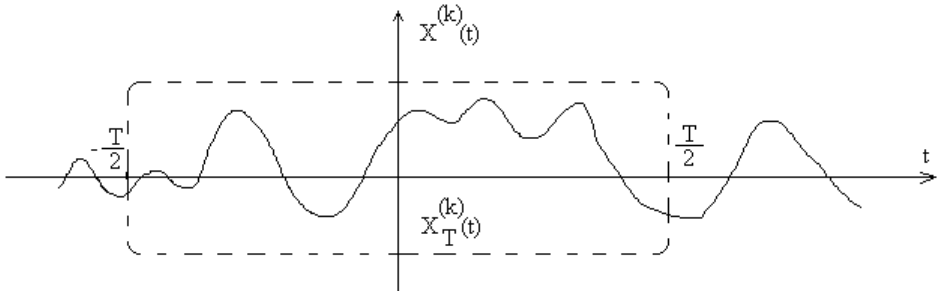


Fig. 10: Realizarea trunchiată $X_T^{(k)}$ a procesului $X(t)$

Intervalul de timp T se alege astfel încât realizarea particulară $X_T^{(k)}$ să admită transformată Fourier. În acest caz sunt valabile relațiile:

$$F_T^{(k)}(j\omega) = \left\{X_T^{(k)}(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} X_T^{(k)}(t)\cdot e^{-j\omega t}dt = X_T^{(k)}(j\omega) \qquad (153)$$

și

$$X_T^{(k)}(t) = F^{-1}\left\{X_T^{(k)}(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_T^{(k)}(j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega \qquad (154)$$

Se definește densitatea spectrală de putere a semnalului trunchiat:

$$S_{XX}^{(k)}{}_T(\omega) \overset{def}{=} \frac{\left|X_T^{(k)}(j\omega)\right|^2}{T} \qquad (155),$$

iar densitatea spetrală de putere a semnalului aleatoriu $X(t)$ este

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \to \infty} E\left\{\frac{\left|X_T^{(k)}(\omega)\right|^2}{T}\right\} = \lim_{T \to \infty} E\left\{S_{XX_T}^{(k)}(\omega)\right\} \qquad (156)$$

Observație: O metodă rapidă de estimare a f.d.s.p. implică medierea temporală:

$$< S_{XX}(\omega) >_T = \frac{1}{T}\left|\int_T X(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt\right|^2 = \frac{\left|X(j\omega)\right|^2}{T} \qquad (157)$$

care se mai numește *periodograma procesului*. De fapt integrala reprezintă transformata Fourier; amplitudinea pătratului transformatei Fourier este *densitatea spectrală de energie*, iar 1/*T* este factorul de conversie de la spectrul de energie la spectrul de putere. Următoarea teoremă este foarte importantă în analiza semnalelor:

Teorema (Wiener-Hincin): Funcția densitate spectrală de putere $S_{XX}(\omega)$ a unui proces aleatoriu *X(t)* și funcția sa de autocorelație sunt perechi Fourier:

$$S_{XX}(\omega) = F\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau \qquad (158)$$

$$R_{XX}(\tau) = F^{-1}\{S_{XX}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega \qquad (159)$$

Relația (71) reprezintă a doua posibilitate de estimare a densității spectrale de putere. Vom denumi metoda bazată pe ec. (69) ca fiind metoda directă și metoda bazată pe ec. (71) ca fiind metoda indirectă [20].

Funcția densitate spectrală de interacțiune (de legătură)

Legătura dintre procesele aleatorii *X(t)* și *Y(t)* cu valori reale este exprimată în domeniul frecvență prin intermediul funcției densitate spectrală de putere de interacțiune $S_{XY}(f)$, definită ca transformata Fourier a funcției de intercorelație $R_{XY}(\tau)$:

[20] F.d.s.p obținută prin corelație se mai numește și *corelograma*.

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau \qquad (160)$$

și inversa:

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(f) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \cdot d\omega \qquad (161)$$

În opoziție față de f.d.s.p., care este o funcție reală de variabila frecvență, funcția d.s.p. de interacțiune este, în general, o funcție complexă.

2.8. Proprietățile funcției densitate spectrală de putere

Densitatea spectrală de putere a unui proces aleatoriu *X(t)* staționar, pe scurt spectrul lui *X(t)*, are un număr important de proprietăți:

1. Densitatea spectrală de putere este o funcție nenegativă.

$$S_{XX}(f) \geq 0, \quad \forall f \in (-\infty, +\infty) \qquad (162)$$

2. Puterea medie (totală) a procesului aleatoriu *X(t)* se calculează cu relația:

$$P_X = E\{X^2(t)\} = R_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) \cdot d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) \cdot df \qquad (163)$$

3. Pentru procese *X(t)* aleatorii cu valori reale, funcția de autocorelație are simetrie pară și, de asemenea, Funcția densitate spectrală de putere este o funcție pară:

$$S_{XX}(\omega) = S_{XX}(-\omega), \qquad R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau) \qquad (164)$$

4. Dacă procesul aleatoriu *X(t)* are componente periodice, atunci densitatea spectrală de putere $S_{XX}(\omega)$ are - în componența sa – semnale impuls.

Câteva proprietăți ale funcției densitate spectrală de putere de interacțiune trebuie reținute:

1. Asimetrie

$$S_{XY}(f) = S^{*}_{YX}(f) \tag{165}$$

2. Partea reală este o funcție pară, iar partea imaginară o funcție impară:

$$Re\{S_{XY}(-f)\} = Re\{S_{XY}(f)\} \tag{166}$$

$$Im\{S_{XY}(-f)\} = -Im\{S_{XY}(f)\} \tag{167}$$

3. Densitatea spectrală de putere de interacțiune este zero dacă procesele aleatorii sunt ortogonale:

$$R_{XY}(\tau) = 0 \rightarrow S_{XY}(f) = 0 \tag{168}$$

4. Dacă procesele aleatorii *X(t)* și *Y(t)* sunt independente atunci:

$$S_{XY}(f) = \mu_X \cdot \mu_Y \cdot \delta(f) \tag{169}$$

2.9. Ergodicitatea proceselor aleatorii

Din punct de vedere practic, este foarte util să se determine parametrii procesului aleatoriu dintr-o singură înregistrare a acestuia.

Presupunem că dorim să estimăm media procesului *X(t)*, $\mu_X(t)$. Media statistică este definită ca o medie pe mulțime, astfel încât prin observarea valorilor lui *X(t)* în timpul mai multor realizări, putem utiliza media acestora ca un estimat al mărimii $\mu_X(t)$. Pe de altă parte, dacă avem acces doar la o singură reprezentare a procesului *X(t),* de exemplu *x(t),* atunci putem calcula numai media temporală:

$$< x(t) >_T = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt \tag{170}$$

și să utilizăm media temporală ca un estimat al mediei statistice, $\mu_X(t)$.

Definiție: Un proces aleatoriu *X(t)* este *ergodic* dacă mediile statistice sunt egale cu mediile temporale, în sens de medie pătratică.

Definiția implică faptul că orice medie statistică a lui *X(t)* poate fi determinată dintr-o singură înregistrare a procesului *X(t).*

În multe aplicații ne interesează numai anumite momente statistice, cum sunt media și funcția de autocorelație, astfel încât se va defini ergodicitatea în raport cu aceste două momente.

De reținut că ergodicitatea este o condiție mai dură (restrictivă) decât staționaritatea, astfel încât, nu toate procesele ce sunt staționare sunt și ergodice. Mai mult, ergodicitatea este uzual definită în raport cu unul sau două momente statistice și procesul poate fi ergodic în raport cu momentele considerate, după cum poate fi neergodic în raport cu alte momente statistice.

În general, mediile statistice și temporale nu sunt egale, cu exceptia unor clase speciale de procese aleatorii numite *procese ergodice.*

2.9.1 Ergodicitatea mediei

Un proces aleatoriu *X(t)* staționar este *ergodic în medie (în raport cu media),* dacă media temporală tinde la media statistică, în sens de medie pătratică:

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m.} < \mu_X >_T = \mu_X \tag{171}$$

unde *l.i.m.* înseamnă egalitatea în sens de medie pătratică, ce presupune:

1. media statistică a valorilor mediilor temporale să tindă la media statistică:

$$\lim_{T\to\infty} E\{< \mu_X >_T\} = \mu_X \tag{172}$$

2. dispersia valorilor mediilor temporale să tindă la zero

$$\lim_{T\to\infty} var\{< \mu_X >_T\} = 0 \tag{173}$$

În fig. 11 se prezintă o clasificare a semnalelor aleatorii din punctul de vedere al staționarității și ergodicității.

În cele ce urmează se va presupune că procesele aleatorii abordate sunt ergodice.

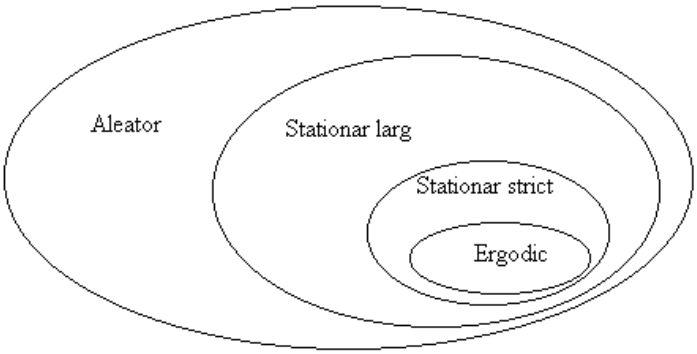


Figura 11: Clasificarea semnalelor aleatorii

2.10. Clasificarea proceselor aleatorii după banda de frecvență ocupată

Un proces aleatoriu *X(t)* este de tip trece jos dacă f.d.s.p. este zero pentru $|f|>B$, unde *B* se numește *banda de frecvență a procesului*.

Un proces aleatoriu *X(t)* este tip trece bandă dacă f.d.s.p. este zero în afara unei benzi, așa cum se prezintă în fig. 12.

$$f_c - \frac{B}{2} \le |f| \le f_c + \frac{B}{2} \tag{174}$$

La fel ca la reprezentarea spectrelor semnalelor deterministe, s-au folosit și frecvențele negative, caz în care avem o reprezentare bilaterală. Densitatea spectrală de putere reală, aceea care se măsoară în mod efectiv, corespunde numai frecvențelor pozitive.

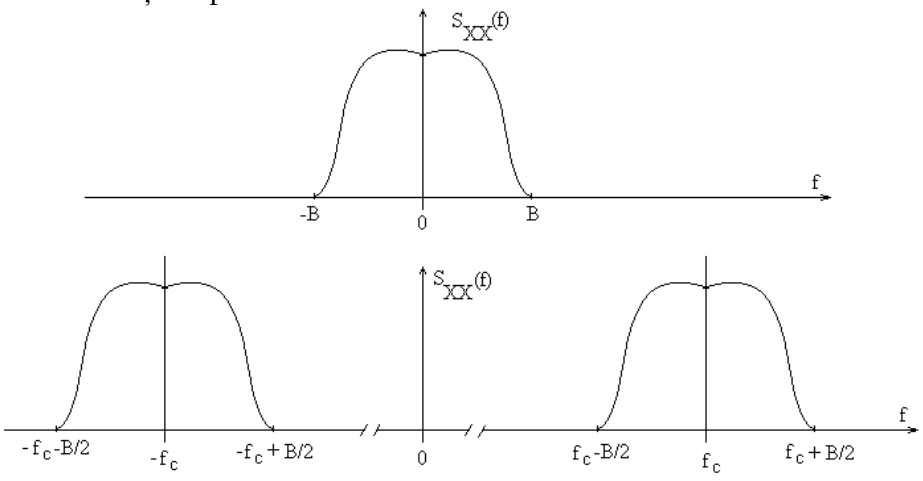


Fig. 12: Procese aleatorii trece jos și trece bandă

2.11. Calculul puterii într-o bandă de frecvență

Așa cum rezultă și din relația (64), aria cuprinsă între f.d.s.p. și axa abciselor este puterea totală a semnalului aleatoriu *X(t)*. Puterea într-o bandă finită de frecvență, între f_1 și f_2, $0<f_1<f_2$, este aria cuprinsă între abcisele $-f_2$ și $-f_1$ la care se adaugă aria de la f_1 la f_2, așa cum se indică în fig. 13. Relația de calcul este:

$$P_X[f_1, f_2] = 2 \cdot \int_{f_1}^{f_2} S_{XX}(f) \cdot df \qquad (175)$$

coeficientul 2, din fața integralei, apărând din cauza simetriei pare a f.d.s.p[21].

Există procese aleatorii care au f.d.s.p. diferită de zero pentru orice valoare a frecvenței, cum este, de exemplu, $S_{XX}(f) = \exp(-f^2/2)$. Pentru asemenea procese, puterea totală într-o bandă de frecvență nu este singura mărime ce se poate folosi pentru caracterizarea procesului aleatoriu în domeniul frecvență.

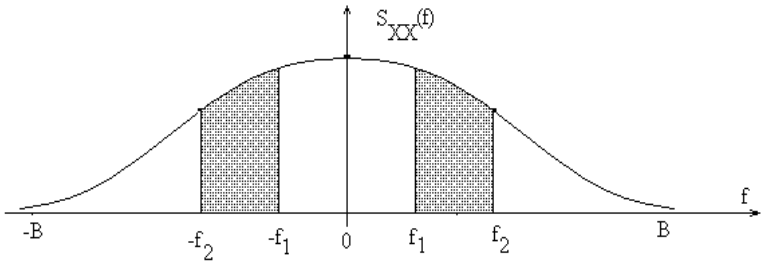


Fig. 13: Calculul puterii plecând de la f.d.s.p.

2.12. Calculul benzii efective și a benzii medii pătratice

Se utilizează deci și alte mărimi care să arate dispersia f.d.s.p. în domeniul frecvență. În acest sens, se definește *banda echivalentă* sau *banda efectivă* B_{eff}. Pentru procese aleatorii cu medie zero și f.d.s.p. continuă, banda efectivă se definește cu relația :

[21] Relația de calcul depinde de modul în care este definită f.d.s.p, unilateral sau bilateral.

$$B_{eff} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)df}{max\{S_{XX}(f)\}} \tag{176}$$

Banda efectivă poate fi definită în raport cu gabaritul unui filtru trece jos: este banda de frecvență ce permite obținerea aceleiași puteri la ieșirea filtrului, când la intrarea filtrului se aplică un semnal alb, așa cum se poate observa în fig. 14. Banda efectivă este corelată și cu măsura "dispersiei" funcției de autocorelație, numită timp de corelație τ_c, definită prin:

$$\tau_C = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)d\tau}{R_{XX}(0)} \tag{177}$$

Cu cât funcția de corelație este mai largă, cu atât timpul de corelație este mai mare.

Daca f.d.s.p. $S_{XX}(f)$ este continuă și are maximumul la $f = 0$, se poate demonstra relația

$$B_{eff} = \frac{1}{2 \cdot \tau_C} \tag{178}$$

Altă măsură a dispersiei f.d.s.p. este banda patratică medie, definită ca deviația standard a f.d.s.p. normată la puterea semnalului:

$$B_{rms}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot S_{XX}(f)df}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)df} \tag{179}$$

cu observația că banda pătratica medie există numai dacă $S_{XX}(f)$ scade mai repede decât $1/f^2$.

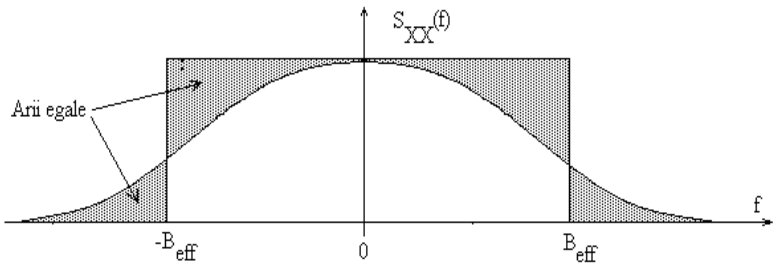


Fig. 14: Definirea benzii efective de putere

2.13. Descrierea perturbațiilor de bandă largă

Semnalele aleatorii de bandă largă au densitatea spectrală de putere aproape constantă în banda de frecvențe $[0,\omega_0)$, așa cum se prezintă în fig. 15.

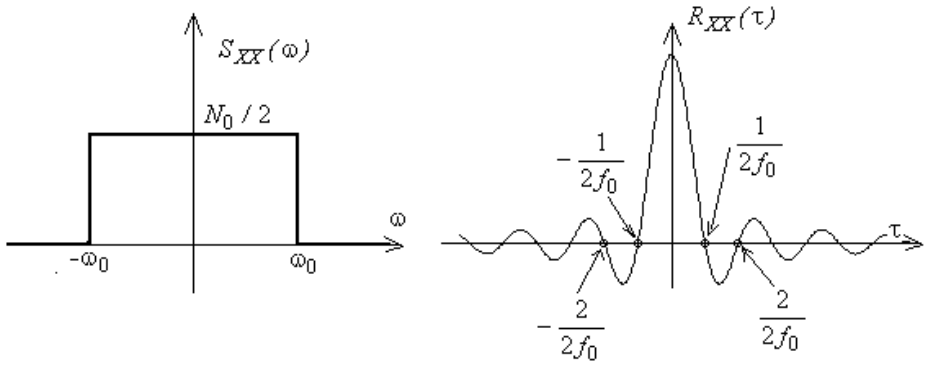


Fig. 15 : Densitatea spectrală de putere a unui semnal de bandă largă

Expresia densității spectrale de putere este

$$S_{XX}(\omega)=\begin{cases}N_0/2, & \omega\in[-\omega_0,\omega_0]\\ 0, & in \quad rest\end{cases} \tag{180}$$

Funcția de autocorelație este

$$R_{XX}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XX}(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega}\frac{N_0}{2}\cdot e^{j\omega\tau}d\omega=$$

$$=\frac{N_0}{4\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}\frac{1}{j\tau}\cdot\left(e^{j\omega\tau}\right)'d\omega=\frac{N_0}{4\pi}\cdot\frac{1}{j\tau}\left(e^{j\omega_0\tau}-e^{-j\omega_0\tau}\right)= \tag{181}$$

$$=\frac{N_0}{4\pi}\cdot\frac{1}{j\tau}\cdot 2j\sin\omega_0\tau=\omega_0N_0\cdot\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau}=\omega_0N_0\cdot sinc(\omega_0\tau)$$

deci,

$$R_{XX}(\tau)=\omega_0N_0\cdot sinc(\omega_0\tau) \tag{182}$$

Punctele de intersecție τ_k cu axa timpului se află din condiția

$$\omega_0\tau_k=k\pi,\quad k\in Z \tag{183}$$

și sunt

$$\tau_k = \frac{k\pi}{\omega_0} = \frac{k}{2f_0}, k = \pm 1, \pm 2, ... \tag{184}$$

Altă notație, prin banda $B = f_0$ [Hz] , $B = f_0 = \omega_0 / 2\pi$ a semnalului aleatoriu, este:

$$S_{XX}(f) = \begin{cases} N_0/2, & \omega \in [-B, B] \\ 0, & in \quad rest \end{cases} \tag{185}$$

$$R_{XX}(\tau) = 2 \cdot \pi \cdot B \cdot N_0 \cdot sinc(2 \cdot \pi \cdot B \cdot \tau) \tag{186}$$

$$\tau_k = \frac{k\pi}{\omega_0} = \frac{k}{2B} = \frac{k}{2f_0}, k = \pm 1, \pm 2, ... \tag{187}$$

Observatii: 1). Lobul principal al autocorelației are durata $T = \frac{1}{2B} + \frac{1}{2B} = \frac{1}{B}$, ceea ce arată că autocorelația în semnal este cu atât mai mică, cu cât banda de frecvență este mai mare.

2). Fie un semnal cu eșantioane centrate pe zero, deci cu medie nulă. Pentru a obține eșantionare necorelate, trebuie să se eșantioneze cu perioada $T_S = \frac{1}{2B}$.

3). Dacă banda tinde la infinit se obține un semnal idealizat numit zgomot alb cu densitate spectrală de putere constantă. Funcția de autocorelație a zgomotului alb este

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau) \tag{188}$$

Asta înseamnă că două eșantioane la momentele de timp diferite, fie t_1 și t_2, sunt necorelate oricât de apropiate ar fi, așa cum se prezintă în fig. 16.

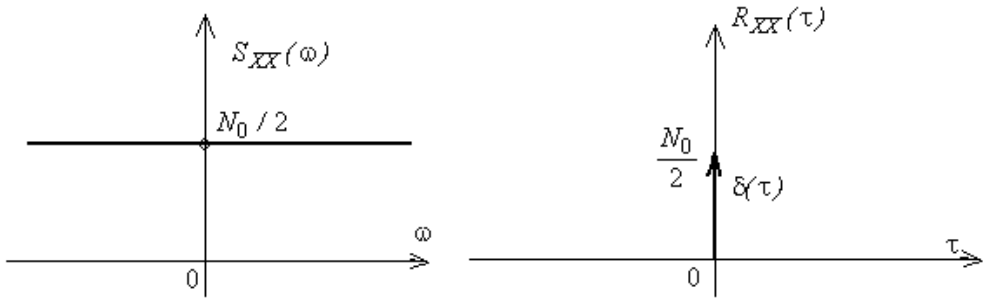


Fig. 16: Densitatea spectrală de putere și funcția de corelație a zgomotului alb

2.14. Descrierea perturbațiilor de banda îngustă

Semnalele de bandă îngustă au banda de frecvență, *B*, concentrată în jurul unei frecvențe centrale ω_0, cu $B << \omega_0$, așa cum se arată în fig. 17, unde s-a reprezentat densitatea spectrală de putere în reprezentare bilaterală.

Funcția de autocorelație este

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega \qquad (189)$$

Prin schimbarea de variabilă $\omega' = \omega - \omega_0$, cei doi lobi ai reprezentării bilaterale se transformă într-un singur lob și se obține densitatea spectrală de putere de joasă frecvență, $s(\omega)$.

Se poate demonstra relația:

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX\,c}(\tau)\cdot cos(\omega_0\tau) \qquad (190)$$

deci, un semnal cosinusoidal de pulsație ω_0 modulat în amplitudine de autocorelația semnalului cu d.s.p. transpusă la joasă frecvență. Alura corelației este reprezentată în fig. 18.

În sistemele de telecomunicații cu modulație în amplitudine, $R_{XX\,c}(\tau)$ este autocorelația semnalului modulator.

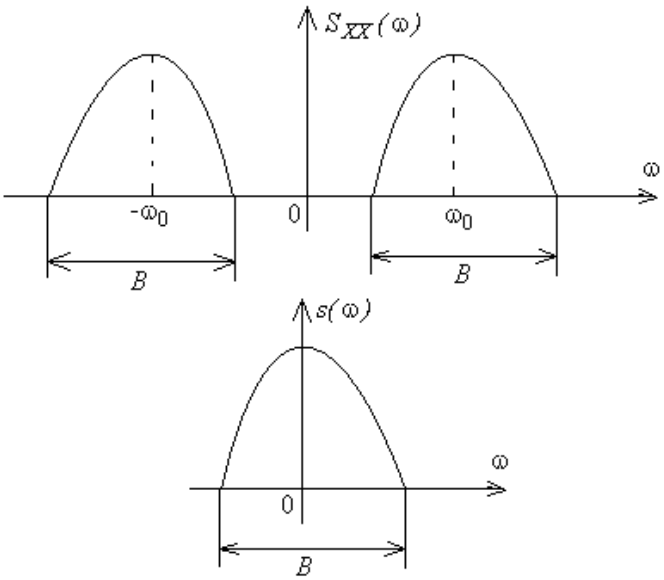


Fig. 17 : Densități spectrale de putere pentru semnale de banda îngustă:
în reprezentare bilaterală și translatată la frecvente joase, $s(\omega)$

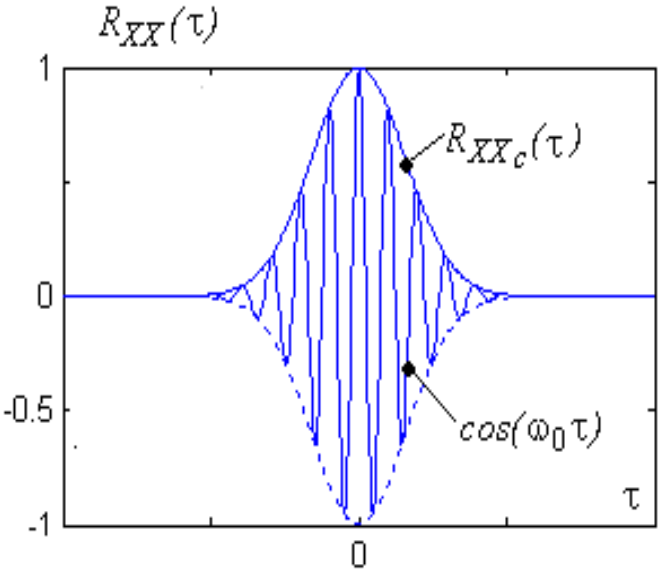
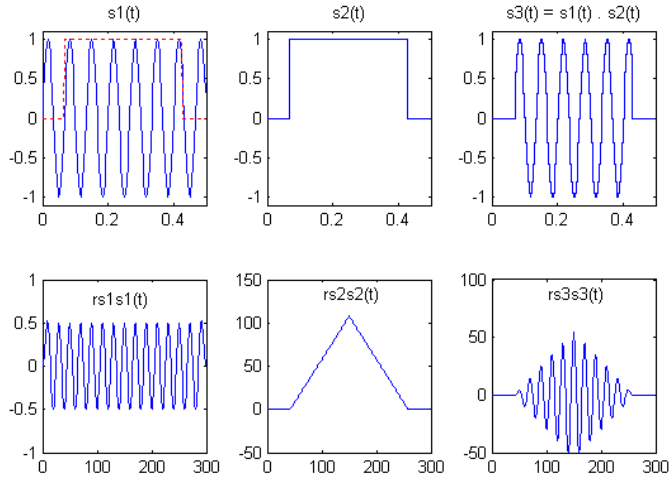


Figura 18 : Autocorelatia semnalului aleator de banda îngustă

Exemplu: Se consideră trei semnale: $s_1(t)$ de formă sinusoidală, $s_2(t)$ de formă dreptunghiulară și $s_3(t)$ egal cu produsul primelor două. În partea de jos a figurii s-au reprezentat funcțiile de autocorelație ale semnalelor. Se

observă ca funcția de autocorelație a semnalului $s_3(t)$ este un cosinus modulat în amplitudine de autocorelația semnalului $s_2(t)$.



Autocorelatia semnalelor de bandă îngustă

Exercițiu (1): Fie *X(t)* și *Y(t)* două procese ortogonale cu densitățile spectrale de putere $S_{XX}(f) = S_{YY}(f) = \begin{cases} 1-|f|, & |f|<1 \\ 0, & altfel \end{cases}$. Se consideră procesul $Z(t) = Y(t) - X(t-1)$. Să se calculeze și să se reprezinte grafic densitatea spectrală de putere a semnalului *Z(t).*

Soluție*:* Se calculează – mai întâi – funcția de autocorelație

$$R_{ZZ}(\tau) = E\{Z(t)Z(t+\tau)\} = E\{[Y(t) - X(t-1)]\cdot[Y(t+\tau) + X(t+\tau-1)]\} =$$
$$= E\{Y(t)\cdot Y(t+\tau)\} + E\{Y(t)\cdot X(t+\tau-1)\} + E\{X(t-1)\cdot Y(t+\tau)\} +$$
$$E\{X(t-1)\cdot X(t+\tau-1)\} = R_{YY}(\tau) + R_{YX}(\tau-1) + R_{XY}(\tau+1) + R_{XX}(\tau) =$$
$$= R_{YY}(\tau) + R_{XX}(\tau)$$

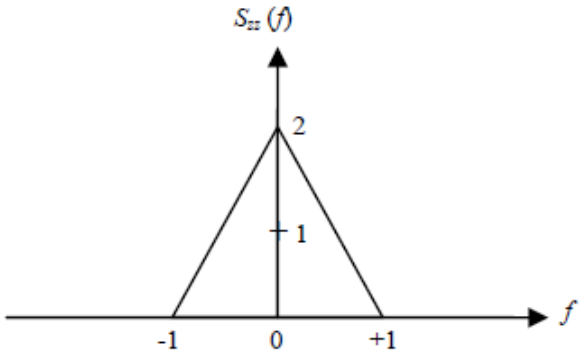
întrucât, pe baza ortogonalității, avem

$$R_{YX}(\tau) = R_{XY}(\tau) = 0, \quad \forall \tau$$

În baza relației Wiener-Hincin, se poate scrie

$$S_{ZZ}(f) = F\{R_{ZZ}(\tau)\} = F\{R_{YY}(\tau) + R_{XX}(\tau)\} = F\{R_{YY}(\tau)\} + F\{R_{XX}(\tau)\} = \\ = S_{YY}(f) + S_{XX}(f)$$

Pentru reprezentarea grafică se trasează individual cei doi membri din relația de mai sus și se sumează punct cu punct, cu rezultatul din fig. de mai jos.



Exercițiu (2): Fie *X(t)* și *Y(t)=X(t-T)* două procese SSL cu funcția de autocorelație $R_{XX}(\tau)$ și densitatea spectrală de putere $S_{XX}(f)$ cunoscute, iar *T* este o constantă. Să se calculeze densitatea spectrală de putere de interacțiune $S_{XY}(f)$ în funcție de $S_{XX}(f)$.

Soluție*:* Densitatea spectrală de putere de interacțiune este

$$S_{XY}(f) = F\{R_{XY}(\tau)\} = F\{E\{X(t)Y(t+\tau)\}\} = F\{E\{X(t)X(t-T+\tau)\}\} = \\ = F\{R_{XX}(\tau - T)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau - T)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

Facând schimbarea de variabila $\tau - T = t$, cu $d\tau = dt$, rezultă $\tau = t + T$ și

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t)e^{-j\omega(t+T)}dt = e^{-j\omega T}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t)e^{-j\omega\tau}dt = e^{-j\omega T}S_{XX}(f)$$

deci o modificare a spectrului de faze. Întârzierea semnalului nu modifică spectrul de putere.

Exercițiu propus: Fie un semnal zgomot alb *N(t)* de bandă limitată cu densitatea spectrală de putere $S_{NN}(\omega)=\begin{cases}\frac{N_0}{2} & |\omega|\le 2\cdot\pi\cdot B\\ 0, & altfel\end{cases}$, unde *B* este un parametru cu semnificație de cea mai înaltă frecvență. Să se calculeze frecvență de eșantionare pentru care eșantioanele prelevate sunt necorelate.

2.15. Procese aleatorii discrete în timp (secvențe aleatorii)

Marea majoritate a proceselor aleatorii din practică sunt discrete, în timp și amplitudine. Denumirea corectă este de secvențe (serii) aleatorii discrete (în amplitudine). Din punct de vedere probabilistic, considerarea discretizării în amplitudine conduce la necesitatea considerării variabilelor aleatorii discrete, așa cum se prezintă în (*Munteanu si Tarniceriu*, 2005). Ca urmare, funcțiile de repartiție și densitățile de probabilitate se modifică în mod corespunzător, devenind - din funcții continue - funcții discrete. În continuare, se vor prezenta numai cele mai folosite mărimi statistice folosite și-n cazul continuu.

Procesele aleatorii continue în timp, prin eșantionare, se transformă în procese aleatorii discrete în timp sau secvențe (serii) aletoare. După valorile amplitudinilor, secvențele aleatorii pot fi continue sau discrete, după cum valorile sunt într-un interval sau într-o mulțime finită de valori.
Notația consacrată este *X(n)*, cu *n* număr întreg reprezentând numărul perioadei de eșantionare, deci *n*=0,1,...,*N*. Valoarea medie a secvenței aleatorii *X(n)* este

$$\overline{X}(n)=E\left[X(n)\right]=\mu_X(n) \tag{191}$$

Funcția de autocorelație a secvenței aleatorii reale, *X(n)*, este[22]

$$r_{XX}(n_1,n_2)=E\left[X(n_1)\cdot X(n_2)\right] \tag{192}$$

Funcția de autocovarianță a unei secvențe cu valori reale este

$$\begin{aligned}c_{XX}(n_1,n_2)&=E\left[(X(n_1)-\mu_X(n_1))\cdot(X(n_2)-\mu_X(n_2))\right]=\\&=r_{XX}(n_1,n_2)-\mu_X(n_1)\cdot\mu_X(n_2)\end{aligned} \tag{193}$$

Dacă secvența *X(n)* este staționară (în sens larg), atunci

[22] Se folosesc litere mici pentru vectori și litere mari pentru matrici.

1). Media nu depinde de timp:

$$\overline{X} = E\left[X(n)\right] = \mu_X = const. \tag{194}$$

2). Funcția de autocorelație și covarianța depind numai de diferența momentelor de timp:

$$r_{XX}(n, n+k) = r_{XX}(k) = c_{XX}(k) + \mu_X^2 \tag{195}$$

Observație: Proprietățile funcțiilor de corelație și de intercorelație ale proceselor aleatorii se păstrează și-n cazul secvențelor aleatorii.

Fie $\mathbf{x}(n)$ un vector coloană cu cele N valori ale secvenței $X(n)$, $X(n\text{-}1)$, ..., $X(n\text{-}N\text{+}1)$:

$$\mathbf{x}(n) = \left[X(n)\ X(n-1)\ \ldots\ X(n-N+1)\right]^T \tag{196}$$

Se definește matricea de autocorelație a secvenței prin

$$\begin{aligned} \mathbf{R_{XX}} = \mathbf{R} &= E\left[\mathbf{x}(n)\cdot\mathbf{x}^T(n)\right] = \\ &= \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \ldots & r_{xx}(N-1) \\ r_{xx}(-1) & r_{xx}(0) & \ldots & r_{xx}(N-2) \\ \ldots & & \ldots & \\ r_{xx}(-N+1) & r_{xx}(-N+2) & \ldots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \ldots & r_{xx}(N-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \ldots & r_{xx}(N-2) \\ \ldots & & \ldots & \\ r_{xx}(N-1) & r_{xx}(N-2) & \ldots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{197}$$

Proprietățile matricei de autocorelație:

1). Elementele de pe diagonala principală sunt egale.

2). Transpusa matricii de cutocorelație este ea însăși, pe baza proprietății de simetrie a funcției de autocorelație:

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R} \tag{198}$$

3). Matricea **R** este Toeplitz, adică elementele de pe diagonala principală sunt egale și toate elementele de pe oricare altă diagonală, paralelă cu cea principală, sunt egale.

4). Matricea de corelație a unei secvențe staționare este pozitiv semidefinită

$$\mathbf{a}^H \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{a} > 0, \quad \forall coloana \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \tag{199}$$

Exemplu:

y = [2.3251 -1.8581 3.3628 3.3186 -1.8346];

ryy =[-0.8531 2.2250 -0.9034 -1.0995 **6.9092** -1.0995 -0.9034 2.2250 -0.8531];

Ryy =

6.9092	-1.0995	-0.9034	2.2250	-0.8531
-1.0995	**6.9092**	-1.0995	-0.9034	2.2250
-0.9034	-1.0995	**6.9092**	-1.0995	-0.9034
2.2250	-0.9034	-1.0995	**6.9092**	-1.0995
-0.8531	2.2250	-0.9034	-1.0995	**6.9092**

2.15.1. Calculul mediilor temporale a unei secvențe aleatorii

Fie mulțimea valorile înregistrate până la momentul de timp (N-1), $\{X(0), X(1),..., X(N-1)\}$[23], dintr-un interval de timp T. Valorile medii temporale se calculeaza cu relațiile:

1.Valoarea medie temporală

$$\mu_T(n) = \langle X_T(n) \rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X(i) \tag{200}$$

Pentru secvențe aleatorii staționare avem

$$\mu_T(n) = \mu_T \tag{201}$$

[23] Formulele pot fi definite similar și pentru secventa {$X(n)$, $X(n$-1),…, $X(n$-N+1)}. Considerarea numerotării directe conduce la o simplificare ușoară a expresiilor de calcul.

2. Valoarea medie pătratică temporală:

$$\left\langle X(n)^2 \right\rangle_T = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X^2(i) \tag{202}$$

3. Funcția de autocorelație temporală

$$r_{XX_T}(n_1, n_2) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X(i+n_1) X(i+n_2) \tag{203}$$

Pentru semnale staționare, r_{XX} depinde numai de diferența indicilor $k = n_2 - n_1$, deci

$$r_{uu_T}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X(i) X(i+k) \tag{204}$$

4. Funcția de autocovarianță temporală

$$c_{XX_T}(n_1, n_2) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[X(i+n_1) - \mu_T(i+n_1)\right] \cdot \left[X(i+n_2) - \mu_T(i+n_2)\right] \tag{205}$$

Pentru semnale staționare, depinde numai de diferența indicilor $k = n_2 - n_1$, deci

$$c_{XX_T}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[X(i) - \mu_T\right] \cdot \left[X(i+k) - \mu_T\right] \tag{206}$$

2.15.2. Funcția de autocorelație a secvențelor binare aleatorii

O secvență binară aleatorie este formată dintr-o succesiune de impulsuri dreptunghiulare de durata Δ, sau multiplu de Δ, cu amplitudini numai din două valori egal probabile, și independente de valorile anterioare. Fără a afecta generalitatea, se poate considera că valorile egal probabile sunt +1 și -1, așa cum se prezintă în fig. 19.

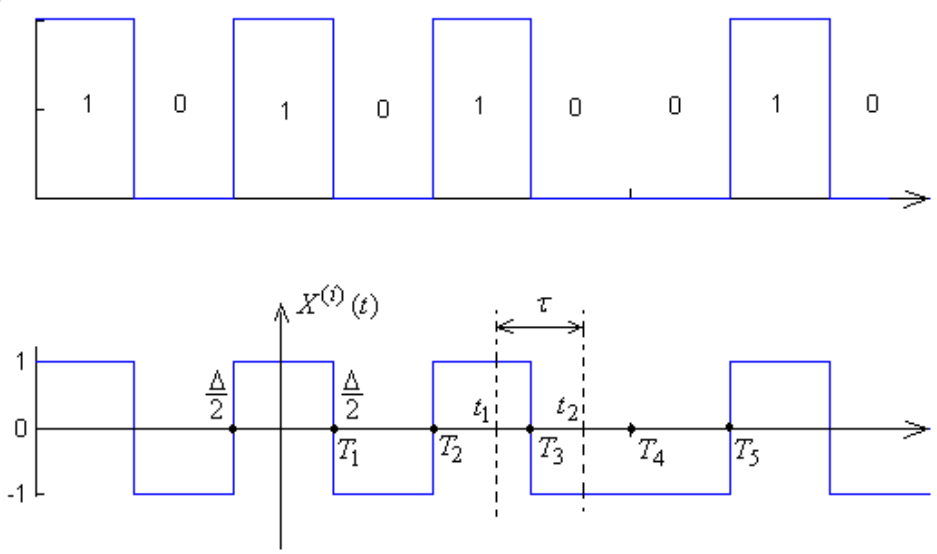


Fig. 19: Realizare particulară a unei secvențe binare aleatorii

Secvențele binare aleatorii se modelează prin procese aleatorii discrete în amplitudine. Momentele de timp în care pot avea loc tranziții se numesc *noduri* și sunt reprezentate în fig. 19 prin $T_1, T_2, ... < T_5$. Expresia[24] funcției de autocorelație este

$$R_{XX}(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\tau}{\Delta}, & \tau < \Delta \\ 0, & \tau \geq \Delta \end{cases} = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{\Delta}, & |\tau| < \Delta \\ 0, & |\tau| \geq \Delta \end{cases} \qquad (207)$$

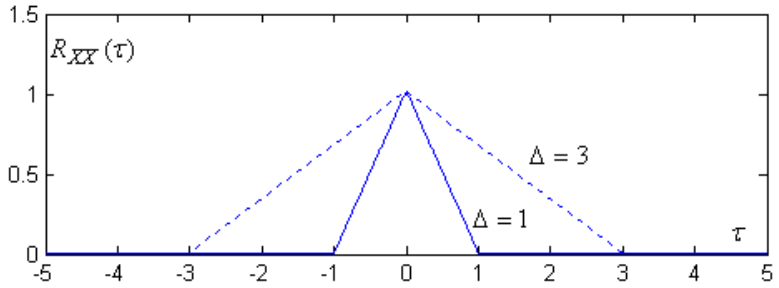


Fig. 20 : Funcția de autocorelație a unei secvențe binare aleatorii

Observații: 1). Se observă proprietatea de paritate a funcției de autocorelație.

[24] Calculul detaliat este prezentat în Anexă.

2). Întrucât autocorelația nu depinde de originea timpului, rezultă că semnalul aleatoriu binar analizat este staționar în sens larg. Pe măsură ce intervalul Δ se micșorează, funcția de autocorelație se apropie de un impuls Dirac care caracterizează zgomotul alb.

2.15.3. Densitatea spectrală de putere a secvențelor binare aleatorii

Densitatea spectrală de putere a secvenței binare aleatorii se deduce folosind teorema lui Wiener-Hincin:

$$S_{XX}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(\tau)\cdot cos(\omega\tau)\cdot d\tau \qquad (208)$$

întrucât densitatea spectrală de putere este o funcţie reală. Mai departe, prin prelucrări simple, se obține:

$$\begin{aligned}S_{XX}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta-|\tau|}{\Delta}\cdot cos(\omega\tau)\cdot d\tau=2\int_{0}^{\Delta}\frac{\Delta-\tau}{\Delta}\cdot cos(\omega\tau)\cdot d\tau=\\&=2\int_{0}^{\Delta}cos(\omega\tau)\cdot d\tau-\frac{2}{\Delta}\int_{0}^{\Delta}\tau\cdot cos(\omega\tau)\cdot d\tau\end{aligned} \qquad (209)$$

Considerând metoda de integrare prin părți, se poate scrie:

$$cos(\omega\tau)=\left[\frac{sin(\omega\tau)}{\omega}\right]' \qquad (210)$$

și [+] $S_{XX}(\omega)$ cu reprezentarea grafică din fig. 21.

[+] $1-cos\alpha=2sin^2(\alpha/2)$

$$S_{XX}(\omega)=2\int_0^{\Delta}\left[\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\right]'\cdot d\tau-\frac{2}{\Delta}\int_0^{\Delta}\tau\cdot\left[\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\right]'\cdot d\tau=$$

$$=2\cdot\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\Bigg|_0^{\Delta}-\frac{2}{\Delta}\left[\tau\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\Bigg|_0^{\Delta}-\int_0^{\Delta}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\cdot d\tau\right]=$$

$$=2\cdot\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\Bigg|_0^{\Delta}-\frac{2}{\Delta}\tau\cdot\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\Bigg|_0^{\Delta}+\frac{2}{\Delta}\int_0^{\Delta}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\cdot d\tau=$$

$$=\frac{2}{\omega}(\sin\omega\Delta-0)-\frac{2}{\omega\Delta}(\Delta\sin\omega\Delta-0)+\frac{2}{\Delta\omega^2}\int_0^{\Delta}[-\cos(\omega\tau)]\cdot d\tau= \tag{211}$$

$$=-\frac{2}{\Delta\omega^2}\cos(\omega\tau)\Bigg|_0^{\Delta}=-\frac{2}{\Delta\omega^2}(\cos(\omega\Delta)-1)=\frac{2}{\Delta\omega^2}\left[2\sin^2\frac{\omega\Delta}{2}\right]=$$

$$\Delta\left[\frac{\sin\frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}}\right]^2=\Delta\cdot\sin c^2\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$$

Densitatea spectrală de putere se anulează în punctele

$$\frac{\omega_k\cdot\Delta}{2}=\pm k\pi\rightarrow\omega_k=\pm k\frac{2\pi}{\Delta},\quad k=1,2,3,... \tag{212}$$

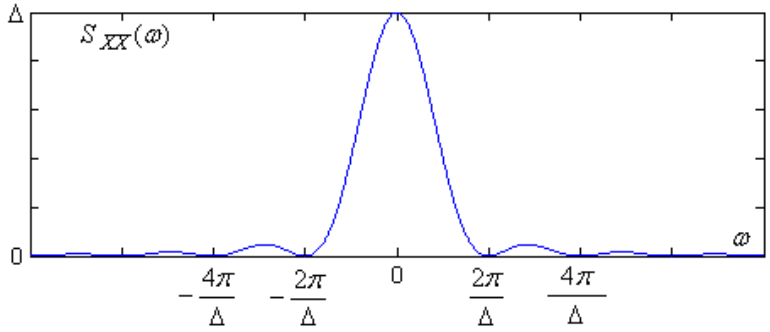


Fig. 21: Densitatea spectrală de putere a semnalului binar aleatoriu

2.15.4. Secvențe binare pseudo-aleatorii periodice

Secvența este formată dintr-o succesiune de impulsuri rectangulare de durată elementară Δ sau multiplu de Δ. O astfel de secvență este prezentată în fig. 22. Un interval elementar de timp corespunde unei valori a unei variabile aleatorii binare cu alfabetul {0,1}. O secvență pseudoaleatorie periodică se obține la ieșirea unor registre de deplasare având conexiunile de reacție întocmite după polinoame primitive[25].

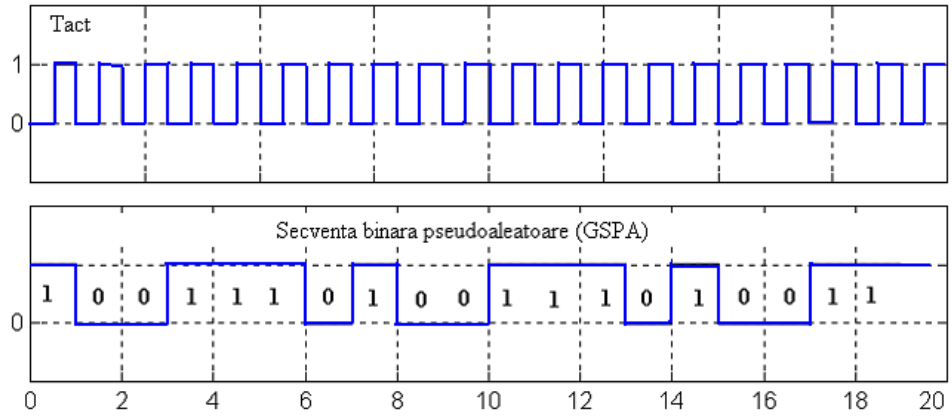


Fig. 22: Secvenţa pseudoaleatorie de lungime 7.

Prin lungimea (*perioada*) unei secvenţe, notată în continuare cu *n*, se înţelege numărul de simboluri după care secvenţa se repetă.

Secvenţele binare pseudoaleatorii sunt secvenţe binare, care prin structura şi proprietăţile lor se apropie de secvenţele aleatorii. În primul rând, secvenţele pseudoaleatorii au o lungime *n* finită, deci sunt repetabile. Pentru o aplicaţie la care se foloseşte o porţiune dintr-o secvenţă pseudoaleatorie, de lungime mai mică sau cel mult egală cu perioada secvenţei, se poate considera că porţiunea aleasă este aleatorii. Alte proprietăți sunt prezentate în Anexa.

Cele mai simple circuite numerice pentru generarea secvenţelor binare pseudoaleatorii sunt registrele de deplasare cu reacţie. Astfel, pentru a genera o secvenţă binară de lungime *n*, este nevoie de un registru de deplasare cu minimum *m* celule binare, după relaţia:

$$n \le 2^m - 1 \qquad (213)$$

[25] Vezi ”*Transmisia și codarea informației*”, capitolul “*Registre de deplasare cu reacție*”.

Având în vedere caracterul periodic al secvenței, $T=n.\Delta$, și Funcția de autocorelație va fi periodică, de aceeași perioadă. Funcția de autocorelație se calculează ca medie temporală cu relația:

$$R_{XX}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T SPA(t)\cdot SPA(t+\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{n\cdot\Delta}\int_0^{n\cdot\Delta} SPA(t)\cdot SPA(t+\tau)d\tau=\begin{cases}1-\dfrac{|\tau|}{\Delta}\left(1+\dfrac{1}{n}\right), & |\tau|\le\Delta\\ -\dfrac{1}{n}, & \Delta<|\tau|\le(n-1)\Delta\end{cases} \qquad (214)$$

și cu reprezentarea din fig. 22.

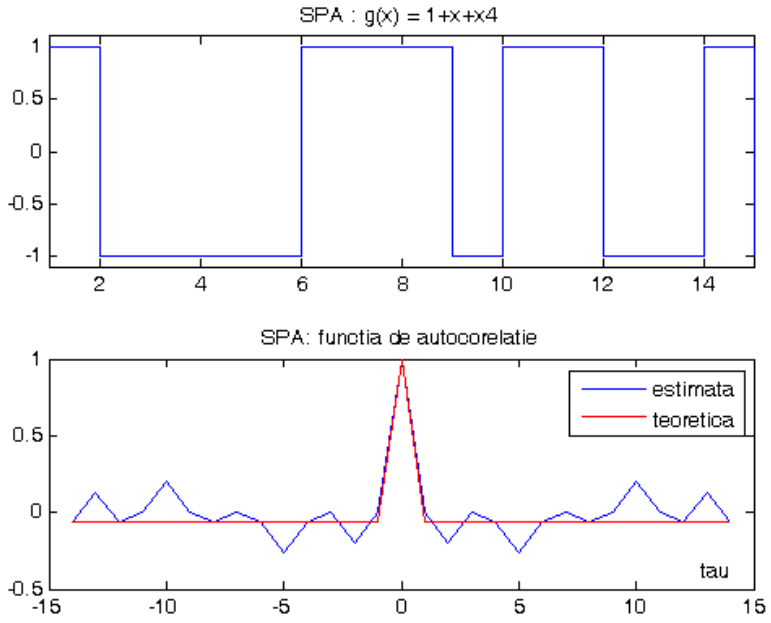


Fig. 23: Funcția de autocorelaţie a unei secvenţe pseudoaleatorii periodice

Secvența generată este:

SPA = [0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1]

pentru condiții inițiale $\boldsymbol{s_0}$ = [1 1 0 1]' și $\mathbf{g} = [g_0\ g_1\ g_2\ g_3]$ = [1 1 0 0]'. În practică, se preferă adesea conversia simbolurilor logice {0,1} în niveluri de tensiune {1,-1}. Se obține semnalul binar pseudoaleatoriu:

SPAN = [1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 -1]

Funcția de autocorelație a unei secvențe pseudoaleatorii periodice este cu atât mai apropiată de funcția unei secvențe aleatorii binare, cu cât lungimea secvenței *n* este mai mare. Secvențele pseudoaleatorii pot fi considerate cu bună aproximație zgomot alb la intrarea unor circuite[26], dacă perioada acestora $T=n.\Delta$ este de cel puțin 10 ori mai mică decât cea mai mică constantă de timp ce caracterizează circuitul respectiv.

2.15.5. Expresii practice pentru estimarea momentelor semnalelor discrete

Se consideră o secvență binară finită cu valorile $\{X(1), X(2),..., X(N)\}$. Se pune problema *estimării* momentelor statistice ale variabilei discrete *X* folosind cele *N* valori disponibile. Se folosește termenul de estimare întrucât calculul exact al momentelor ar presupune cunoașterea tuturor valorilor secvenței, ceea ce practic este imposibil fiindcă numărul de valori disponibile este întotdeauna finit.

1. Estimarea mediei: Media μ_X a unei secvențe aleatorii se estimează cu media aritmetică:

$$\hat{\mu}_X = \overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{215}$$

Mai rar, se mai folosesc estimatoarele

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{2}\left(X_{max} + X_{min}\right) \tag{216}$$

și mediana, adică valoarea secvenței care are probabilitate 0.5:

$$\hat{F}_{X/x_1,x_2,...,x_N}(x/x_1,x_2,...,x_N) = \frac{1}{2} \tag{217}$$

2. Estimarea dispersiei: Dispersia σ_X^2 a secvenței aleatorii *X* se estimează cu relațiile:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \mu\right)^2 \tag{218}$$

sau, dacă media nu se cunoaşte,

[26] Sisteme dinamice, în general.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad (219)$$

3. <u>Estimarea covarianței:</u> Covarianța σ_{XY} se estimează cu relația

$$\hat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \mu_X\right)\cdot\left(Y_i - \mu_Y\right) \qquad (220)$$

dacă se cunosc valorile reale (adevărate) ale mediilor. În caz contrar, prin

$$\hat{\sigma}_{XY} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \hat{\mu}_X\right)\cdot\left(Y_i - \hat{\mu}_Y\right) \qquad (221)$$

4. <u>Estimarea autocorelației</u>

Cu *n* valori se poate estima $R_{XX}(k)$ pentru valori ale lui *k* mai mici decât *n*, adică:

$$\hat{R}_{xx}^{(1)}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{i=0}^{N-k-1} X(i)\cdot X(i+k), \quad k = 0,1,...,n-1 \qquad (222)$$

Acesta este echivalent cu trunchierea estimatorului pentru $|k| \geq N$, așa cum se arată în fig. 24. Pe măsură ce $k \to N$, numărul de puncte folosite în estimare scade din ce în ce mai mult pentru a estima $R_{XX}(k)$ și de aceea se face normarea la (*N*-*k*) și nu la *N*. Estimatul $\hat{R}_{XX}^{(1)}(k)$ se numește <u>nedeplasat</u> (<u>*biased*</u>).

Alt estimator (tot deplasat) foloseste relația

$$\hat{R}_{XX}^{(2)}(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-k-1} X(i)\cdot X(i+k), \quad k = 0,1,...,N-1 \qquad (223),$$

însă are o precizie de estimare mai mică către capetele intervalului. Legătura dintre cele două estimatoare este dată de un factor $(N-k)/N$:

$$\hat{R}_{xx}^{(2)}(k) = \frac{N-k}{N}\cdot\hat{R}_{xx}^{(1)}(k), \quad k = 0,1,...,N-1 \qquad (224)$$

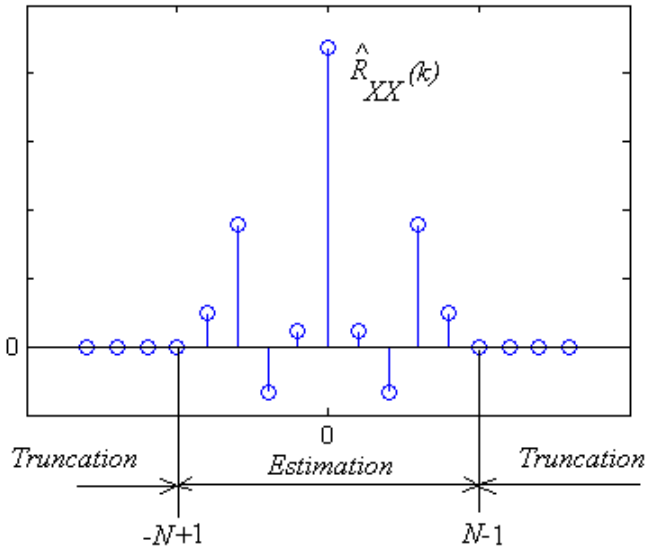


Fig. 24: Trunchierea estimării funcției de autocorelație

5. Estimarea densității spectrale de putere

5.1 Estimarea indirectă (via corelație). Densitatea spectrală de putere se estimează indirect cu estimatul $\hat{S}_{XX}(f)$:

$$\hat{S}_{XX}^{(1)}(\omega)=\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\hat{R}_{XX}(k)\cdot e^{-j\omega\cdot k},\quad |f|<\frac{1}{2} \tag{225}$$

unde

$$\hat{R}_{XX}(k)=\frac{1}{n-k}\sum_{i=0}^{n-k-1}X(i)\cdot X(i+k),\quad k=0,1,2,\ldots,n-1 \tag{226}$$

este estimatul autocorelației, definit în secțiunea anterioară. Reprezentarea (121) în domeniul frecvență se numește corelogramă.

5.2 Estimarea directă (cu periodograma via DFT): Se folosește relația directă

$$\hat{S}_{XX}^{(2)}(\omega)=\frac{1}{N\cdot T_s}\left|X_F(\omega)\right|^2,\quad |\omega|<\pi \tag{227}$$

unde $X_F(\omega)$ este transformata Fourier a secvenței de date,

$$X_F(\omega)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}X(i)\cdot e^{-j\omega\cdot i}=\sum_{i=0}^{N-1}X(i)\cdot e^{-j\omega\cdot i} \tag{228}$$

Estimatul $\hat{S}_{XX}^{(2)}(f)$, definit de relația (140), se numește periodograma secvenței de date $X(1), X(2), ..., X(n)$.

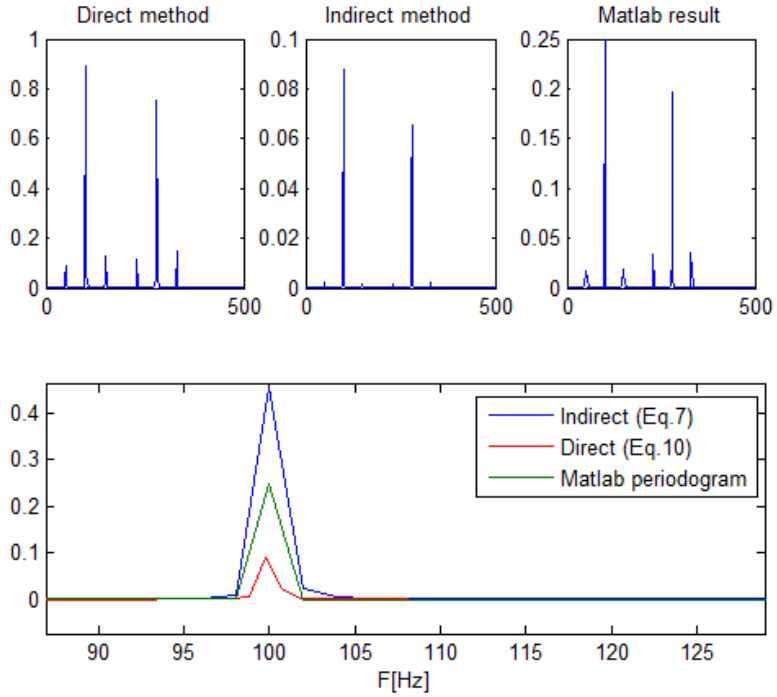
Exemplu: Să se calculeze și să se reprezinte grafic estimatoarele densității spectrale de putere pentru secvența obținută din semnalul

$$X(t) = (1 + 0.8 * m(t)) \cdot sin(\omega_1 t) + (1 + 0.8 m(t)) \cdot cos(\omega_2 t),$$

cu

$$m(t) = sin(2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot t)$$

Soluție: S-au implementat două estimatoare pentru densitatea spectrală de putere, după ecuațiile (121) și (122). Ambele au fost comparate cu rezultate generate de o funcție specializată Matlab pentru estimarea dsp. Rezultatele din figură sunt obținute prin trei metode. Codul sursă pentru estimatoare este prezentat în Anexa 2.



Estimări ale densității spectrale de putere a secvenței *X(k)*

Exercițiu propus:

Fie secvența aleatorie

x = [0.294, -1.336, 0.714, 1.623, -0.691, 0.858, 1.254, -1.593, -1.441, 0.571]

Să se calculeze media, dispersia (2 relații), funcția de autocorelație (2 relații) și densitatea spectrală de putere (2 relații) și – după caz – să se reprezinte grafic. (*Indicație:* Pentru autocorelație și dsp se pot scrie/folosi programe (Matlab) pentru calcul și reprezentare grafică).

Concluzii

Mulțimea de semnale reprezentată prin $X(t) = \left\{ X^{(k)}(t), k = 1,2,... \right\}$ este proces aleatoriu și $X^{(k)}(t)$ este o realizare a procesului aleatoriu, deci un semnal aleatoriu. Pentru o valoare fixată a timpului, se obține o serie de timp cu valori aleatorii, deci o variabilă aleatorie dată de valorile realizărilor procesului la momentul de timp considerat.

Diferența dintre o variabilă aleatorie și un proces aleatoriu este că ultimul conține mai multe variabile aleatorii, ca urmare a evoluției în timp a acestora.

Asemănarea dintre o variabilă aleatorie și un proces aleatoriu este că ambele au același model probabilistic (aceeași lege de repartiție a probabilității).

Staționaritatea joacă un rol important în descrierea proceselor aleatorii și descrie invarianța în timp a anumitor proprietăți statistice ale procesului aleatoriu. Există două tipuri de staționaritate: în sens strict (SSS) și în sens larg (SSL). Un proces aleatoriu este staționar în timp sau staționar în sens strict (SSS) dacă toate funcțiile de distribuție ce descriu procesul sunt invariante (nu se modifică) la o translație a axei timpului. Un proces aleatoriu *X(t)* este staționar în sens larg sau staționar până la ordinul doi, dacă media sa este constantă și funcția de autocorelație depinde numai de diferența de timp.

Funcțiile de corelație caracterizează procesul aleatoriu în domeniul timp. Cu cât procesul aleatoriu are valori mai independente, cu atât funcția de corelație are un maximum mai pronunțat. Funcția de autocorelație a proceselor SSL are proprietățile următoare: depinde numai de diferența de timp, este maximă în origine, este o funcție pară, tinde la o constantă, când $\tau \to \infty$, și este continuă în origine. Funcția de intercorelație a proceselor SSL are proprietățile următoare: depinde numai de diferența de timp, este marginită superior, are un singur maxim, și este asimetrică.

Marea majoritate a proceselor aleatorii din practica inginerească sunt discrete, în timp și amplitudine. Denumirea corectă este de secvențe (serii) aleatorii discrete (în amplitudine). Momentele statistice se calculează cu relații similare celor din cazul timp continuu.

Capitolul 3 – Descrierea canalelor continue de transmisiune

Cuprins

Descrierea statistică a canalelor continue
Descrierea timp-frecvență
Calculul mediei ieşirii canalului
Calculul autocorelaţiei ieşirii canalului
Calculul funcţiei de corelaţie dintre ieşirea şi intrarea canalului
Funcţia densitate spectrală de putere a ieşirii canalului
Puterea medie a ieşirii canalului
Banda echivalentă de zgomot
Descrierea informaţională a surselor continue
Surse continue de informaţie
Informaţia semnalelor continue discretizate
Entropia surselor continue
Entropia surselor continue limitate în amplitudine
Entropia surselor continue de putere limitată
Descrierea informaţională a canalelor continue
Capacitatea canalului continuu
Capacitatea canalului aditiv
Capacitatea canalului aditiv cu zgomot alb aussian
Valoarea maximă a capacităţii canalului continuu
Concluzii

3.1. Descrierea statistică a canalelor continue

3.1.1. Descrierea timp-frecvență a canalelor continue

Canalul de transmisiune se consideră liniar, constant în timp, fără memorie şi cauzal. În domeniul timp, relaţia intrare-ieşire ce caracterizează un sistem liniar, invariant în timp, având la intrare semnal determinist *x(t),* este o integrală de convoluţie:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\cdot h(\tau)d\tau=x(t)*h(t) \quad (229)$$

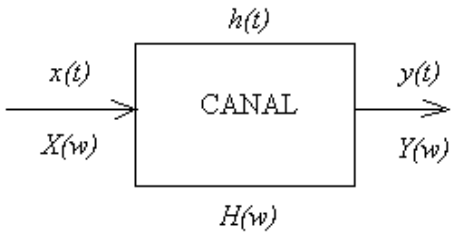


Fig. 1: Canal continuu de transmisiune

unde *h(t)* este răspunsul la impuls al circuitului, în condiţii iniţiale nule.

Pentru sisteme cauzale stabile sunt adevărate relaţiile:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)\}d\tau < \infty \qquad (130)$$

şi

$$h(\tau) = 0, \qquad \tau < 0 \text{ (cauzalitate)} \qquad (221)$$

În domeniul frecvenţă, legătura intrare-ieşire este exprimată prin relaţia:

$$Y_F(\omega) = H(\omega) \cdot X_F(\omega) \qquad (232)$$

Prin indicele *F* s-a indicat că respectivele mărimi sunt transformate Fourier, iar *y(t)* şi $Y_F(w)$ sunt perechi Fourier ca şi perechea $\{x(t), X_F(w)\}$.

Când la intrarea canalului se aplică un proces aleatoriu *X(t),* ieşirea canalului va fi:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau) \cdot h(\tau)d\tau = X(t) * h(t) \qquad (233)$$

Relaţia (233) trebuie citită în termeni de realizări ale proceselor aleatorii.

3.1.2 . Calculul mediei ieşirii canalului

Presupunem un proces aleatoriu *X(t)* cu valori reale, aplicat la intrarea canalului. Folosind proprietatea de liniaritate a operatorilor de integrare şi de mediere, se pot scrie relaţiile:

$$\mu_Y(t) = E\{Y(t)\} = E\{X(t) * h(t)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau)h(\tau)d\tau\right\} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t-\tau)\}h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_X(t-\tau) \cdot h(\tau)d\tau \qquad (234)$$

Dacă procesul aleatoriu *X(t)* este staţionar în sens larg, media nu depinde de timp, astfel încât relaţia anterioare devine:

$$\mu_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_X \cdot h(\tau)d\tau = \mu_X \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = \mu_X \cdot H(0) \qquad (235)$$

Deci

$$\mu_Y = \mu_X \cdot H(0) \qquad (236)$$

Se constată că media procesului *Y(t)* nu depinde de timp.

3.1.3. Calculul autocorelaţiei ieşirii canalului

Presupunem un proces aleatoriu *X(t)* cu valori reale, aplicat la intrarea canalului. Folosind proprietatea de liniaritate a operatorilor de integrare şi de mediere, funcția de autocorelație a ieșirii canalului este:

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1,t_2) &= E\{Y(t_1)\cdot Y(t_2)\} = \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(t_1-\tau_1)h(\tau_1)X(t_2-\tau_2)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t_1-\tau_1)X(t_2-\tau_2)\}h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \qquad (237)$$

Dacă procesul aleatoriu *X(t)* este staţionar în sens larg, autocorelația depinde numai de diferența de timp, astfel încât relaţia anterioară se simplifică astfel:

$$R_{YY}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}[(t_2-t_1)-(\tau_2-\tau_1)]h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \qquad (238)$$

Întrucât integrala nu depinde decât de diferenţa de timp t_2-t_1, autocorelaţia $R_{YY}(t_1, t_2)$ va fi de asemenea dependentă numai de diferenţa de timp t_2-t_1. Considerând notaţia $\tau = t_2 - t_1$ rezultă:

$$R_{YY}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}[\tau-(\tau_2-\tau_1)]\cdot h(\tau_1)\cdot h(\tau_2)\cdot d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(\tau+\tau_1-\tau_2)\cdot h(\tau_2)\cdot d\tau_2\right]\cdot h(\tau_1)d\tau_1= \qquad (239)$$

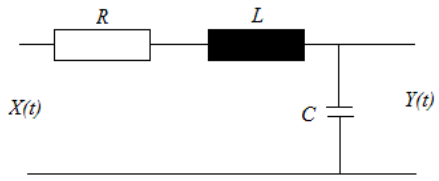
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[R_{XX}(\tau+\tau_1)*h(\tau+\tau_1)\right]\cdot h(\tau_1)d\tau_1=R_{XX}(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$$

Relația finală este

$$R_{YY}(\tau)=R_{XX}(\tau)*h(\tau)*h(-\tau) \qquad (240).$$

Se constată că autocorețatia ieșirii canalului depinde numai de diferența momentelor de timp. Se poate formula concluzia: *procesul aleatoriu de la ieşirea canalului, Y(t), este staţionar în sens larg dacă procesul aplicat la intrare este staţionar în sens larg.*

<u>Exerciţiu 1:</u> Fie un canal de transmisiune cu modelul RLC din figura alăturată. La intrarea canalului se aplică un proces aleatoriu *X(t)* staționar în sens larg cu media $\mu_X=2$ și autocorelația $R_{XX}(\tau)=4+exp(-2|\tau|)$. Să se calculeza media și densitatea spectrala de putere la ieșirea canalului, $S_{YY}(\omega)$.



<u>Soluție</u>: Funcția de transfer a canalului

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1/j\omega C}{R+j\omega L+1/j\omega C}=\frac{1}{j\omega RC-\omega^2 LC+1}$$

Media ieșirii este

$$\mu_Y=H(0)\cdot\mu_X=1\cdot 2=2$$

Densitatea spectrală de putere la ieșirea canalului

$$S_{YY}(\omega)=|H(\omega)|^2\cdot S_{XX}(\omega),$$

unde

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)\cdot H(\omega)^* = \frac{1}{1-\omega^2 LC + j\omega RC}\cdot\frac{1}{1-\omega^2 LC - j\omega RC} =$$

$$= \frac{1}{1-\omega^2 LC + (\omega RC)^2}$$

Densitatea spectrală de putere la intrarea canalului este

$$S_{XX}(\omega) = F\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(4+e^{-2|\tau|}\right)\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau =$$

$$= 4\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}\,d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{2\cdot\tau}\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\tau}\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau =$$

$$= 4\cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{e^{(2-j\omega)\tau}}{2-j\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(2+j\omega)\tau}}{2+j\omega}\Bigg|_{0}^{\infty} = 4\cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2-j\omega}(1-0) - \frac{1}{2-j\omega}(0-1) =$$

$$= 4\cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{4}{4+\omega^2}$$

Rezultă

$$S_{YY}(\omega) = \frac{1}{1-\omega^2 LC + (\omega RC)^2}\left(8\pi\delta(\omega) + \frac{4}{4+\omega^2}\right)$$

3.1.4. Calculul funcţiei de corelaţie dintre ieșirea şi intrarea canalului

Funcţia de corelaţie a procesului aleatoriu de la ieşire *Y(t)* cu procesul aleatoriu de la intrare *X(t)*, ambele staționare în sens larg, este:

$$R_{YX}(\tau) = E\{Y(t)X(t+\tau)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} X(t-\tau_1)h(\tau_1)X(t+\tau)\,d\tau_1\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t-\tau_1)X(t+\tau)\}h(\tau_1)\,d\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau+\tau_1)h(\tau_1)\,d\tau_1 = \quad (241)$$

$$= R_{XX}(-\tau) * h(-\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$$

Rezultă

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) \tag{242}$$

Funcţia de intercorelaţie dintre procesul *X(t)* şi *Y(t)* este:

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) = R_{XX}(-\tau) * h(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) \tag{243}$$

deci, relaţia finală:

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) \tag{244}$$

3.1.5. Funcţia densitate spectrală de putere a ieşirii canalului

Aplicând transformata Fourier relaţiei (241) se obţine, în baza teoremei Wiener-Hincin, densitatea spectrală de putere a ieşirii:

$$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \tag{245}$$

Relaţia este foarte importantă în analiza frecvenţială a canalelor "atacate" de procese aleatorii. Relaţia arată că o componentă spectrală aplicată la intrare este modificată proporţional cu pătratul modulului funcţiei de transfer la frecvenţa considerată. Din acest motiv, $|H(\omega)|^2$ se mai numeşte *funcţie de transfer în putere,* fiind raportul a două densităţi spectrale de putere.

Relaţia dintre funcţia densitate spectrală de putere de interacţiune $S_{YX}(\omega)$ şi funcţia de intercorelaţie $R_{XX}(\tau)$ se obţine în mod similar, plecând de la relaţia (244):

$$S_{YX}(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot H^*(\omega) \tag{246}$$

unde *H*(w)* este conjugata lui *H(w).*

Relaţia dintre funcţia densitate spectrală de putere de interacţiune $S_{XY}(w)$ şi funcţia de intercorelaţie $R_{XX}(\tau)$ se obţine plecând de la relaţia (232):

$$S_{XY}(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot H(\omega) \tag{247}$$

3.1.6. Calculul puterii medii la ieşirea canalului

Valoarea puterii medii la ieșirea canalului, *Y(t)*, disipată pe o rezistență unitară, este egală cu valoarea pătratică medie a ieşirii canalului. Valoarea pătratică medie se calculează cu relația

$$E\{Y^2(t)\} = R_{YY}(0) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(\omega)\cdot d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\cdot |H(\omega)|^2 d\omega \qquad (248)$$

3.1.7. Banda echivalentă de zgomot

Filtrele electronice se utilizează pentru atenuarea semnalelor nedorite şi a zgomotelor şi pentru selectarea semnalului util. În aplicaţiile practice se folosesc funcţii de transfer care se abat de la forma ideală, aşa cum se indică în fig. 2. Din punctul de vedere al benzii de frecvenţă se foloseşte cel mai des banda la 3dB, ce corespunde cu jumătate din puterea semnalului de la intrare.

În general, banda de frecvenţă poate fi definită şi la un alt nivel de putere sau la îndeplinirea altor restricţii. De exemplu, se poate calcula banda B_N pentru care filtrul real şi filtrul ideal produc aceeaşi putere la ieşire, când sunt excitate de acelaşi semnal de intrare.

Fie un filtru trece-jos ideal, la intrarea căruia se aplică zgomot alb, deci un proces aleatoriu cu densitate spectrală de putere constantă, de exemplu $N_0/2$, pentru toate frecvenţele. Puterea medie la ieșirea filtrelor este:

$$P_Y = E\{Y^2(t)\} = \begin{cases} \frac{N_0}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega, & \text{pentru filtrul real} \\ \frac{N_0}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot|H(0)|^2\cdot 2(2\pi B_N), & \text{pentru filtrul ideal} \end{cases} \qquad (249)$$

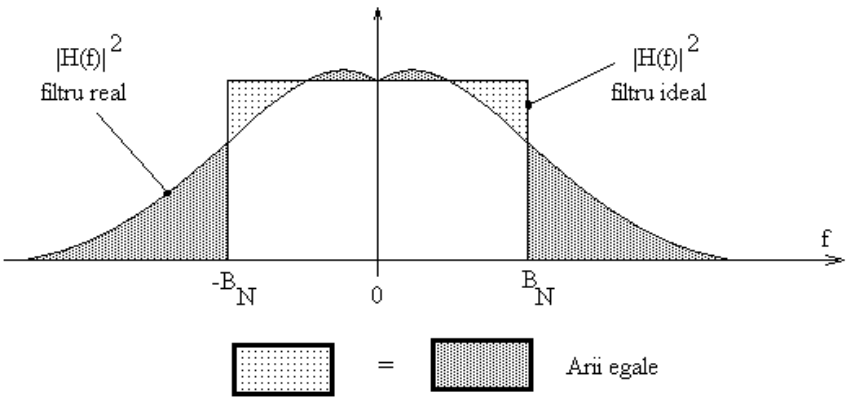


Fig. 2: Caracteristicile spectrelor de putere ale filtrelor ideale şi reale

Egalând puterile de ieşire ale celor două filtre, se obţine

$$B_N = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \Big/ 4\pi |H(0)|^2 \qquad (250)$$

Valoarea B_N, astfel calculată, se numeşte *bandă echivalentă de zgomot.* Din punct de vedere grafic, banda echivalentă de zgomot este abscisa pentru care ariile de sub curbele filtrelor real şi ideal sunt egale.

3.1.8. Metodă de calcul a integralelor functiilor raționale

Evaluarea integralei (250) de mai sus, cu excepţia unor cazuri simple, este o problemă dificilă, din cauza caracterului raţional al funcţiei de transfer. Metoda care se descrie în continuare se numeşte *metoda factorizării spectrale* şi permite calculul rapid al integralei pe baza unor rezultate tabelate. Astfel, dacă se face ipoteza că $R_{XX}(\tau)$ poate fi exprimată ca o sumă de exponenţiale complexe, deci $S_{XX}(\omega)$ va fi o funcţie raţională de ω, atunci evaluarea integralei este simplificată. Întrucât $S_{XX}(\omega)$ este o funcţie pară, se poate scrie sub forma:

$$S_{XX}(s) = \frac{a(s) \cdot a(-s)}{b(s) \cdot b(-s)} \qquad (251)$$

unde *a(s)/b(s)* are toţi polii şi zerourile în partea stângă a planului *s* şi *a(-s)/b(-s)* are toate rădăcinile în semiplanul drept. Nu se admit rădăcini complexe ale lui *b(s)* pe axa imaginară. Aceeaşi descompunere se consideră

şi pentru factorul ce conţine pe $H(\omega)$. Prin schimbarea de variabilă $s = j\omega = j \cdot 2\pi f$ puterea medie totală este

$$E\{Y^2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(s) \cdot c(-s)}{d(s) \cdot d(-s)} ds \tag{252}$$

unde s-a considerat:

$$\frac{c(s) \cdot c(-s)}{d(s) \cdot d(-s)} = S_{XX}(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H^*(\omega)\Big|_{\omega = \frac{s}{j}} \tag{253},$$

iar *c(s)* şi *d(s)* conţin toate rădăcinile din semiplanul stâng. Valorile integralelor de forma (252) sunt tabelate (vezi, de exemplu, *Shanmugan*, 1988). Astfel, considerând

$$c(s) = c_0 + c_1 s + ... + c_{n-1} s^{n-1} \tag{254}$$

$$d(s) = d_0 + d_1 s + ... + d_n s^n \tag{255}$$

sunt valabile următoarele relaţii:

$$I_1 = \frac{c_0^2}{2 d_0 d_1} \tag{256}$$

$$I_2 = \frac{c_1^2 \cdot d_0 + c_0^2 \cdot d_2}{2 \cdot d_0 \cdot d_1 \cdot d_2} \tag{257}$$

$$I_3 = \frac{c_2^2 \cdot d_0 \cdot d_1 + (c_1^2 - 2 \cdot c_0 \cdot c_2) d_0 d_3 + c_2^2 \cdot d_2 \cdot d_3}{2 \cdot d_0 \cdot d_3 \cdot (d_1 d_2 - d_0 d_3)} \tag{258}$$

$$I_4 = \frac{1}{2 \cdot d_0 \cdot d_4 \cdot (-d_0 d_3^2 - d_4 d_1^2 + d_1 d_2 d_3)} \cdot \left[c_3^2 \cdot (-d_3 \cdot d_0^2 + d_0 d_1 d_2) + (c_2^2 - 2 \cdot c_1 \cdot c_3) d_0 d_1 d_4 + (c_1^2 - 2 \cdot c_0 \cdot c_2) d_0 d_3 d_4 + c_0^2 \cdot (-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4) \right] \tag{259}$$

Exemplu*:* Să se calculeze banda echivalentă de zgomot a unui filtru trece jos de ordinul unu de tip Butterworth, descris prin pătratul modulului funcţiei de transfer

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/2\pi B)^{2\cdot n}} = \frac{1}{1+(\omega/2\pi B)^2}$$

Soluţie*:*

$$B_N = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{2\pi B}\right)^2}d\omega$$

Se face schimbarea de variabilă : $s = j\omega$, $d\omega = ds/j$ si

$$B_N = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{1}{1-\frac{s^2}{(2\pi B)^2}}\frac{ds}{j} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\pi j}\cdot\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{1}{1+\frac{s}{2\pi B}}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{2\pi B}}ds\right) = \frac{1}{2}\cdot I_1$$

Prin identificare se obţin:

$$c(s) = c_0 + c_1 s + ... + c_{n-1}s^{n-1} = c_0 = 1$$

$$d(s) = d_0 + d_1 s + ... + d_n s^n = d_0 + d_1 s = 1 + \frac{1}{2\pi B}s$$

deci

$$n=1,\ c_0=1,\ d_0=1,\ d_1=1/(2\pi B).$$

Rezultă valoarea integralei:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{c(s)\cdot c(-s)}{d(s)\cdot d(-s)}ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{1}{1+\frac{s}{2\pi B}}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{2\pi B}}ds =$$

$$= \frac{c_0^2}{2d_0d_1} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot\frac{1}{2\pi B}} = \pi B$$

$$B_N = \frac{1}{2} \cdot I_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi B = \frac{\pi}{2} \cdot B$$

Se poate demonstra că banda echivalentă de zgomot a unui filtru trece jos de ordinul *n* de tip Butterworth, descris prin

$$|H(\omega)|^2 = 1 / \left(1 + \left(\omega / 2\pi \cdot B\right)^{2 \cdot n}\right)$$

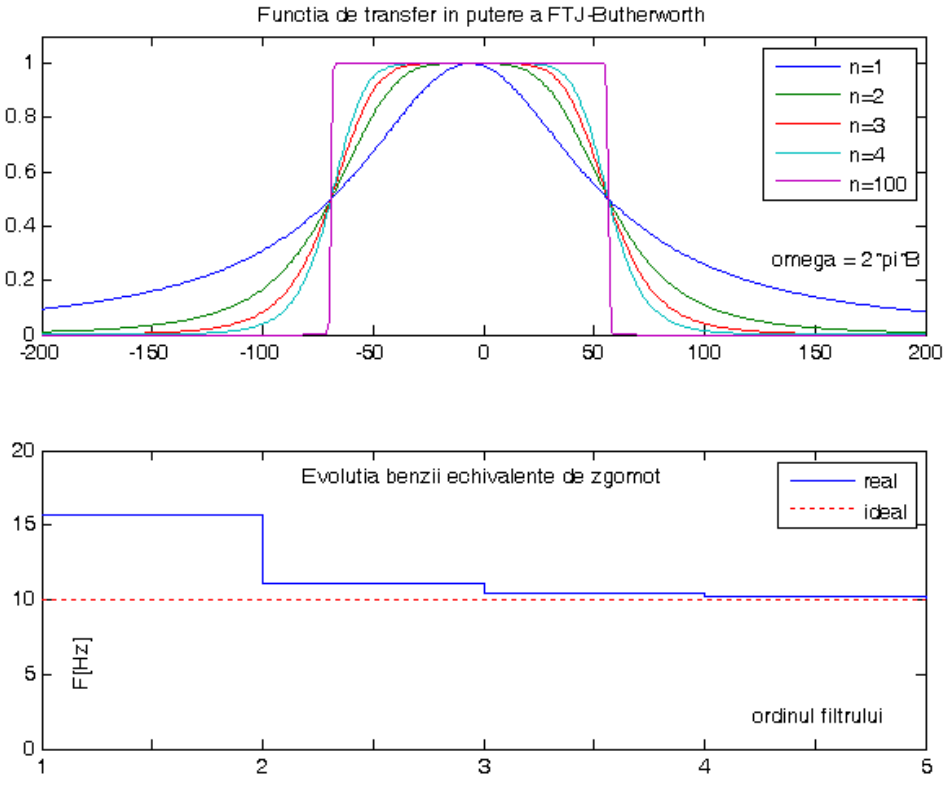
este

$$B_N = B \cdot \left[\frac{\pi}{2 \cdot n} \cdot \frac{1}{\sin[\pi/(2n)]}\right]$$

Când $n \to \infty$, filtrul de ordinul *n* tinde la un filtru trece jos ideal cu banda *B* :

$$\lim_{n \to \infty} B_N = \lim_{n \to \infty} \frac{\pi \cdot B}{2 \cdot n} \cdot \frac{1}{\sin[\pi/(2n)]} = \lim_{n \to \infty} \frac{B}{\sin c[\pi/(2n)]} = B$$

Un exemplu obținut prin simulare numerică este prezentat în figura următoare:



Exerciţiu (1): Un canal de transmisiune are funcţia de transfer de tip trece jos cu expresia $H(\omega) = \frac{1}{1 + j\,\omega/\omega_0}$. La intrarea canalului se aplică semnalul $X(t) = s(t) + N(t)$, unde $s(t) = A\sin(\omega_p t)$, A şi ω_p sunt constante, şi $N(t)$ este un zgomot alb, cu medie zero, cu densitatea spectrală de putere $S_{NN}(\omega) = N_0/2$. $\omega_0 = 2\omega_p$. Se cere:

a). Să se calculeze densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieşirea canalului.

b). Sa se reprezinte grafic densitatile spectrale de putere la intrarea si la iesirea canalului;

Soluţie: 1). Se foloseşte relaţia

$$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

Funcţia de transfer în putere este

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega) \cdot H(\omega)^* = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \cdot \frac{1}{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Funcţia densitate spectrală de putere a intrării se calculează prin teorema Wiener-Hincin:

$$S_{XX}(\omega) = F\{R_{XX}(\tau)\}$$

Funcţia de autocorelaţie este

$$R_{XX}(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} = E\{[s(t) + N(t)] \cdot [s(t+\tau) + N(t+\tau)]\} =$$
$$= E\{S(t) \cdot S(t+\tau)\} + E\{S(t) \cdot N(t+\tau)\} + E\{N(t) \cdot S(t+\tau)\} + E\{N(t) \cdot N(t+\tau)\} =$$
$$= R_{SS}(\tau) + R_{SN}(\tau) + R_{NS}(t+\tau) + R_{NN}(\tau)$$

Termenii din ultima expresie sunt[27] :

[27] $\sin\alpha \cdot \sin\beta = [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]/2$.

$$R_{SS}(\tau) = E\{S(t)\cdot S(t+\tau)\} = E\{[A\sin(\omega_p t]\cdot[A\sin(\omega_p(t+\tau)]\} =$$

$$= A^2\cdot E\{\sin(\omega_p t)\cdot\sin(\omega_p(t+\tau)\} = \frac{A^2}{2}E\{\cos(\omega_p\tau)-\cos(2\omega_p t+\omega_p\tau)\} =$$

$$= \frac{A^2}{2}E\{\cos(\omega_p\tau)\} - \frac{A^2}{2}E\{\cos(2\omega_p t+\omega_p\tau)\} = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_p\tau) - \frac{A^2}{2}\cdot 0 =$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_p\tau)$$

Termenii 2 şi 3 sunt zero întrucât reprezintă funcții de corelație a unor semnale independente :

$$R_{SN}(\tau) = R_{NS}(\tau) = 0$$

Funcția de intercorelație a zgomotului este:

$$R_{NN}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}d\omega = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Rezultă:

$$R_{XX}(\tau) = R_{SS}(\tau) + R_{NN}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_p\tau) + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Densitatea spectrală de putere la intrarea canalului [28] este:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{A^2}{2}\cos(\omega_p\tau) + \frac{N_0}{2}\delta(\tau)\right]e^{-j\omega\tau}d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{A^2}{2}\cos(\omega_p\tau)\right]e^{-j\omega\tau}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{N_0}{2}\delta(\tau)\right]e^{-j\omega\tau}d\tau =$$

$$= \frac{A^2}{2}\pi[\delta(\omega+\omega_p)+\delta(\omega-\omega_p)] + \frac{N_0}{2}$$

Rezultă densitatea spectrală de putere la ieșirea canalului:

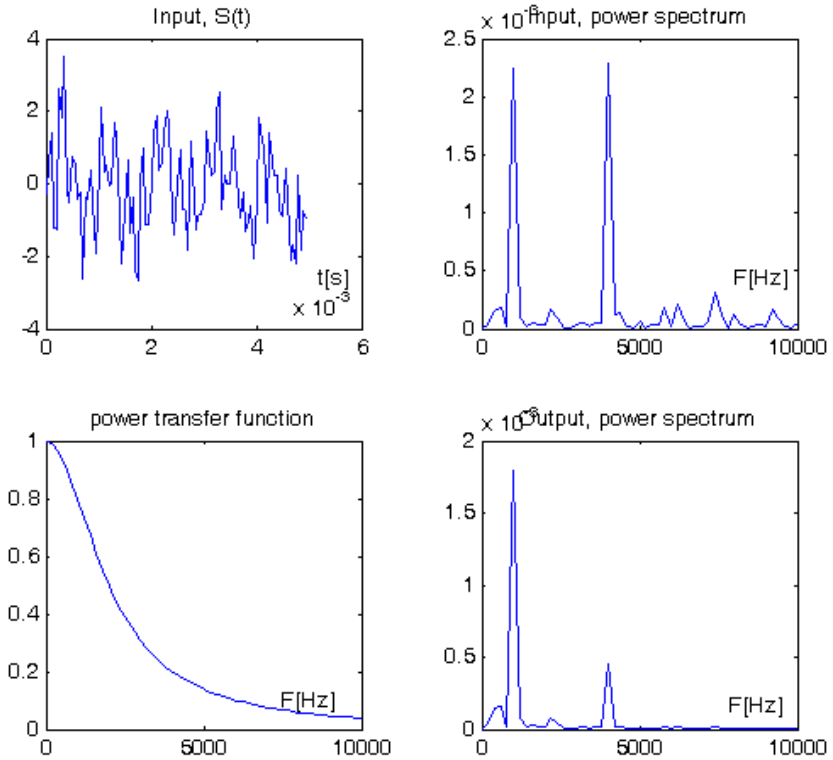
[28] $F\{\cos(\omega_0 t+\theta)\} = \pi\left[e^{j\theta}\delta(\omega-\omega_0)+e^{-j\theta}\delta(\omega+\omega_0)\right]$; $F\{\delta(t)\}=1$.

$$S_{YY}(\omega)=\left[\frac{A^2}{2}\pi\left[\delta(\omega+\omega_p)+\delta(\omega-\omega_p)\right]+\frac{N_0}{2}\right]\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}=$$

$$=\frac{A^2}{2}\delta(\omega+\omega_p)\cdot\frac{\pi}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}+\frac{A^2}{2}\delta(\omega-\omega_p)\cdot\frac{\pi}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}+\frac{N_0/2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}=$$

$$=\pi\frac{A^2}{2}\delta(\omega+\omega_p)+\pi\frac{A^2}{2}\delta(\omega-\omega_p)+\frac{N_0/2}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

cu reprezentarea grafică din figura de mai jos, cu observația că s-au considerat două componente deterministe pentru intrare, la frecventele ω_0 și $4\omega_0$.



Exercițiu (2): Un proces alb cu funcția de autocorelație $R_{XX}(\tau)=(N_0/2)\cdot\delta(\tau)$ este aplicat unui filtru cu răspunsul la impuls $h(t)=\alpha e^{-\alpha t}, t\geq 0, \alpha>0$ și $h(t)=0, t<0$. Să se calculeze autocorelația ieșirii filtrului, $R_{YY}(\tau)$.

Soluție: 1). Se folosește relația

$$S_{YY}(\omega)=S_{XX}(\omega)\cdot|H(\omega)|^2$$

Se calculează $H(j\omega)$ ca transformata Fourier a răspunsului la impuls:

$$H(\omega)=F\{h(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}\alpha e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\alpha\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+j\omega)t}dt=$$
$$=-\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}\left[e^{-\infty}-1\right]=\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}$$

Densitatea spectrală de putere la intrarea filtrului este

$$S_{XX}(\omega)=F\{R_{XX}(\tau)\}=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XX}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\cdot\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\frac{N_0}{2}$$

Rezultă densitatea spectrală de putere:

$$S_{YY}(\omega)=\frac{N_0}{2}\cdot|H(j\omega)|^2=\frac{N_0}{2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}\cdot\frac{\alpha}{\alpha-j\omega}=\frac{N_0}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

Autocorelația ieșirii filtrului se poate calcula ca transformata Fourier inversă a densității spectrale de putere, anterior calculată:

$$R_{YY}(\tau)=F^{-1}\{S_{YY}(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{YY}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}e^{j\omega\tau}d\tau=\frac{N_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}e^{j\omega\tau}d\tau$$

Folosind perechea Fourier

$$\exp(-a|t|) \quad <-> \quad \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Se obține

$$R_{YY}(\tau)=\frac{N_0\alpha}{4}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}e^{j\omega\tau}d\tau=\frac{N_0\alpha}{4}\cdot e^{-\alpha|\tau|}$$

2). A doua metodă folosește relația

$$R_{YY}(\tau)=R_{XX}(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)=R_{XX}(\tau)*Q(\tau)$$

Dupa modul în care este definit *h(t)*, avem

$$h(\tau)=\alpha e^{-\alpha\tau},\tau\geq 0 \quad \text{si} \quad h(-\tau)=\alpha e^{\alpha\tau},\tau\leq 0$$

pentru $\tau\leq 0$ se poate scrie

$$Q(\tau)^{(-)}=h(\tau)*h(-\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}h(u)\cdot h(-(\tau-u))du=\int_{-\infty}^{\tau}h(u)\cdot h(-\tau+u)du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\tau}\alpha e^{\alpha u}\cdot\alpha e^{\alpha(-\tau+u)}du=\alpha^2e^{-\alpha\tau}\int_{-\infty}^{\tau}e^{2\alpha u}du=$$

$$=\frac{\alpha^2e^{-\alpha\tau}}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\tau}\left(e^{2\alpha u}\right)'du=\frac{\alpha e^{-\alpha\tau}}{2}(e^{2\alpha\tau}-e^{-\infty})=\frac{\alpha e^{\alpha\tau}}{2}$$

și

$$R_{YY}(\tau)=R_{XX}(\tau)*Q(\tau)^{(-)}=\int_{-\infty}^{\tau}R_{XX}(u)\cdot\frac{\alpha e^{\alpha(\tau-u)}}{2}du=$$

$$=\int_{-\infty}^{\tau}\frac{N_0}{2}\cdot\delta(u)\cdot\frac{\alpha e^{\alpha(\tau-u)}}{2}du=\frac{\alpha N_0}{4}e^{\alpha(\tau-u)}\Big|_{u=0}=\frac{\alpha N_0}{4}e^{\alpha\tau}$$

Pentru $\tau\geq 0$ se poate scrie

$$Q(\tau)^{(+)} = h(\tau) * h(-\tau) = \int_0^{\tau} h(u) \cdot h(-(\tau - u))du = \int_0^{\tau} h(u) \cdot h(-\tau + u)du =$$

$$= \int_0^{\tau} \alpha e^{-\alpha u} \cdot \alpha e^{-\alpha(-\tau+u)} du = \alpha^2 e^{\alpha\tau} \int_0^{\tau} e^{-2\alpha u} du =$$

$$= -\frac{\alpha^2 e^{\alpha\tau}}{2\alpha} \int_0^{\tau} \left(e^{-2\alpha u}\right)' du = -\frac{\alpha e^{\alpha\tau}}{2}(e^{-2\alpha\tau} - 1) = \frac{\alpha e^{-\alpha\tau}}{2}$$

și

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * Q(\tau)^{(+)} = \int_0^{\tau} R_{XX}(u) \cdot \frac{\alpha e^{-\alpha(\tau-u)}}{2} du =$$

$$= \int_0^{\tau} \frac{N_0}{2} \cdot \delta(u) \cdot \frac{\alpha e^{-\alpha(\tau-u)}}{2} du = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha(\tau-u)}\Big|_{u=0} = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha\tau}$$

Combinând rezultatele, se obține același rezultat ca în metoda anterioară:

$$R_{YY}(\tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|}$$

Exerciţii propuse: 1). Fie *X(t)* un semnal aleatoriu Gaussian cu medie zero aplicat unui filtru RC trece jos. Se cunoaște Funcția de autocorelație a semnalului $R_{XX}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \alpha = ct.$ Să se calculeze densitatea spectrală de putere la ieșirea canalului, $S_{YY}(\omega)$.

3.2. Descrierea informațională a surselor continue

O sursă continuă de informație are un număr infinit de simboluri, altfel spus - ieșirea sursei aparține unui interval de numere.

În cadrul abordării discrete, vezi *Aiordăchioaie* (2004), la modelarea surselor discrete de informaţie, s-a văzut că o sursă discretă, prin codare, generează un număr de biţi pentru fiecare simbol al sursei. În cazul surselor continue de informaţie, întrucât numărul de valori pe care le furnizează sursa este infinit, ar rezulta un număr infinit de biţi. Aceasta atrage şi necesitatea folosirii unui canal de capacitate infinită. Canalele reale au capacitate finită şi, în plus, sunt afectate de zgomot; rezultă că pentru o

sursă continuă nu va fi posibilă reconstituirea exactă a semnalelor continue emise.

O sursă continuă în timp poate fi transformată într-o sursă discretă în timp prin discretizare în timp (eşantionare). O sursă continuă poate fi transformată într-o sursă discretă printr-o transformare de discretizare în amplitudine (cuantizare). Rezultă că informaţia unei surse continue ar putea fi transmisă dacă – mai întâi – este supusă celor două transformări, eşantionare şi, respectiv, cuantizare. Pentru stabilirea unor relaţii similare celor din cazul discret, ca metodă generală, se va folosi trecerea la limită pentru numărul de simboluri, de la o valoare finită la una infinită.

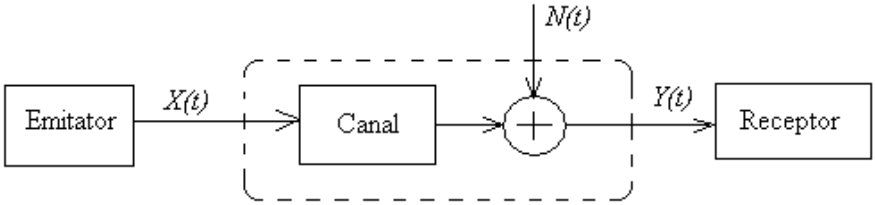


Fig. 3: Localizarea canalului de transmisiune cu zgomot aditiv

3.2.1. Informaţia semnalelor continue discretizate

Un prim contact cu noţiunea de informaţie a unui semnal continuu se prezintă în cele ce urmează.

Fie un semnal continuu (analogic) *X(t)* cu amplitudinea *Q* vârf-vârf. Valorile sunt cuantizate în *N* intervale de cuantizare, aflate la distanţa *q,* numită cuantă. Nivelurile de cuantizare definesc o variabilă aleatorie discretă, notată cu X_d. Valorile semnalului discret în amplitudine, X_d , sunt eşantioanele cuantizate, X_i, ale semnalului *X(t).* Informaţia medie asociată variabilei aleatorii discrete X_d, cu evenimente echiprobabile, este:

$$H(X_d) = -\sum_{i=1}^{N} p(X_i) \log p(X_i) = \log N = -\log \frac{1}{N} = -\log \frac{q}{Q} = \log \frac{Q}{q} \quad \text{[bit/simbol]} \qquad (260)$$

Dacă semnalul *x(t)* are banda *B* şi perioada de eşantionare este T_s, în fereastra de observaţie de durată *T* vor fi $N = T / Ts = T*Fs = T * (2B) = 2TB$ eşantioane.

Informaţia medie conţinută în intervalul de observaţie este:

$$I(X_d(t)) = N \cdot H(X_d) = 2TB \cdot \log\frac{Q}{q} \quad \text{[bit]} \tag{261}$$

Dacă cuanta $q \to 0$, informaţia asociată semnalului continuu

$$I(X(t)) = \lim_{q\to 0} I(X_d(t)) = \lim_{q\to 0} 2TB \log\frac{Q}{q} = \infty \tag{262}$$

Rezultă că, pentru un semnal continuu, cantitatea de informaţie este infinită.

3.2.2. Entropia surselor continue de informaţie

Dorim stabilirea unei expresii pentru entropia surselor continue, care va fi obţinută plecând de la cazul discret.

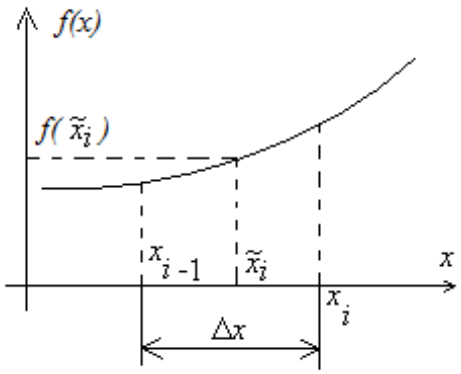


Figura 4 : Aproximarea densităţii de probabilitate continuă

Fie o sursă continuă de informaţie modelată printr-o variabilă aleatorie continuă X. Funcţia densitate de probabilitate continuă poate fi aproximată prin densităţi de probabilitate care sunt constante pe intervale de lungime Δx. Fie P_i probabilitatea (constantă) a intervalului i. Se poate considera că pentru orice interval $\Delta x_i \in R$ există un punct $\tilde{x}_i \in \Delta x_i$ astfel încât

$$P_i = P(X \in \Delta x_i) = P(x_i < X \le x_i + \Delta x_i) = \\ = f(\tilde{x}_i)\cdot \Delta x_i = \int_{\Delta x_i} f(x)dx \tag{263}$$

S-a definit o sursă discretă de informaţie cu elementele date de realizările $Xd_i \in \Delta x_i$ și probabilităţile P_i. Prin considerarea tuturor intervalelor $\Delta x_i \in R$ succesive și disjuncte se acoperă toată axa reală $\bigcup_{i=1}^{N} \Delta x_i = R$ și se

poate considera sursa ca fiind completă, deci $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$. Entropia sursei discrete astfel definite este

$$\begin{aligned} H(X_d) &= -\sum_{i=1}^{N} P_i \cdot \log P_i = -\sum_{i=1}^{N} P_i \cdot \log\left(f(x_i)\cdot \Delta x_i\right) = \\ &= -\sum_{i=1}^{N} P_i \cdot \log f(x_i) - \sum_{i=1}^{N} P_i \cdot \log \Delta x_i = \\ &= -\sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i)\cdot \Delta x_i\right) \cdot \log f(x_i) - \sum_{i=1}^{N} P_i \cdot \log \Delta x_i \end{aligned} \tag{264}$$

Considerând intervale foarte mici se obține o variabila aleatorie continuă, cu entropia

$$\begin{aligned} h(X) &= \lim_{\Delta x_i \to 0} H(X_d) = -\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i)\cdot \Delta x_i\right) \cdot \log f(x_i) - \\ &\quad - \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} P_i \cdot \log \Delta x_i = \\ &= \left(-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \log f(x) \cdot dx - \lim_{\Delta x_i \to 0} \log \Delta x_i \right) \to \infty \end{aligned} \tag{265}$$

Al doilea termen tinde la infinit, ceea ce corespunde realității fizice conform căreia o variabilă aleatorie continuă are o cantitate infinită de informaţie. Ultima relaţie are o semnificaţie generală, calitativă şi teoretică. În practică, din cauza incertitudinii măsurătorilor, intervalul de aproximare Δx este finit. Dacă se consideră, de exemplu, un interval normat $\Delta x = 1$ rezultă ca al doilea termen este zero. Se poate formula următoarea definiţie.

Definiţia 1: *Entropia diferenţială* a unei variabile aleatorii continue *X*, având densitatea de probabilitate *f(x)*, este definită prin:

$$h(X) = h(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx \qquad (266)$$

Ultima relaţie permite existenţa şi a valorilor negative pentru mărimea informațională numită *entropie diferenţială*. Domeniul de calcul al integralei este domeniul de definiţie al densităţii de probabilitate, *f(x)*.

3.2.3. Entropia surselor continue limitate în amplitudine

Ca şi în cazul discret este nevoie să se determine funcţia densitate de probabilitate ce determină o entropie maximă pentru o variabilă aleatorie continuă. Modul de lucru diferă faţă de cazul discret, întrucât - în cazul variabilelor continue - apar restricţii suplimentare cu privire la limitarea în amplitudine sau la limitarea puterii. Se poate demonstra următoarea teoremă, de exemplu în *Van der Lubbe (1997)*).

Teorema 1: Pentru un semnal limitat în amplitudine în intervalul [-*A*,*A*] entropia este maximă, dacă densitatea de probabilitate este uniformă cu $f(x) = \frac{1}{2A}$. Valoarea maximă este $h(X) = \log 2A$.

În cazul limitării amplitudinii, densitatea de probabilitate uniformă determină cantitatea maximă de informaţie. Valorea maximă a cantităţii de informaţie este proporţională (logaritmic) cu amplitudinea maximă.

3.2.4. Entropia surselor continue de putere limitată

Cazul puterii limitate se asigură prin fixarea varianţei eşantioanelor. Se poate formula următoarea teoremă.

Teorema 2: Pentru un semnal de putere constantă $P_X = \sigma^2 = ct.$, cu $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$, entropia este maximă în cazul distribuţiei gaussiene cu funcția densitate de probabilitate $f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx$ şi corespunde unei cantităţi de informaţie $h(X) = \log\left(\sqrt{2\pi \cdot e \cdot \sigma^2}\right)$.

S-a stabilit că distribuţia gaussiană determină o cantitate maximă de informaţie pentru o putere constantă, limitată, σ^2. Maximumul entropiei este proporţional (logaritmic) cu puterea semnalului.

Observaţie – Faptul că sursa gaussiană prezintă entropia diferenţială maximă înseamnă că dintre toate distribuţiile de probabilitate cu aceeaşi valoare medie şi aceeaşi dispersie (putere), distribuţia gaussiană produce cel mai defavorabil zgomot. Întrucât, pentru o putere dată, cantitatea maximă de informaţie este generată de sursele gaussiene, rezultă că sursele continue ne-gaussiene vor genera o cantitate mai mică de informaţie, deci au o incertitudine mai mică.

3.3. Descrierea informațională a canalelor continue de transmisiune

3.3.1. Entropiile asociate canalului

În cazul canalelor discrete, pentru cazul a două variabile aleatorii, *X* şi *Y*, s-au definit mărimi informaţionale cum sunt: echivocaţie, eroare medie, transinformaţie. Acestea pot fi definite şi în cazul continuu.

În vederea folosirii rezultatelor stabilite în cazul discret se va urma următoarea procedură de calcul:

- se va considera că pe canal se transmit eşantioanele cuantizate ale semnalului *X(t)*; acestea sunt considerate variabile aleatorii independente;
- se stabileşte relaţia de calcul a mărimii informaționale;
- dacă q este valoarea cuantei, trecerea de la cazul discret la cazul continuu se face prin trecere la limită, impunând $q \to 0$; ca efect, sumele se vor transforma în integrale;
- Fie T_s perioada de eşantionare şi eşantioanele $x(kT_s)$ şi $y(kT_s)$, pentru semnalele considerate. Considerăm la intrarea în canal, $2N+1$ niveluri de cuantizare folosind cuanta q_x. La ieşire se consideră $2M+1$ niveluri de cuantizare, la distanţa q_y. Semnalele transmise se consideră a fi bipolare. La intrarea canalului se consideră variabila aleatorie discretă *X* definită din eşantioanele *x(kT)* ale semnalului de intrare. La ieşirea canalului se consideră variabila aleatorie discretă *Y*, constituită din eşantioanele *y(kT)* ale semnalului de ieşire.
- Fie $f(x, y)$ funcţia densitate de probabilitate compusă a celor două variabile aleatorii.

Folosind ipotezele enunțate și metodologia de trecere de la discret la continuu, mărimile informaționale pentru descrierea canalelor continue sunt:

a). entropia la intrarea canalului

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx \qquad (267);$$

b). entropia la ieșirea canalului

$$h(Y) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \log f(y) dy \qquad (268);$$

c). entropia intrare–ieșire:

$$h(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log f(x,y) dxdy \qquad (269);$$

d). entropia condiţionată a câmpului de la intrare X de câmpul de la ieșire Y

$$h(X/Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log f(x/y) dxdy \qquad (270);$$

e). entropia condiţionată a câmpului de la ieșire Y condiționată de câmpul de la intrare X

$$h(Y/X) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log f(y/x) dxdy \qquad (271);$$

f). transinformația

$$I(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{f(x)\cdot f(y)} dxdy \qquad (272).$$

Relaţiile de legatură sunt:

$$h(X/Y) \le h(X) \qquad (273)$$

$$h(Y/X) \le h(Y) \tag{274}$$

$$h(X,Y) \le h(X) + h(Y) \tag{275}$$

$$h(X,Y) = h(X) + h(Y/X) = h(Y) + h(X/Y) \tag{276}$$

$$I(X,Y) = h(X) + h(Y) - h(X,Y) \tag{277}$$

$$I(X,Y) = h(X) + h(X/Y) \tag{278}$$

$$I(X,Y) = h(Y) - H(Y/X) \tag{279}$$

Observaţii: 1). Numărul de niveluri de cuantizare pentru un semnal continuu este infinit. Ca atare, informaţia conţinută într-un semnal continuu este infinită, iar entropiile *h(X)* şi *h(Y)* nu mai pot fi interpretate ca valori medii de informaţie.

2). Informaţia mutuală, exprimată în bps, este numită adesea *rata de transmisiune,* pentru că ea reprezintă cantitatea de informaţie transportată pe canal. Expresia este valabilă numai pentru canalele fără memorie, deci eşantioane independente.

3.3.2. Capacitatea canalului continuu

Capacitatea canalului continuu se defineşte ca fiind valoarea maximă a transinformaţiei. Maximizarea se consideră, ca şi în cazul discret, în raport cu densitatea de probabilitate a semnalului aplicat la intrarea canalului:

$$C = \max_{f(x)} I(X,Y) \tag{280}$$

Ca şi în cazul discret, pentru calculul practic al capacităţii canalului se utilizează o relaţie bazată pe entropiile de la intrarea şi de la ieşirea din canal:

$$C = \max_{f(x)} \{I(X,Y)\} = \max_{f(x)} \{H(Y) - H(Y/X)\} \tag{281}$$

În ultima relaţie, maximizarea se face, mai întâi, în raport cu *f(y),* după care se calculează densitatea *f(x)* a semnalului de la intrare pentru a obţine *f(y)*

impus. În cazul general, este dificil de obţinut o expresie pentru capacitatea canalului. Se impun anumite ipoteze simplificatoare, obţinându-se o serie de cazuri particulare.

1. Capacitatea canalului continuu aditiv

Un canal continuu este aditiv dacă semnalul de la ieşirea canalului este suma dintre semnalul de la intrarea canalului şi zgomotul de pe canal (considerat independent de intrarea canalului):

$$Y(t) = X(t) + N(t) \tag{282}$$

Acest model corespunde canalelor de comunicație comune, elementare, așa cum sunt canalele telefonice, pe fir și fără fir, și legăturile satelit. Al doilea termen al expresiei de maximizat este

$$\begin{aligned} h(Y/X) = &-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log f(y/x)dxdy = \\ &-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y/x)\log f(y/x)dxdy \end{aligned} \tag{283}$$

Pentru densitățile de probabilitate se pot scrie relațiile

$$f(y/x) = f((x+n)/x) = f(n/x) = f(n) \tag{284}$$

și

$$dy = d(x+n) = dn \tag{285}$$

întrucât *X(t)* și *N(t)* sunt independente și - în ultima relație - se consideră *x* aproximativ constant în raport cu zgomotul. Rezultă:

$$h(Y/X) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y/x)\cdot \log f(y/x)dxdy =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(n)\log f(n)dxdn = \tag{286}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(n)\log f(n)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right)dn = h(N)$$

Expresia capacităţii este

$$C = \max_{f(x)}\{I(X,Y)\} = \max_{f(x)}\{h(Y)\} - h(N) \tag{287}$$

Capacitatea canalului poate fi infinită dacă puterea zgomotului este zero, când ceea ce se transmite este identic cu ceea ce se recepționează. Dacă zgomotul nu are putere zero și nu există nicio altă restricție asupra intrării, se poate găsi o mulțime infinită de simboluri la intrarea canalului, astfel încât ele să fie distinctibile la ieșirea canalului cu o probabilitate a erorii oricât de mică. Și în acest caz, capacitatea canalului este infinită.

În funcţie de ipotezele care se fac asupra zgomotului, se obțin diverse cazuri particulare, discutate în continuare.

2. Capacitatea canalului continuu aditiv de bandă limitată și cu zgomot alb gaussian

Semnalul de transmis şi zgomotul adăugat de canal sunt reprezentate prin puterile lor medii. Puterea medie la recepţie, deci la ieşirea canalului, este :

$$P_y = P_x + P_n \tag{288}$$

Zgomotul *N(t)* se presupune alb (densitate spectrală de putere constantă $N_0/2$ în gama de frecvenţă a canalului) şi cu densitatea de probabilitate gaussiană, $N(0,\sigma^2)$.

Cantitatea de informaţie dată de zgomotul alb gaussian cu puterea $P_n = \sigma_n^2$ este

$$h(N) = log\sqrt{2\pi \cdot eP_n} = log\sqrt{2\pi \cdot e\sigma_n^2} \quad \text{[bit/eșantion]} \qquad (289)$$

Dacă banda canalului este *B*, atunci puterea zgomotului este

$$P_n = \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \cdot (2B) = B \cdot N_0 \qquad (290)$$

Rezultă capacitatea

$$C = \max_{f(x)} \{I(X,Y)\} = \max_{f(x)} \{h(Y)\} - log\sqrt{2\pi \cdot eBN_0} \quad \text{[bit/eșantion]} \quad (291)$$

Maximumul informaţiei ieşirii se obţine când *Y(t)* are o distribuţie gaussiană. Zgomotul de pe canal fiind gaussian şi canalul aditiv, rezultă că semnalul de intrare trebuie să fie gaussian.
Puterea la ieşirea canalului este

$$P_y = \sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2 \qquad (292)$$

iar entropia maximă a ieşirii este

$$\max_{w(x)} \{h(Y)\} = \log\sqrt{2\pi \cdot eP_y} = \log\sqrt{2\pi \cdot e\left(\sigma_x^2 + \sigma_n^2\right)} \quad \text{[bit/eșantion]} (293)$$

Rezultă capacitatea

$$C = log\sqrt{2\pi e(P_X + P_n)} - log\sqrt{2\pi eP_n} = \frac{1}{2} log\left(1 + \frac{P_X}{P_n}\right) \quad \text{[bit/eșantion]} \quad (294)$$

sau

$$C = \frac{1}{2} log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right) = \frac{1}{2} log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{B \cdot N_0}\right) \text{ [bit/eșantion]} \qquad (295)$$

Capacitatea canalului trebuie evaluată și în raport cu timpul. Se definește debitul maxim de informație ca fiind cantitatea maximă de informație transmisă în unitatea de timp.

$$D = C_t = \frac{C}{\bar{\tau}} \quad [\text{bit/s}] \tag{296}$$

Pentru a obține debitul se calculează numărul de eșantioane pe o fereastră temporală *T*,

$$Ns = T/(1/2B) = 2TB \tag{297}$$

Durata medie de transmisie este

$$\bar{\tau} = \frac{T}{N_s} = \frac{T}{2TB} = \frac{1}{2B} \tag{298}$$

Rezultă relația de legătură dintre debit și capacitate

$$D = \frac{C}{\bar{\tau}} = 2B \cdot \frac{1}{2} log\left(1 + \frac{P_x}{P_n}\right) = B log\left(1 + \frac{P_x}{P_n}\right) \text{ [bit/s]} \tag{299}$$

Capacitatea canalului este urmare a constrângerii de putere finită constantă. Aceasta este capacitatea canalului dincolo de care nu este posibil să se transmită o informaţie fără apariţia erorilor. Relația generală între capacitățile exprimate în [bit/eșantion] și [bit/s] este

$$C_t[\text{bit/s}] = 2B \cdot C \ \text{ [bit/eșantion]} \tag{300}$$

unde *B* este banda în Hz.

Exemplu (*Capacitatea liniei telefonice analogice*): Banda canalelor telefonice este limitată la 3300 Hz. Folosind aceasta bandă și un raport semnal-zgomot de 33 dB, să se calculeze capacitatea canalului telefonic.

$$RSZ_{dB} = 10 \cdot lg(RSZ) = 10 \cdot lg\left(\frac{P_x}{P_n}\right) \rightarrow RSZ =$$

$$= 10^{\frac{RSZ_{dB}}{10}} = 10^{\frac{33}{10}} \cong 1995{,}3 \cong 2000$$

$$C_t = B\log\left(1 + \frac{P_x}{P_n}\right) = 3300 \cdot \log(1 + 2000) = 36189 \ \ [\text{bps}] = 36{,}189 \ \ [\text{kpbs}]$$

3.3.3. Valoarea maximă a capacităţii canalului continuu aditiv, cu zgomot alb gaussian

În ultima relaţie, dacă se creşte banda canalului *B*, valoarea capacităţii canalului nu creşte liniar. Într-adevăr, trecând la limită în ultima relaţie, se obţine o nedeterminare de forma:

$$\lim_{B\to\infty} C = \lim_{B\to\infty} B\log\left(1+\frac{P_X}{BN_0}\right) = \infty\cdot 0 \tag{301}$$

Pentru înlăturarea nedeterminării, se transformă cazul ∞.0 în cazul 0/0 şi se aplică regula lui l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f©(x)}{g©(x)} \tag{302}$$

Se obţine:

$$\lim_{B\to\infty} C = \lim_{B\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{P_X}{BN_0}\right)}{\frac{1}{B}} =$$

$$= \lim_{B\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{B^2}\right)\cdot\frac{P_X}{N_0}\cdot\frac{1}{ln(2)}\cdot\frac{1}{1+P_X/BN_0}}{-\frac{1}{B^2}} = \tag{303}$$

$$= \lim_{B\to\infty}\frac{P_X}{N_0}\cdot\frac{1}{ln(2)}\cdot\frac{1}{1+P_X/BN_0} = \frac{P_X}{N_0}\cdot\frac{1}{ln(2)} = \frac{P_X}{N_0}\cdot log(e)$$

unde s-au folosit regulile de derivare standard:

$$\frac{d}{dx}\left[\log_a f(x)\right] = f'(x)\cdot\frac{1}{ln(a)\cdot f(x)} \tag{304}$$

Relaţia finală:

$$\lim_{B\to\infty} C = C_\infty = \frac{P_X}{ln2\cdot N_0} \tag{305}$$

Dependenţa capacităţii canalului de banda acestuia este reprezentată în fig. 5, dependenţa fiind logaritmică.

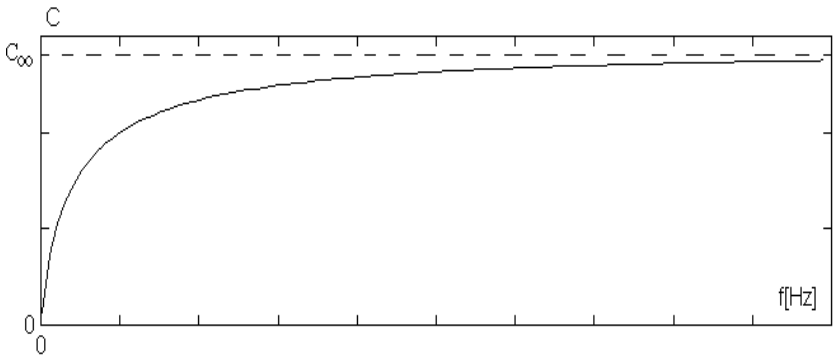


Fig. 5: Capacitatea canalului continuu în funcţie de banda acestuia

Concluzii:

- Pentru valori mari ale benzii canalului, capacitatea canalului se apropie de limita (61).
- Creşterea benzii canalului peste o anumită valoare nu se justifică, întrucât creşterea capacităţii este mică.
- Se poate calcula banda necesară a canalului în vederea trasmiterii unui semnal cu raport semnal-zgomot impus:

$$B = \frac{C}{log(1 + RSZ_{impus})} \tag{306}$$

- Pentru rapoarte semnal zgomot foarte mari ($RSZ >> 1$) capacitatea canalului este:

$$C = B \cdot log(1 + RSZ) \cong B \cdot log(RSZ) =$$

$$= B \cdot log\left(10^{\frac{RSZ_{dB}}{10}}\right) = B \cdot \frac{lg\left(10^{\frac{RSZ_{dB}}{10}}\right)}{lg\,2} = \tag{307}$$

$$= B \cdot \frac{\frac{RSZ_{dB}}{10}}{lg\,2} = \frac{1}{10 \cdot lg\,2} \cdot B \cdot RSZ_{dB} \cong 0.332 \cdot B \cdot RSZ_{dB} \quad [\text{bit/s}]$$

Exerciţiul 1: Pentru transmiterea unei imagini de formă pătrată se foloseşte un sistem de discretizare format din n_l=1500 linii şi n_c=1500 coloane. Pentru

fiecare element de imagine (pixel) se utilizează n_g = 12 niveluri de gri. Se cer:

1. Să se calculeze numărul de elemente în care se descompune imaginea.
2. Cantitatea de informatie furnizată de un pixel şi de întreaga imagine.
3. Timpul minim necesar transmiterii imaginii pe un canal cu banda B_c= 3 kHz la un raport semnal/zgomot de 26 dB, dacă se foloseşte canalul la întreaga capacitate.

Soluţie*:* 1). Numărul de elemente în care se descompune imaginea este

$$n = n_l \cdot n_c = 1500 \cdot 1500 = 2.25 \cdot 10^6 \quad [\text{pixel}]$$

2). Fiecare pixel poate avea o nuanţă de gri din 12 posibile. Cantitatea de informaţie furnizată de un pixel este:

$$i_{pixel} = -log(p_{pixel}) = -log\frac{1}{12} = log12 = 3.59 \quad [\text{bit}]$$

Cantitatea de informaţie furnizată de întreaga imagine se obţine prin multiplicarea cantităţii de informaţie generată de un singur pixel cu numărul total de pixeli:

$$I_{imagine} = n \cdot i_{pixel} = 2.25 \cdot 10^6 \cdot 3.59 = 8.07 \quad [\text{Mbit}]$$

3). Se ţine seama că debitul de informaţie al canalului este raportul dintre informaţia transmisă pe canal şi timpul necesar transmisiei. Informaţia transmisă pe canal este dată de imagine; debitul de informaţie se calculează cu relaţia:

$$C = B_c \cdot log(1 + RSZ)$$

În această expresie raportul semnal zgomot este adimensional. Se face transformarea din dB în mărime adimensională:

$$RSZ_{dB} = 10 lg\, RSZ \rightarrow RSZ = 10^{\frac{RSZ_{dB}}{10}} = 10^{\frac{26}{10}} \cong 400$$

Capacitatea canalului este:

$$C = B_c \log(1 + RSZ) = 3000 \cdot \log(1 + 400) \cong 26.8 \quad [\text{kbit/s}]$$

Timpul necesar transmisiei este:

$$t = \frac{I_{imagine}}{C_t} = \frac{8.07 \cdot 10^6}{26.8 \cdot 10^3} = 301 \quad [\text{s}] \cong 5 [\text{min}]$$

Exercițiul 2: Se consideră un canal telefonic cu banda *B*=3 kHz. Receptorul impune un raport semnal-zgomot *RSZ*=26 dB. Să se calculeze durata de transmitere a unei fotografii şi a unei imagini TV alb-negru dinamice. Se cunosc: rezoluţia scannerului 600x800 pixeli, numărul de nivele de gri n_g =100. Pentru a se crea senzaţia de mişcare (imagine dinamică) trebuie transmise *N*=25 imagini pe secundă.

Soluţie*:* Fotografia se decompune într-un număr de elemente *n*=600x800 =0.48 Mega-pixeli. Cantitatea de informaţie furnizată de un pixel este dată de numărul de nivele de gri după relaţia:

$$i_{pixel} = log(n_g) = log(100) = 6.65 \quad [\text{bit}]$$

Cantitatea de informaţie conţinută de fotografie este

$$I_1 = N \cdot i_{pixel} = 0.48 \cdot 10^6 \cdot 6.65 = 3.19 \quad [\text{Mbit}]$$

Debitul maxim de informaţie al canalului

$$C_t = B_c \cdot log(1 + RSZ) = 3 \cdot 10^3 \cdot log(1 + 10^{2.6}) \cong 26 \quad [\text{kbit/s}]$$

Durata transmisiei fotografiei este:

$$t_1 = \frac{I_1}{C_t} = \frac{3.19 \cdot 10^6}{26 \cdot 10^3} = 123 \quad [s] \cong 2 \quad [\text{min}]$$

Pentru transmisia imaginii TV alb-negru, cantitatea de informaţie generată de imaginea statică (sau fotografie) se multiplică cu numărul de repetări necesar pentru a crea percepția de mișcare:

$$I_2 = N \cdot I_1 = 25 \cdot 3.19 \cdot 10^6 \cong 80 \quad [\text{Mbit}],$$

iar durata transmisiei este $t_2 = \frac{I_2}{C_t} = \frac{80 \cdot 10^6}{26 \cdot 10^6} = 3077 \quad [\text{s}] \cong 51 \quad [\text{min}]$.

Exerciții propuse: 1). Să se calculeze entropia diferențială pentru variabila aleatorie continuă cu densitate exponențială $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \geq 0$. *Soluție:* $(\log e/\lambda)$.

2). Să se calculeze entropia diferențială pentru variabila aleatorie continuă cu densitate Laplace $f(x) = \frac{1}{2}\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot |x|}$. *Soluție:* $(\log 2e/\lambda)$.

3). Să se calculeze entropia diferențială pentru suma a două variabile aleatorii gaussiene continue X_1 și X_2 independente cu mediile μ_1 si μ_2 și dispersiile σ_1^2 si σ_2^2. *Soluție:* $0.5 \cdot \left(\log 2\pi * e \cdot \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)\right)$

Concluzii

S-au prezentat descrierea statistică și informațională a canalelor de transmisiune, prin definirea noțiunii de informație asociată unui semnal continuu și a unor entropii, ca mărimi medii de informație. S-au stabilit expresii de calcul pentru capacitatea canalelor continue cu zgomot alb, gaussian.

Capitolul 4 - Detecţia semnalelor cunoscute

Cuprins
Definirea problemei
Un exemplu de detecție
Ipoteze și decizii
Calculul probabilităților detecției
Interpretarea geometrică a problemei detecției binare
Criteriul plauzibilității maxime
Criteriul riscului minim (Bayes)
Detecția unui semnal prin observarea discretă şi zgomot alb
Caracteristica de operare a detectorului
Detecția multiplă
Detecția secvențială în ipoteza binară
Detecția secvențială prin observare discretă și zgomot alb gaussian
Concluzii

4.1. Introducere. Definirea problemei

În capitolele anterioare, s-au stabilit diverse modele pentru zgomotele de pe canalul de transmisiune. Aceste modele vor fi utilizate acum pentru a stabili metode şi algoritmi optimi de prelucrare a semnalelor în vederea extragerii informaţiei conţinute în acestea, inclusiv când sunt afectate de zgomote. Algoritmii vor putea fi folosiţi la determinarea unei secvenţe binare transmisă pe un canal cu zgomot sau la detectarea prezenţei unui semnal cunoscut.

În cazul unui sistem de comunicaţie binar, receptorul cunoaşte că simbolurile binare de "0" şi "1" se transmit pe durata a T secunde şi că simbolul "1" este reprezentat printr-un impuls pozitiv, iar simbolul "0" este reprezentat printr-un impuls negativ. Ceea ce nu cunoaște receptorul, la recepționarea unei forme de undă, este care din cele două simboluri a fost transmis. Receptorul ia decizia pe baza prelucrării semnalului recepţionat. Întrucât forma de undă recepţionată este distorsionată - şi conține şi zgomot - este posibil ca receptorul să ia şi decizii false (eronate) asupra simbolurilor transmise. În acest sens, ne va interesa stabilirea unor algoritmi de decizie care să minimizeze erorile deciziilor.

Ca măsură a calităţii algoritmilor de prelucrare a semnalelor recepţionate, se utilizează probabilitatea de a lua o decizie incorectă,

ponderată uneori şi cu costurile deciziilor luate, în problemele de detecţie a semnalelor.

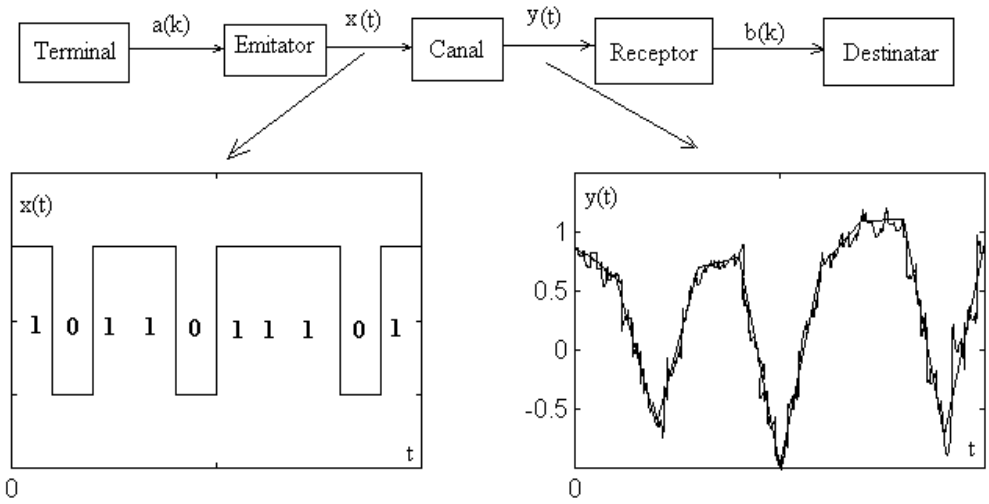


Fig. 1: Structura unui sistem de transmisiune cu detecţie

4.2. Un exemplu de detecţie

Se va considera un exemplu simplu de detecţie: detecţia prezenţei unui semnal determinist afectat de zgomot. Se consideră un sistem de transmisiune pe un canal continuu. La intrare se aplică semnalul determinist *X(t),* la ieşire se obţine semnalul *Y(t).* Zgomotul de pe canal este *n(t).* Perturbaţiile ce apar pe canal sunt modelate prin procese aleatorii staţionare şi ergodice. La transmisiunile la mare distanţă sau în medii industriale zgomotoase, semnalul util *X(t)* este mult atenuat, astfel încât la ieşirea canalului, zgomotul este mai mare decât semnalul util *X(t),* aşa cum se sugerează în fig. 2. Întrucât spectrul zgomotului de pe canal *n(t)* este mult mai mare decât spectrul semnalului util *X(t),* prin metodele clasice de filtrare nu se poate decide dacă în semnalul recepţionat există sau nu semnal util *X(t).* O soluţie constă în calcularea funcţiei de autocorelaţie a semnalului recepţionat. Într-adevăr:

$$R_{YY}(\tau) = E\{Y(t)Y(t+\tau)\} = E\{[X(t)+n(t)]\cdot[X(t+\tau)+n(t+\tau)]\} = \\ = R_{XX}(\tau)+R_{XN}(\tau)+R_{NX}(\tau)+R_{NN}(\tau) \quad (308)$$

S-a folosit notaţia cu majuscule, specifică semnalelor aleatorii. În ultima expresie intervin funcţiile de autocorelaţie ale semnalelor de la intrările

canalului, R_{XX} şi R_{NN}, precum şi funcţiile de intercorelaţie ale acestora, R_{XN} şi R_{NX}.

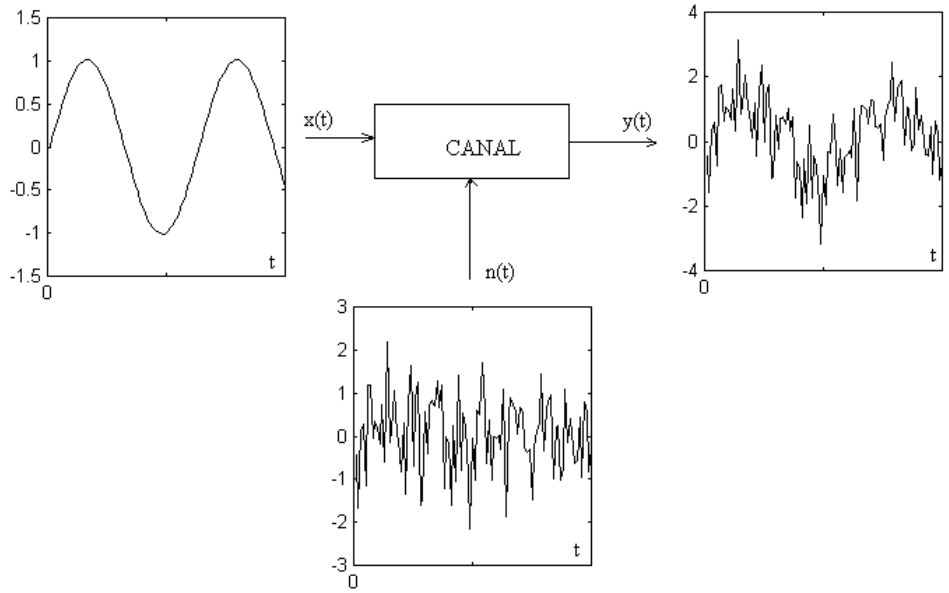


Fig. 2: Sistem de transmisiune cu zgomote aditive puternice

În transmisiunile reale, zgomotul de pe canal apare independent dacă pe canal se transmite sau nu semnal util. Rezultă că cele două semnale considerate sunt statistic independente şi – ca efect – funcţiile de intercorelaţie sunt zero:

$$R_{NX}(\tau) = R_{XN}(\tau) = 0 \tag{309}$$

Funcţia de autocorelaţie a semnalului recepţionat:

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{NN}(\tau) \tag{310}$$

Pentru τ=0, se obţine egalitatea puterilor:

$$R_{YY}(0) = R_{XX}(0) + R_{NN}(0) \tag{311}$$

$$P_Y = P_X + P_N \tag{312}$$

Funcţia de autocorelaţie a zgomotului este – în general – rapid descrescătoare, iar funcţia de autocorelaţie a unui semnal determinist

periodic este o funcţie periodică în raport cu variabila τ, aşa cum s-a reprezentat în fig 3. Se poate spune că, după un anumit interval de timp, funcţia de autocorelaţie a semnalului recepţionat devine egală cu funcţia de autocorelaţie a semnalului emis *X(t).*

Intervalul de timp care trebuie să se scurgă pentru evidenţierea acestui aspect depinde de nivelul relativ al zgomotului în raport cu nivelul semnalului emis. Cu cât semnalul *X(t)* este mai mic faţă de zgomotul *n(t),* cu atât trebuie un timp mai mare de observaţie pentru a decide dacă există sau nu semnal util în semnalul recepţionat.

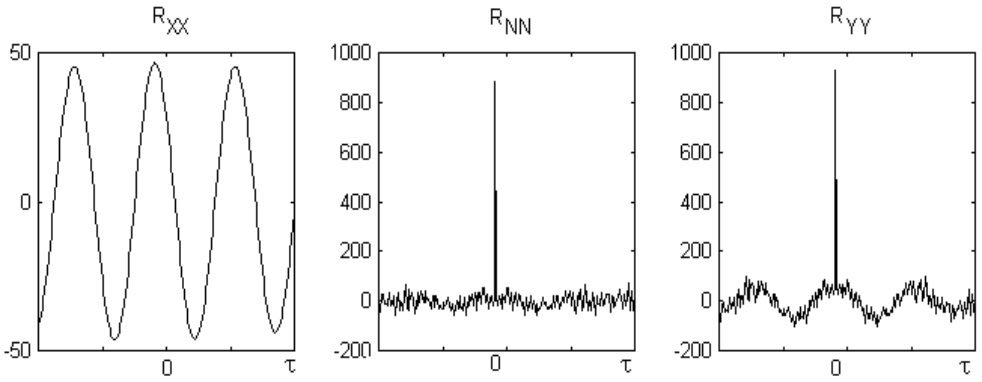


Fig. 3: Funcţiile de autocorelaţie ale semnalelor din sistem

Schema unui circuit pentru detecția prezenței unui semnal determinist este prezentată în fig.4 și cuprinde: un corelator, un circuit de întârziere, un filtru trece jos pentru filtrarea componentelor de înaltă frecvență și un comparator. Valoarea pragului comparatorului se alege de câteva ori mai mare decât valoarea efectivă a zgomotului de pe canal.

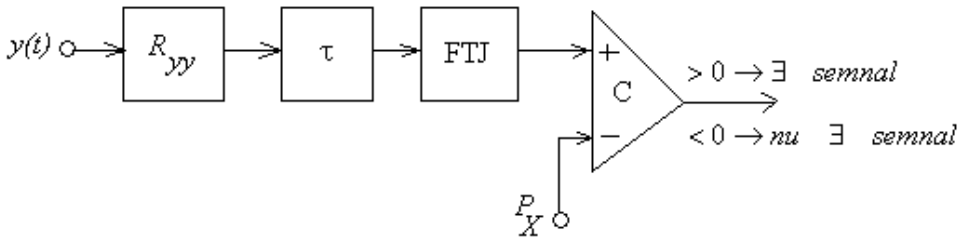


Fig. 4: Detecția prezenței unui semnal cunoscut

4.3. Ipoteze şi decizii

Se consideră sistemul de transmisiune din fig.5. Sursa de informaţie se consideră discretă. Sursa emite simboluri individuale sau mesaje, *m.* Modulatorul emite semnale deterministe, *s(t),* ce se transmit (propagă) pe canal. La ieşirea canalului se recepţionează semnalul *r(t),* iar la ieşirile receptorului se iau deciziile $D_i, i = 1,2,..., M-1$. Simbolurile generate de sursă, a_0, $a_1, \ldots, a_{M-1}$ definesc o variabilă aleatorie discretă. Fiecărui mesaj-simbol îi corespunde un semnal cunoscut ce se transmite pe canal: $s_0(t)$, $s_1(t), \ldots, s_{M-1}(t)$.

La recepţie se fac ipoteze $H_i, i = 1,2,..., M-1$ cu privire la semnalul emis, adică asupra simbolurilor furnizate de sursă. Fiecare ipoteză se referă la câte un simbol ce poate fi transmis. Pe baza semnalului recepţionat, receptorul ia decizii $D_i, i = 1,2,..., M-1$, în scopul stabilirii simbolului generat de sursă, deci pentru a stabili care ipoteză este adevărată.

Dacă în procesul de transmisiune nu intervin erori, atunci între mulţimea simbolurilor furnizate de sursă şi mulţimea deciziilor elaborate de receptor, există o corespondenţă biunivocă. Trecerea de la spaţiul simbolurilor la spaţiul observaţiilor se face pe baza unor legi probabilistice, întrucât observațiile sunt afectate de zgomote. Trecerea de la spaţiul observaţiilor la spaţiul deciziilor se face cu ajutorul unor reguli de decizie, așa cum se prezintă în fig. 6.

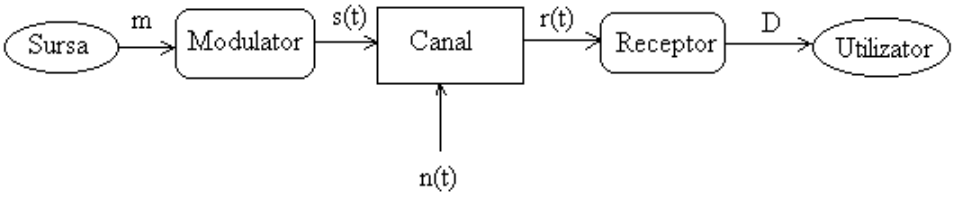


Fig. 5: Sistem de transmisiune cu detecţia semnalelor

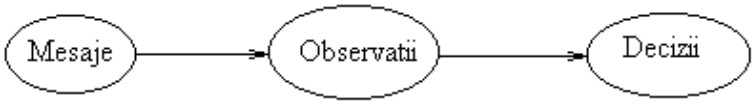


Fig. 6: Transformări ale spaţiilor: simbolurilor (mesajelor), observaţiilor şi deciziilor

Din modul de efectuare a observațiilor în intervalul de observaţie D, se disting observaţii:

1) *discrete*, efectuate la momente discrete de timp t_1, t_2, ..., t_{M-1}, deci se obţin eşantioane ale semnalului recepţionat; observaţiile sunt procese aleatorii discrete;
2) *continue,* caz în care observaţiile devin procese aleatorii continue.

Fie cazul binar. Când observaţiile sunt afectate de zgomot, este posibil să se ia şi decizii incorecte pe baza criteriilor de decizie. În general, pentru cazul binar, există patru situaţii posibile:

1. s-a emis simbolul a_0, se consideră ipoteza H_0 adevărată şi se ia decizia D_0;
2. s-a emis simbolul a_0, se consideră ipoteza H_1 adevărată şi se ia decizia D_1;
3. s-a emis simbolul a_1, se consideră ipoteza H_1 adevărată şi se ia decizia D_1;
4. s-a emis simbolul a_1, se consideră ipoteza H_0 adevărată şi se ia decizia D_0.

Situaţiile caracterizate de probabilităţile condiţionate $P(D_0|a_0)$ şi $P(D_1|a_1)$ corespund situaţiilor corecte. Probabilitatea $P(D_1|a_1)$ se numește *probabilitate de detecție.*

Situațiile caracterizate de probabilităţile condiţionate $P(D_0|a_1)$ şi $P(D_1|a_0)$, reprezintă *probabilităţile deciziilor incorecte*. Se folosesc denumiri inspirate din tehnologia radar, și anume:

- $P(D_1|a_0)$ se numește *probabilitatea alarmei false,* P_F ;
- $P(D_0|a_1)$ se numeste *probabilitatea de pierdere,* P_M.

Probabilitatea deciziei false (probabilitatea de eroare) determină criteriul de minimizat pentru receptorul sistemului de transmisiune:

$$P_e = P(D_1, a_0) + P(D_0, a_1) = P(a_0) \cdot P(D_1 / a_0) + P(a_1) \cdot P(D_0 / a_1) = P(a_0) \cdot P_F + P(a_1) \cdot P_M \quad (313)$$

Probabilitatea deciziei corecte este:

$$P_C = P(D_0, a_0) + P(D_1, a_1) = P(a_0) \cdot P(D_0 / a_0) + P(a_1) \cdot P(D_1 / a_1) \quad (3)$$

Sursa care generează simboluri se consideră completă. În cazul binar, avem valabilă relația

$$P(a_0) + P(a_1) = 1 \quad (315)$$

Sunt valabile și relațiile:

$$P(D_0 / a_0) = 1 - P(D_1 / a_0) = 1 - P_F \tag{316}$$

$$P(D_1 / a_1) = P_d = 1 - P(D_0 / a_1) = 1 - P_M \tag{317}$$

4.4. Interpretare geometrică pentru detecţia binară prin eşantionarea semnalului recepţionat

Sursa emite numai două simboluri, a_0 şi a_1, cu probabilităţile $P(a_0)$ şi $P(a_1)$. Pentru transmisia celor două simboluri se folosesc semnalele $s_0(t)$ şi $s_1(t)$. Durata semnalelor $s_i(t)$, i=1,2 este T şi coincide cu durata observaţiilor D la recepție. Numărul de observaţii, constituite din eşantioanele semnalului recepţionat în intervalul considerat, este N.
Cu privire la cele două simboluri se fac ipotezele:

H_0: s-a transmis simbolul “0”

H_1: s-a transmis simbolul “1”

Eşantioanele semnalului recepţionat sunt $r_1\, r_2 \ldots r_N$ şi determină în spaţiul eşantioanelor (sau al semnalului recepţionat) vârful vectorului $\vec{r}$. Eşantioanele semnalului recepţionat definesc vectorul aleatoriu $\mathbf{r} = [r_1\, r_2 \ldots r_N]$.

Eşantioanale semnalului recepţionat determină în spatiul eşantioanelor N-dimensional un punct de coordonate reprezentând valorile eşantioanelor. Aşa cum se poate observa în fig. 8, spaţiul semnalelor se împarte în două subspaţii, corespunzătoare celor două simboluri emise de sursa S. Perturbaţiile sunt considerate aditive, deci vectorul recepţionat este suma vectorială dintre vectorul emis şi vectorul zgomot:

$$\vec{r} = \vec{s} + \vec{n} \tag{318}$$

Fie aceste două subspaţii S_0 şi S_1, separate de o suprafaţă Σ. Suprafaţa trebuie să împartă cele două subspaţii astfel:

- dacă vârful vectorului recepţionat $\vec{r}$, numit şi punct reprezentativ al semnalului receptionat, aparţine subspatiului S_0, să se considere că este adevărată ipoteza H_0 şi receptorul ia decizia D_0;

- dacă punctul reprezentativ al semnalului recepţionat aparţine subspaţiului S_1, se decide că este adevărată ipoteza H_1 şi se ia decizia D_1.

Problema este de a găsi criterii de decizie cu ajutorul cărora să se determine o suprafaţă de separaţie Σ, astfel încât deciziile eronate să fie minime.

Spaţiul eşantioanelor ar putea fi împărţit şi în trei subspaţii, al treilea corespunzând situaţiei în care nu se poate spune nimic despre semnalul emis de sursă. În continuare se vor considera numai două subspaţii.

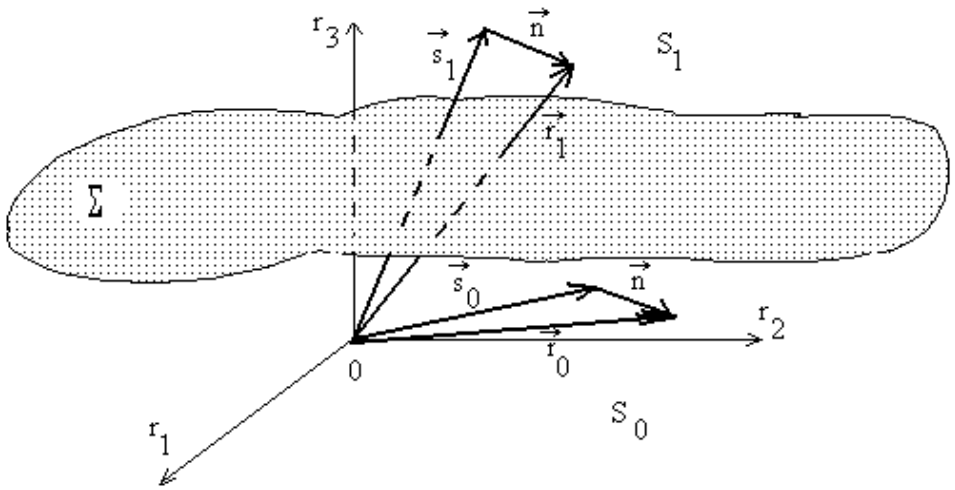


Fig. 8: Spatiul tri-dimensional al eşantioanelor în problema detecţiei

Fig. 9 prezintă o echivalență între problema deciziei și a clasificării. Fie două clase reprezentate prin punctele reprezentative (formele) P_{01} și, respectiv, P_{02}. Acestea sunt fără zgomot. Problema clasificării este de stabili o linie de demarcație între cele două clase, astfel încât – la fiecare apariție a unei realizări (forme) de clasificat - să se ia decizia cea mai bună. Realizările sunt apoi reprezentate prin adăugarea unui zgomot de recepție la cele două puncte reprezentative. Se observă că, pe măsură ce crește zgomotul, apar forme care trec dintr-un domeniu în altul și care pot determina decizii false. Se observă în fig. 9, jos dreapta, că două forme (de culoare verde) sunt deasupra liniei de separare, deci ar aparține domeniului D_1 în loc de D_0. Există și un caz (de culoare roșie) în care se trece din D_1 în D_0.

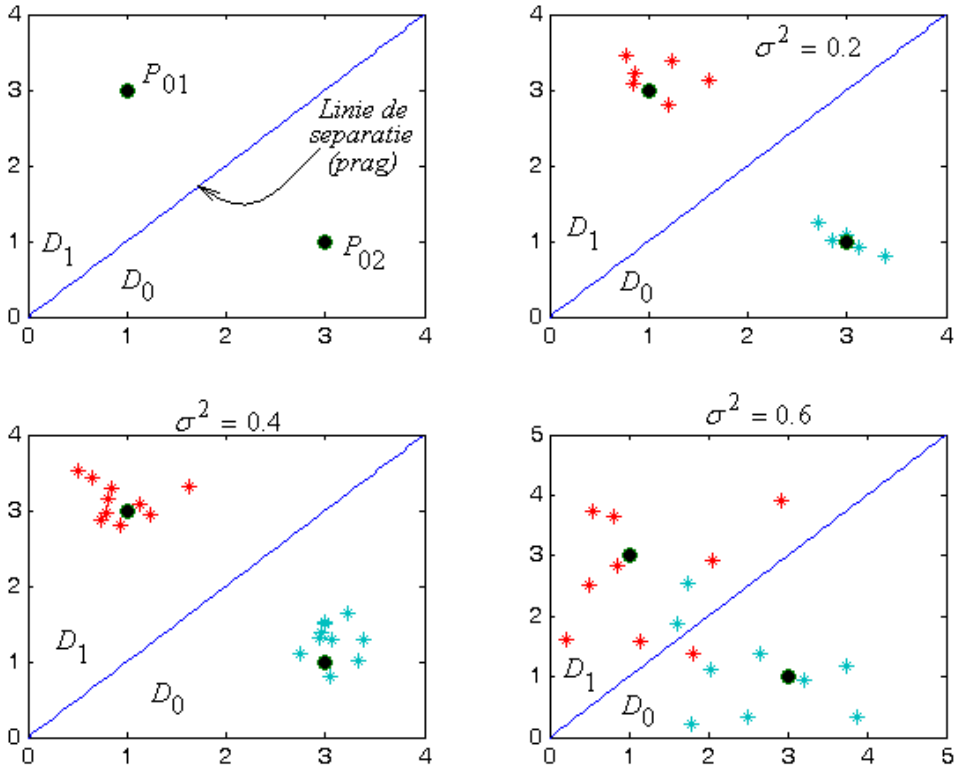


Fig. 9: Echivalență între problemele deciziei și clasificării

4.5. Calculul probabilităților detecției

Fie cazul detecției binare și a unei singure observații, *y*. Următoarele mărimi de probabilități sunt des folosite în aplicațiile de detecție și decizie:

- Probabilitatea de detecție

$$P_d = P(D_1 / a_1) = \int_{S_1} f(y \mid H_1)dy \tag{319}$$

- Probabilitatea unei pierderi

$$P_m = P(D_0 / a_1) = \int_{S_0} f(y \mid H_1)dy = 1 - P_d \tag{320}$$

- Probabilitatea alarmei false

$$P_f = P(D_1 / a_0) = \int_{S_1} f(y \mid H_0) dy \tag{321}$$

- Probabilitatea medie de eroare:

$$\begin{aligned} P_e &= P(D_1 \cap a_0) + P(D_0 \cap a_1) = \\ &= P(a_0) \cdot P(D_1 / a_0) + P(a_1) \cdot P(D_0 / a_1) = \\ &= P(a_0) \cdot P_f + P(a_1) \cdot P_m \end{aligned} \tag{322}$$

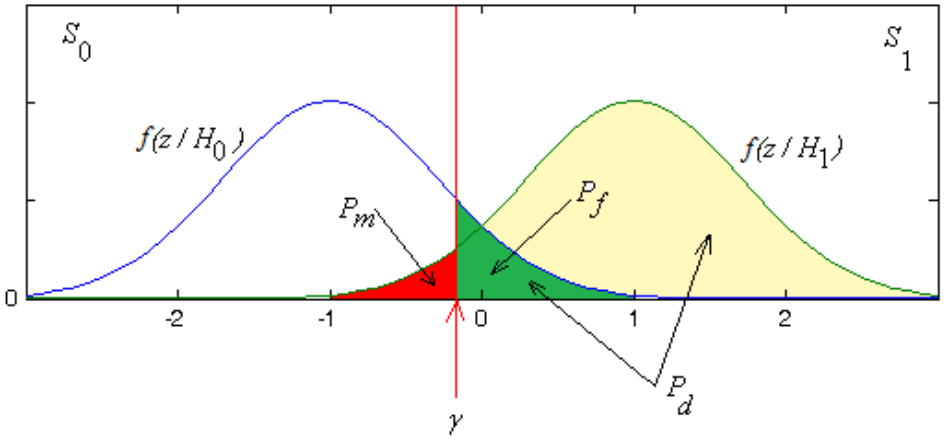


Fig. 7: Semnificația probabilităților implicate în detecție

Pentru calculul acestor probabilități se parcurg următorii pași.

1). Fie *y* variabila aleatorie determinată (generată) de termenul din partea stângă a regulii de decizie, în care s-au înglobat (reținut) toate variabilele a posteriori din procesul de detecție (deci eșantioanele semnalului recepționat).

2). Pentru fiecare din cele două ipoteze, H_0 și, respectiv, H_1, se evidențiază expresiile densităților de probabilitate ale variabilelor condiționate $f(y/H_0)$ și $f(y/H_1)$. De cele mai multe ori, aceste distribuții sunt sau pot fi considerate gaussiene.

3). Se calculează parametrii distribuțiilor de probabilitate de la punctul anterior, adică media și dispersia (dacă distribuțiile sunt gaussiene).

4). Se calculează pragul deciziei, dat de valoarea termenului din dreapta a regulii de decizie, pentru definirea domeniilor de integrare S_0 și S_1.

5). Se calculează probabilitățile (12) - (15), după caz.

4.6. Criteriul plauzibilității maxime

Sursa emite două simboluri a_0 şi a_1, cu probabilităţile $P(a_0)$ şi $P(a_1)$. Pentru transmisia celor două simboluri se folosesc semnalele $s_0(t)$ şi $s_1(t)$. Durata semnalelor $s_i(t)$, i=1,2, este T şi coincide cu durata observaţiilor D. Numărul de observaţii, constituite din eşantioanele semnalului recepţionat în intervalul considerat, este N.
Cu privire la cele două simboluri se fac ipotezele:

H_0: s-a transmis simbolul “0”

H_1: s-a transmis simbolul “1”

Eşantioanele semnalului recepţionat sunt $y_1,y_2,...,y_N$ şi determină în spaţiul eşantioanelor (sau al semnalului recepţionat) vârful vectorului $\vec{y}$. Eşantioanele semnalului recepţionat definesc vectorul aleatoriu $\mathbf{y} = [y_1\ y_2\ ...y_N]$.

Pentru o decizie corectă trebuie ca probabilitatea de decizie (*a posteriori*) să fie maximă. Pentru stabilirea unei reguli de decizie se consideră probabilităţile ipotezelor H_0 şi H_1, condiţionate de vectorul observaţiilor **y**:

- $P(H_0/\mathbf{y})$, probabilitatea ca ipoteza H_0 să fie adevărată;
- $P(H_1/\mathbf{y})$ probabilitatea ca ipoteza H_1 să fie adevărată.

După valorile celor două probabilităţi condiţionate se va considera că este adevărată ipoteza ce are probabilitatea cea mai mare. Astfel, se va considera că:

ipoteza H_0 adevărată dacă $P(H_0/\mathbf{y}) > P(H_1/\mathbf{y})$

şi

ipoteza H_1 adevărată dacă $P(H_1/\mathbf{y}) > P(H_0/\mathbf{y})$.

sau, într-o formă mai restransă, se poate scrie:

$$\frac{P(H_1/\mathbf{y})}{P(H_0/\mathbf{y})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \qquad (323)$$

ceea ce înseamnă că se va alege ipoteza H_1 dacă raportul este mai mare decât 1, şi ipoteza H_0 când raportul este mai mic decât 1.

Probabilitatea condiţionată $P(H_i/\mathbf{y})$ este numită *probabilitate a posteriori*, deci este o probabilitate calculată după ce s-au efectuat observaţiile asupra semnalului recepţionat. Criteriul de decizie (16) este numit *criteriul probabilităţii a posteriori maxime*. Utilizând regula lui Bayes, $P(H_i/\mathbf{y})$ poate fi scrisă sub forma

$$P(H_i|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|H_i)\cdot P(H_i)}{f(\mathbf{y})} \tag{324}$$

şi regula de decizie (16) devine

$$\frac{P(H_1)\cdot f(\mathbf{y}|H_1)}{P(H_0)\cdot f(\mathbf{y}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \tag{325}$$

sau

$$\frac{f(\mathbf{y}|H_1)}{f(\mathbf{y}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{326}$$

Raportul densităţilor de probabilitate

$$L(\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|H_1)}{f(\mathbf{y}|H_0)} \tag{327}$$

se numeşte *raport de plauzibilitate* și este o variabilă aleatorie întrucât este o funcție de variabila aleatorie **y.** Raportul probabilităţilor a priori

$$\gamma = \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{328}$$

se numeşte *pragul testului.*

Aşadar, criteriul probabilităţii maxime a posteriori constă în compararea raportului de plauzibilitate cu pragul testului. De remarcat că pragul testului este cunoscut din raportul probabilităţilor de furnizare a celor două simboluri, numite şi probabilităţi a priori. Raportul de plauzibiliate depinde de probabilitățile a posteriori.

Când observaţiile sunt afectate de zgomot, este posibil să se ia şi decizii incorecte. Cazurile $P(D_0|H_0)$ şi $P(D_1|H_1)$ corespund situaţiilor corecte. Cazurile caracterizate de probabilităţile condiţionate $P(D_0|H_1)$ şi $P(D_1|H_0)$, reprezintă *probabilităţile deciziilor incorecte.*

Avantajul relației (324) este că densitățile de probabilitate $f(y/H_i), i = 0,1$ pot fi calculate din statistica zgomotului înainte de efectuarea oricărei observații, ceea ce este esențial pentru definirea criteriului deciziei. Acestea sunt mărimi a priori în procesul de transmisie și decizie.

Rezolvarea problemei deciziei necesită parcurgerea următorilor pași:

1). din cunoașterea statistică a zgomotului se calculează (sau estimează) funcțiile de densitate de probabilitate $f(\mathbf{y}/H_i), i = 0,1$;

2). de calculează pragul deciziei, γ;

3). de evaluează criteriul de decizie pentru fiecare vector recepționat.

4.7. Criteriul riscului minim (Bayes)

În multe aplicaţii inginereşti, costul are un rol important în cadrul exploatării sistemului de transmisiune. În astfel de aplicaţii este posibil să se stabilească reguli de decizie care să minimizeze un criteriu bazat pe costurile deciziilor luate, deci să se minimizeze costul mediu al deciziilor luate. De exemplu, în contextul detecţiei radar, costul şi consecinţele pierderii unei ţinte sunt total diferite de cele ale unei alarme false. De aceea, o decizie optimă trebuie să aibă în vedere costurile relative şi să minimizeze costul mediu.

Consecinţele diferite ale deciziilor luate vor fi măsurate prin costurile C_{ij}, i,j=0,1. Primul indice indică decizia luată, D_i, şi al doilea indice arată ipoteza considerată, H_j. Ca urmare a celor patru cazuri posibile, puse în evidenţă în paragraful anterior, rezultă existenţa a patru costuri. Astfel, C_{00} şi C_{11} vor fi costurile deciziilor corecte, şi C_{01} şi C_{10} vor costurile deciziilor false. Corespunzător celor patru cazuri puse în evidenţă, costul este o variabilă aleatorie discretă. Probabilitatea unui cost este dată de probabilitatea deciziei luate, corectă sau falsă. Valoarea medie a costului se numește risc, şi se calculează cu relaţia:

$$R = \overline{C} = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} C_{ij} P(D_i, H_j) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} C_{ij} P(H_j) P(D_i \mid H_j) \quad (329)$$

unde $P(D_i, H_j)$ este probabilitatea ca receptorul să ia decizia D_i şi sursa să furnizeze simbolul a_j; $P(D_i|H_j)$ este probabilitatea ca receptorul să ia decizia D_i, dacă se consideră ipoteza H_j adevarată, conform căreia s-a transmis simbolul a_j.

O regulă de decizie care să minimizeze costul mediu (328), numită *regula de decizie Bayes*, se poate stabili după următoarele considerente. Dacă S_0 şi S_1 sunt partiţiile spaţiului observaţiilor, şi se ia decizia D_0 dacă $\mathbf{y} \in S_0$ şi se ia decizia D_1 dacă $\mathbf{y} \in S_1$, costul mediu devine:

$$\begin{aligned} R = \overline{C} &= C_{00} \cdot P(H_0) \cdot P(D_0 | H_0) + C_{10} \cdot P(H_0) \cdot P(D_1 | H_0) + \\ &+ C_{01} \cdot P(H_1) \cdot P(D_0 | H_1) + C_{11} \cdot P(H_1) \cdot P(D_1 | H_1) = \\ &= C_{00} \cdot P(H_0) \cdot \int_{S_0} f(\mathbf{y} | H_0) dY + C_{10} \cdot P(H_0) \cdot \int_{S_1} f(\mathbf{y} | H_0) dY + \\ &+ C_{01} \cdot P(H_1) \cdot \int_{S_0} f(\mathbf{y} | H_1) dY + C_{11} \cdot P(H_1) \cdot \int_{S_1} f(\mathbf{y} | H_1) dY \end{aligned} \quad (330)$$

unde integralele au ordinul de multiplicitate n egal cu dimensiunea vectorului $\mathbf{y}$, şi dY este $dy_1 dy_2 \ldots dy_n$.

Pentru obţinerea unei expresii mai simple a costului mediu se vor exprima integralele din relația (309) numai în funcţie de intervalul (spațiul) S_0 (sau S_1) şi se folosesc proprietăţile funcţiei densitate de probabilitate *f(y)*. Întrucât $S_1 \cup S_0 = S = (-\infty, +\infty)$ şi $S_1 \cap S_0 = \varnothing$ se pot scrie relaţiile

$$\int_{S_1} f(\mathbf{y} | H_0) dY = 1 - \int_{S_0} f(\mathbf{y} | H_0) dY \quad (331)$$

$$\int_{S_1} f(\mathbf{y} | H_1) dY = 1 - \int_{S_0} f(\mathbf{y} | H_1) dY \quad (332),$$

astfel încât expresia costului mediu devine:

$$\begin{aligned} \overline{C} &= C_{10} P(H_0) + C_{11} P(H_1) + \\ &\int_{S_0} \left[P(H_1)(C_{01} - C_{11}) f(\mathbf{y} | H_1) - P(H_0)(C_{10} - C_{00}) f(\mathbf{y} | H_0) \right] dY \end{aligned} \quad (333)$$

Întrucât costurile deciziilor false sunt mai mari decât costurile deciziilor adevărate,

$$C_{10} > C_{00} \qquad \text{şi} \qquad C_{01} > C_{11} \tag{334}$$

pentru a minimiza costul mediu, în domeniul de integrare S_0 se vor pune toate punctele **y** pentru care expresia de sub integrală este minimă

$$P(H_1)\cdot(C_{01}-C_{11})\cdot f(\mathbf{y}\mid H_1)-P(H_0)\cdot(C_{10}-C_{00})\cdot f(\mathbf{y}\mid H_0)<0 \tag{335}$$

Rezultă regula de decizie:

Consideră H_0 adevărată dacă

$$P(H_1)\cdot(C_{01}-C_{11})\cdot f(\mathbf{y}\mid H_1)<P(H_0)\cdot(C_{10}-C_{00})\cdot f(\mathbf{y}\mid H_0) \tag{336}.$$

Folosind mărimile raport de plauzibilitate şi pragul testului, regula de decizie Bayes este:

$$L(\mathbf{y})=\frac{f(\mathbf{y}\mid H_1)}{f(\mathbf{y}\mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)\cdot(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)\cdot(C_{01}-C_{11})} \tag{337}.$$

Observaţii: 1). În cazul unor densităţi de probabilitate ce conţin funcţii exponenţiale, în scopul simplificării receptorului, se poate considera ultima relaţie prin logaritmul natural. Se obține criteriul echivalent

$$\ln L(\mathbf{y}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\gamma \tag{338}$$

2). Regula de decizie Bayes minimizează probabilitatea medie de eroare când $C_{00}=C_{11}=0$ şi $C_{10}=C_{01}=1$. Receptorul care implementează regula de decizie după plauzibilitate maximă se numește receptor de probabilitate minimă a erorii.

3). Regula de decizie Bayes este optimală în raport cu costul mediu, în sensul că nicio altă regulă de decizie nu determină obţinerea unui cost

mediu mai mic. Valoarea minimă astfel obţinută se numeşte riscul lui Bayes.

4). Pentru a aplica regula de decizie Bayes şi regula probabilităţii maxime a posteriori, trebuie să cunoaştem probabilităţile a priori $P(a_0)$, $P(a_1)$ şi costurile relative.

Exemplu: În sistemele de detecţie radar, decizia despre prezenţa (ipoteza H_1) sau absenţa (ipoteza H_0) unei ţinte este realizată pe baza unei observaţii y cu următoarele densităţi de probabilitate:

$$f(y/H_0)=\frac{y}{N_0}\exp\left(-\frac{y^2}{2N_0}\right);\quad f(y/H_1)=\sqrt{\frac{y}{2\pi AN_0}}\exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2N_0}\right)$$

unde $y>0$, A este "amplitudinea" semnalului când ţinta este prezentă şi N_0 este varianţa (dispersia) zgomotului. 1). Să se stabilească regula de decizie, presupunând $P(a_0)$ = 0.49. Valori numerice: N_0 = 0.1 W/Hz; A = 1 V. Să se reprezinte grafic. 2). Să se precizeze dacă există ţintă, dacă s-a recepţionat valoarea y = 0.9. 3). Să se calculeze probabilităţile alarmei false, *Pf*, şi probabilitatea unei pierderi, *Pm*.

Soluţie: 1). Regula de decizie presupune calculul raportului de plauzibilitate şi a pragului testului. Raportul de plauzibilitate este

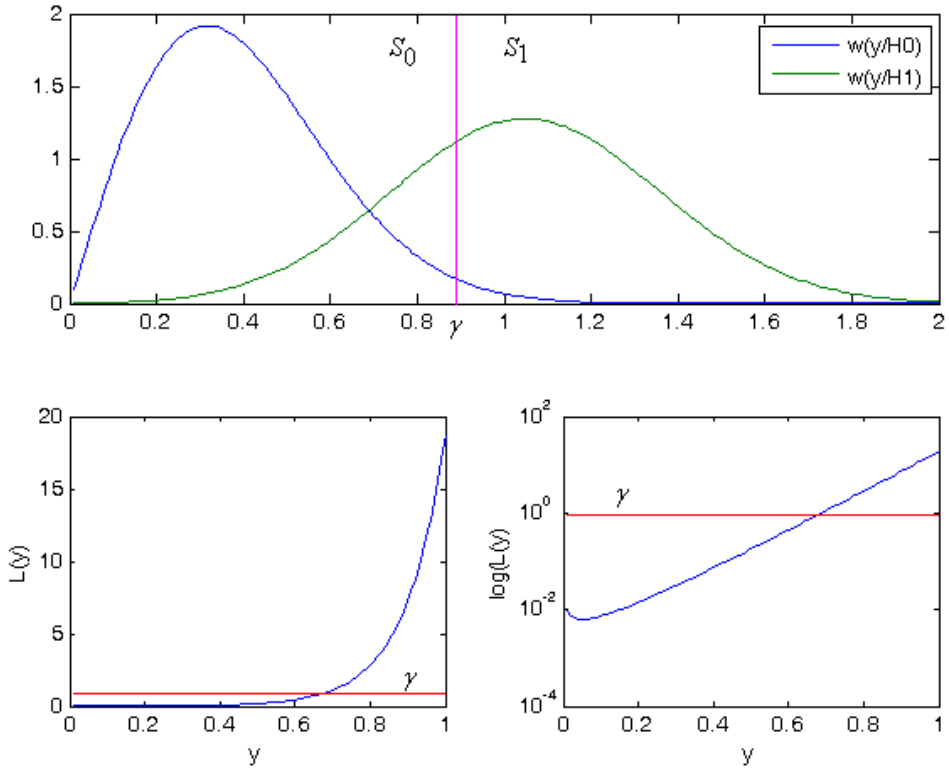
$$\Lambda(y)=\frac{f(y/H_1)}{f(y/H_0)}=\frac{\sqrt{\frac{y}{2\pi AN_0}}\exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2N_0}\right)}{\frac{y}{N_0}\exp\left(-\frac{y2}{2N_0}\right)}=\sqrt{\frac{N_0}{2\pi y}}\exp\left(\frac{2yA-A^2}{2N_0}\right)$$

Pragul testului este

$$\gamma=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}=\frac{0.49}{0.51}=\quad 0.9608,$$

iar criteriul de decizie este

$$\Lambda(y)=\sqrt{\frac{N_0}{2\pi\cdot y}}\exp\left(\frac{2yA-A^2}{2N_0}\right)\ \begin{matrix}H_1\\ \geq\\ \leq\\ H_0\end{matrix}\ \gamma=\quad 0.9608$$



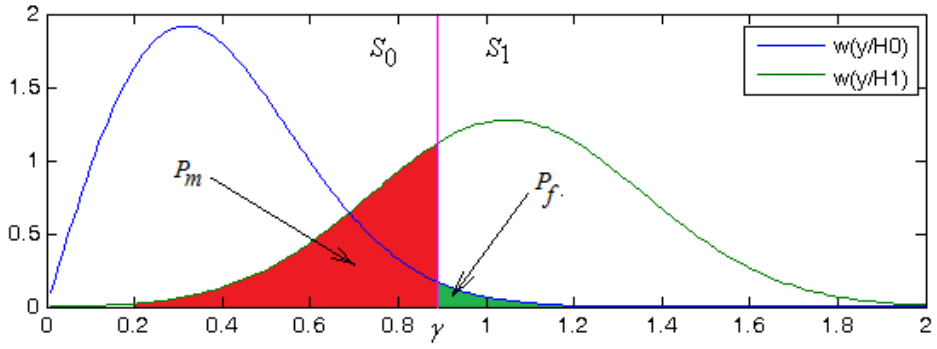
2). Pentru y =0.9, așa cum se poate observă și din graficul anterior, raportul de plauzibilitate este

$$\Lambda(0.9)=\sqrt{\frac{0.1}{2\pi\cdot 0.9}}\exp\left(\frac{2\cdot 0.9\cdot 1-1}{2\cdot 0.1}\right)=7.26>\gamma=0.9608\rightarrow H_1 \quad TRUE$$

3). Probabilitățile cerute reprezintă ariile reprezentate în figura de mai jos. Expresiile de calcul sunt:

$$P_m=P(D_0/a_1)=\int_{S_0} f(y\mid H_1)dy=\int_{-\infty}^{0.89}\sqrt{\frac{y}{2\pi AN_0}}\,exp\left(-\frac{(y-A)^2}{2N_0}\right)$$

$$P_f=P(D_1/a_0)=\int_{S_1} f(y\mid H_0)dy=\int_{0.89}^{\infty}\frac{y}{N_0}exp\left(-\frac{y^2}{2N_0}\right)$$



■

Exercițiu propus: Se consideră o problemă de detecție binară. Variabila observată y are densitățile de probabilitate condiționate $f(y/a_1)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y\in I=[0,2]\\ 0, & y>2\end{cases}$ și $f(y/a_0)=e^{-y}$, $y>0$ și $P(a_0)=0.15$.

a). Să se calculeze raportul de plauzibilitate și să se determine regiunile de decizie, S_0 și S_1.
b). Să se precizeze simbolul transmis (a_0 sau a_1), dacă s-a recepționat y = 0.1.
c). Să se calculeze probabilitatea alarmei false, P_f.
d). Să se calculeze probabilitatea unei pierderi, P_m.
e). Să se calculeze probabilitatea medie de eroare, P_e.

4.8. Detecţia unui semnal cunoscut prin observarea discretă a semnalului recepţionat şi zgomot alb

În cazul detecţiei binare, receptorul calculează decizia prin observarea semnalului recepţionat pe durata a T secunde. În fiecare interval de observație, receptorul efectuează următoarele acţiuni: eşantionează, prelucrează eşantioanele şi evaluează o regulă de decizie bazată pe eşantioanele obţinute.

Presupunem existenţa a două semnale $s_0(t)$ şi $s_1(t)$, corespunzătoare celor două simboluri ale sursei S. În ipoteza unui zgomot alb aditiv, semnalul recepţionat este suma dintre semnalul emis şi zgomotul de pe canal:

$$y(t)=x(t)+n(t) \tag{339}$$

unde

$$x(t)=\begin{cases} s_0(t), & \text{dacă se emite simbolul } a_0 \\ s_1(t), & \text{dacă se emite simbolul } a_1 \end{cases} \tag{340}$$

De exemplu, $s_0(t)$ poate fi un impuls dreptunghiular de durată T şi amplitudine –1, iar $s_1(t)$ poate fi un impuls dreptunghiular de durată T şi amplitudine 1. Indiferent de caz, semnalul $x(t)$ se cunoaşte. Ceea ce nu cunoaşte receptorul este care din cele două semnale, $s_0(t)$ şi $s_1(t)$, a fost emis pe durata unui interval de observatie, T.

Presupunem că receptorul preia m eşantioane y_1, $y_2,\ldots,y_m$ din semnalul recepţionat $y(t)$. Valorile eşantioanelor definesc un vector aleatoriu $\mathbf{y}=[y_1\ y_2\ \ldots\ y_m]^T$. În raport cu cele două ipoteze, H_1 şi H_0 , eşantioanele semnalului recepţionat sunt:

$$y_k = s_{0,k} + n_k, \qquad \text{în ipoteza } H_0 \tag{341}$$

$$y_k = s_{1,k} + n_k, \qquad \text{în ipoteza } H_1 \tag{342}$$

unde $s_{0,k}=s_0(t_k)$ şi $s_{1,k}=s_1(t_k)$ sunt eşantioanele cunoscute la momentul de timp t_k .

Fie $f(\mathbf{y}|H_0)$ şi $f(\mathbf{y}|H_1)$ densităţile de probabilitate condiţionate ale vectorului receptionat în raport cu cele două ipoteze. Acestea sunt impuse de f.d.p. a zgomotului n.

Criteriul de decizie după regula plauzibilităţii maxime este:

$$L(\mathbf{y})=\frac{f(\mathbf{y}\mid H_1)}{f(\mathbf{y}\mid H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{343}$$

Forma finală a criteriului de decizie se modifică în funcţie de ipotezele care se fac asupra zgomotului de pe canal. Primul lucru ce trebuie verificat este dacă eşantioanele zgomotului sunt sau nu independente.

Fie un zgomot gaussian cu medie zero, cu densitatea spectrală de putere:

$$S_{nn}(f)=\begin{cases} \dfrac{N_0}{2}, & \text{daca } |f|<B \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \tag{344}$$

unde $N_0/2$ este densitatea spectrală de putere în reprezentare bilaterală şi B este banda receptorului, uzual egală cu banda semnalului $x(t)$. În aceste condiţii, zgomotul $n(t)$ se mai numeste zgomot alb gaussian de bandă limitată. Se poate calcula uşor puterea (dispersia) zgomotului în banda canalului

$$E\{n(t)^2\} = \sigma^2 = N_0 \cdot B \tag{345}$$

şi funcţia de autocorelaţie

$$R_{nn}(\tau) = N_0 \cdot B \cdot sinc(2\pi \cdot B\tau) \tag{346}$$

Dacă eşantioanele receptorului sunt luate la momentele de timp $t_k=k/(2B)$, $k=1,2,\ldots,m$ atunci ele sunt necorelate, şi - prin ipoteza distribuţiei gaussiene a zgomotului - rezultă că eşantioanele vor fi independente. Rezultă densitatea de probabilitate condiţionată a vectorului receptionat:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y} \mid H_i) &= \prod_{k=1}^{m} f(y_k \mid H_i) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(y_k - s_{i,k})^2}{2\sigma^2} \right] = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^m \cdot exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \frac{(y_k - s_{i,k})^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned} \tag{347}$$

Înlocuind expresia f.d.p. în regula de decizie şi logaritmând în baza e, obţinem:

$$\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{m} \left[(y_k - s_{0,k})^2 - (y_k - s_{1,k})^2 \right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right) \tag{348}$$

sau, echivalent,:

$$\sum_{k=1}^{m} y_k s_{1,k} - \sum_{k=1}^{m} y_k s_{0,k} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma^2 ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{m} \left(s_{1,k}^2 - s_{0,k}^2 \right) \tag{349}$$

sau

$$\sum_{k=1}^{m} y_k (s_{1,k} - s_{0,k}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma^2 ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{m} \left(s_{1,k}^2 - s_{0,k}^2\right) \quad (350)$$

În notaţie matricială, ultima relaţie se scrie:

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}} \cdot [\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma^2 ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{s}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{s}_0\right) \quad (351)$$

unde $\mathbf{s}_i$, i=0,1, este vectorul eşantioanelor semnalului determinist.

Fig. 8 prezintă structura receptorului pentru detecția binară prin observare discretă. Semnalul recepționat este eșantionat cu perioada T_s. Blocul DSP (Digital Signal Processing) calculează termenul din partea stângă a regulii de decizie, care - în esență - este un sumator.

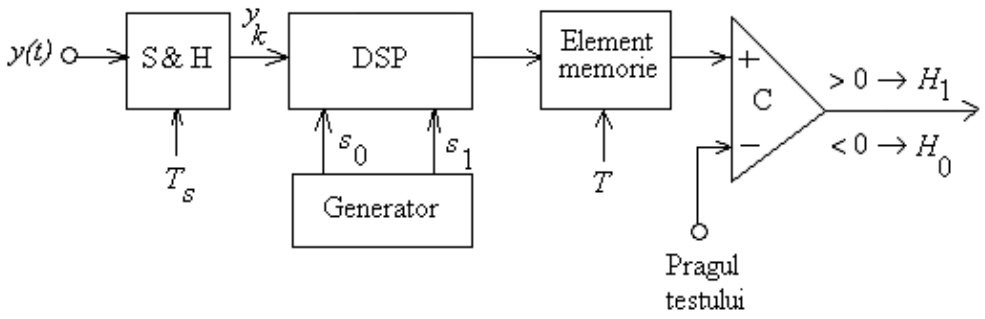


Fig. 8: Structura receptorului prin observare discretă a semnalului recepționat

Eșantioanele semnalelor $s_0(t)$ și $s_1(t)$ sunt generate de un bloc special numit "Generator" sau poate fi un circuit de memorie. După prelucrarea tuturor eșantioanelor, rezultatul se introduce într-o celulă de memorie. La fiecare T secunde se compară ieșirea elementului de memorare cu pragul testului, rezultând ca fiind adevarată una din cele două ipoteze, H_0 sau H_1.

4.9. Caracteristica de operare a detectorului

Odată cu dorința de creștere a probabilității de detecție, prin – de exemplu - micșorarea pragului deciziei, are loc și creșterea probabilității

alarmei false ceea ce este mai puțin de dorit. La fel se judecă și cu probabilitățile complementare. Micșorarea probabilității alarmei false, P_f, la fel prin creșterea pragului deciziei, nu se poate face decât cu creșterea probabilității de pierdere P_m, așa cum se poate vedea în fig. 9.

În funcție de densitățile de probabilitate implicate, dependența probabilității de detecție în funcție de probabilitatea alarmei false are o comportare neliniară. Caracteristica cea mai dorită corespunde unei curbe ce impune o probabilitate de detecție cât mai mare și o probabilitate de alarmă falsă cât mai mică, deci o curbă cu o pantă cât mai mare.

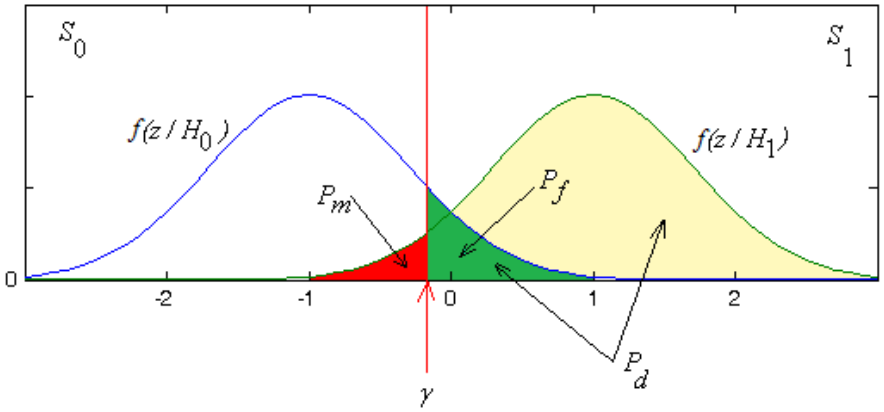


Fig. 9: Dependența probabilităților deciziilor false de pragul deciziei

Dependența P_d de P_f se numește caracteristică de operare a receptorului (ROC = *Receiver Operating Characteristic*), cu alura tipică din fig. 10. Caracteristica se folosește la vizualizarea și selectarea clasificatoarelor (detectoarelor) în funcție de performanțele obținute.

Observație: Fie problema detecției binare în care se cunosc semnalele corespunzătoare simbolurilor emise, precum și parametrii zgomotului gaussian $N(0,\sigma^2)$. Probabilitatea detecției este

$$P_d = \int_{\gamma}^{\infty} w(y/a_1)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{(y-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} dy$$

Prin schimbarea de variabilă $\frac{y-\mu_1}{\sigma\sqrt{2}} = t$ se obține $dy = \sigma \cdot \sqrt{2} \cdot dt$ și

$$P_d = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\frac{\gamma-\mu_1}{\sigma}}^{\infty} e^{-t^2} \sigma \cdot \sqrt{2} \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\gamma-\mu_1}{\sigma}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Considerând funcția standard:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - erf(x)$$

se obține probabilitatea de detecție

$$P_d = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\gamma-\mu_1}{\sigma}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\gamma - \mu_1}{\sigma} \right)$$

Similar, pentru probabilitatea alarmei false, se obține expresia

$$P_f = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\gamma-\mu_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-t^2} dt \right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\gamma - \mu_0}{\sigma} \right).$$

Considerând două valori pentru zgomotul de pe canal, $\sigma = 0.5$ și $\sigma = 1$, și modificând pragul deciziei în intervalul [-1;3] se obțin reprezentările din fig.10. Se observă performanțele superioare în condițiile în care zgomotul are putere mai mică.

La fiecare decizie se produce un punct pe caracteristica de funcționare a detectorului. Cu cât caracteristica este mai abruptă și mai apropiată de axa *y,* cu atât detecția este mai bună.

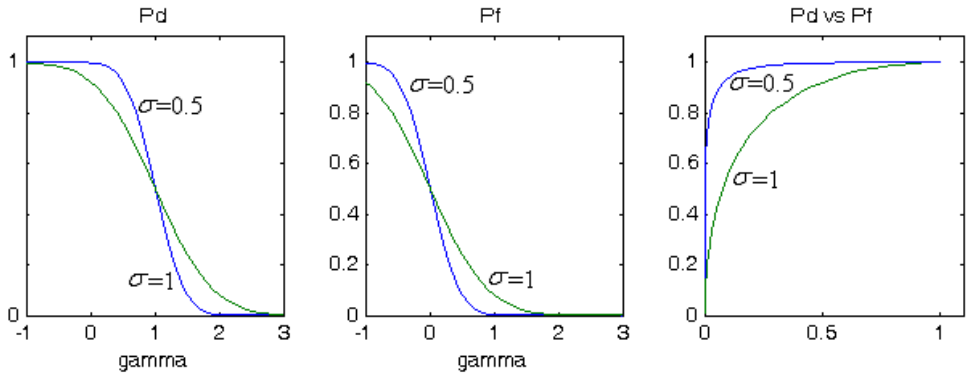
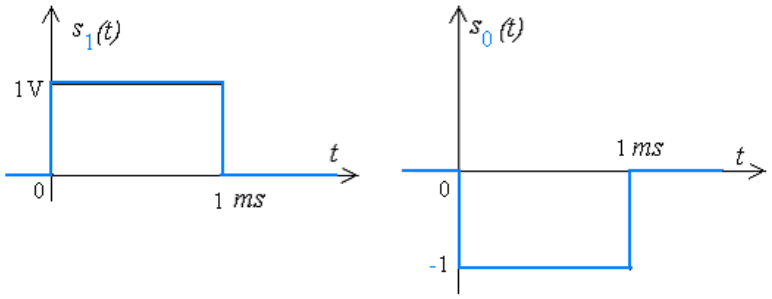


Fig. 10: Construcția caracteristicii de operare a detectorului

Exercițiu propus: În condițiile exemplului 1, să se calculeze relația de legatură dintre P_d și P_f, deci $P_d = F(P_f)$. Se poate folosi și parametrul $d = \mu_1 - \mu_0$.

Exercițiul 1: Un sistem de comunicație binar utilizează formele de undă din figură pentru transmiterea secvențelor de "1" și "0" logic, cu probabilitățile $P(a_0) = 0.3$ și $P(a_1) = 0.7$. La intrarea receptorului, semnalul sosește cu zgomot gaussian cu medie zero și densitate spectrală de putere

$$S_{nn}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} = 10^{-6}, & |\omega| < \omega_0 = 2\pi \cdot 10^6 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_0 = 10^6 \end{cases}.$$



Se cere:

a). Să se deseneze semnalul recepționat *y(t)=s(t)+n(t),* dacă sursa emite succesiunea 0110010101; se va considera o abatere standard de 0.3 V.

b). Dacă receptorul eșantionează semnalul recepționat odată la fiecare T_s = 0.2 ms și ia o decizie la $T = 1\,\text{ms}$, să se scrie regula de decizie bazată pe plauzibilitate maximă.

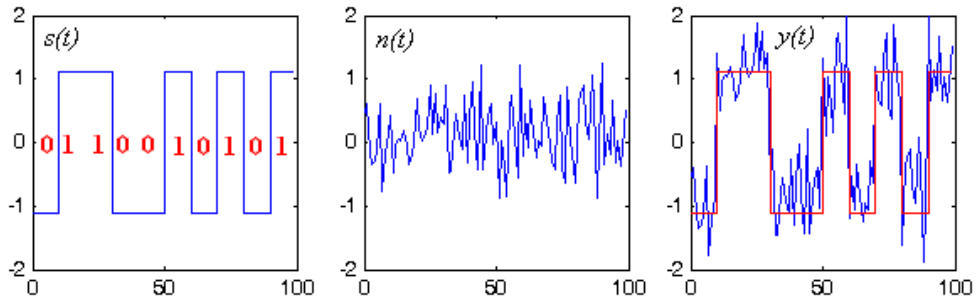
c). Să se calculeze probabilitatea medie de eroare pentru observare discretă.

d). Să se decidă simbolurile transmise dacă vectorul eșantioanelor este:

$$\mathbf{y} = [-0.5; -0.1; -0.25 - 0.35; 0.0; 1.25; 0.55; 0.89\ 0.36\ 0.1]$$

Soluție:

a). Semnalul recepționat este desenat în figura următoare. S-a presupus un zgomot mic (amplitudine 0.3 V) în raport cu amplitudinea semnalului emis.



b). Numărul de observații efectuate în intervalul T = 1 *ms* este m=1/ 0.2 = 5. Funcţia de autocorelaţie a zgomotului este

$$R_{nn}(\tau) = \frac{\omega_0 N_0}{2\pi} \cdot \sin c(\omega_0 \tau) = \left(2 \cdot 10^{-6}\right) \cdot 10^6 \cdot \sin c(2\pi 10^6 \tau)$$

care se anulează la momentele de timp

$$\tau_k = \frac{k\pi}{2\pi \cdot f_0} = \frac{k\pi}{2\pi \cdot 10^6} = k \cdot 0.5\ \mu s, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Dacă numărul de eșantioane este m=5, perioada de eșantionare de $T_s = \frac{T}{m} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{5} = 0.2\ ms$ este un multiplu al momentelor de trecere prin zero a funcției de autocorelație a zgomotului. Ca urmare, eșantioanele zgomotului sunt independente și se poate aplica regula de decizie bazată pe plauzibilitate maximă și observare discretă a semnalului recepţionat.

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}} \cdot [\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma^2 \ln\left(\frac{P(a_0)}{P(a_1)}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{s}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{s}_0\right)$$

unde $\mathbf{s_i} = \begin{bmatrix} s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{im} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ este vectorul eșantioanelor semnalului $s_i(t)$, i=0,1 și $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ este vectorul eșantioanelor semnalului recepționat. Vectorii $\mathbf{s_i}$, i=0,1 devin $\mathbf{s}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ și $\mathbf{s}_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix}$. Efectuând câteva calcule simple se obține expresia

$$\sum_{k=1}^{m} y_k (s_{1k} - s_{0k}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sigma^2 \ln\left(\frac{P(a_0)}{P(a_1)}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{m} (s^2{}_{1k} - s^2{}_{0k})$$

sau

$$\sum_{k=1}^{m} y_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{s_1 - s_0} \ln\left(\frac{P(a_0)}{P(a_1)}\right) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (s_1 + s_0)$$

Sau

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{m(s_1 - s_0)} \ln\left(\frac{P(a_0)}{P(a_1)}\right) + \frac{s_1 + s_0}{2}$$

Dispersia zgomotului este $\sigma^2 = R_{nn}(0) = 2$ W. Rezultă expresia finală a regulii de decizie:

$$Z = \bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{5} y_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{2}{5 \cdot 2} \ln\left(\frac{0.3}{0.7}\right).$$

Regula presupune calculul mediei aritmetice a valorilor eșantioanelor recepționate și compararea cu valoarea pragului $\gamma = -0.1695$.

c). Pentru calculul probabilităților trebuie calculate media și dispersia variabilei y, în cele două ipoteze H_1 și, respectiv, H_0. În ipoteza H_0:

$$\mu_Z = E\{Z/a_0\} = E\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k\right\} = \frac{1}{m}E\left\{\sum_{k=1}^{m} s_0\right\} = \frac{1}{m}\cdot m\cdot s_0 = s_0 = -1\,\text{V}$$

În ipoteza H_1:

$$\mu_{Z1} = E\{Z/a_1\} = E\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k\right\} = \frac{1}{m}E\left\{\sum_{i=1}^{m} s_1\right\} = \frac{1}{m}\cdot m\cdot s_1 = s_1 = 1\,\text{V}$$

Dispersia variabilei de decizie Z este:

$$\sigma_Z^2 = E\{Z^2(t)\} - \mu_Z^2 = E\left\{\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} y_i y_j\right\} - \mu_Z^2 =$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} E\{y_i y_j\} - \mu_Z^2 = \frac{1}{m^2}\left[\sum_{i=1}^{m} E\{y_i^2\} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\sum_{j=1}^{m} E\{y_i y_j\}\right] - \mu_Z^2 =$$

$$= \frac{1}{m^2}\left[m\left(\sigma_y^2 + \mu_y^2\right) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\sum_{j=1}^{m} R_{yy}(i,j)\right] - \mu_Z^2 =$$

$$= \frac{1}{m^2}\left[m\cdot(\sigma_y^2 + \mu_y^2) + m(m-1)\cdot\mu_y^2\right] - \mu_Z^2 = \frac{\sigma_y^2}{m} + \frac{\mu_y^2}{m} + \mu_y^2 - \frac{\mu_y^2}{m} - \mu_y^2 =$$

$$= \frac{\sigma_y^2}{m} = \frac{2}{5} = 0.4\,\text{W}$$

cu aceeași valoare, indiferent de ipoteză. În ultima expresie s-au folosit relațiile:

(i) $$E\{y_i^2\} = \sigma_y^2 + \mu_y^2$$

(ii)

$$E\{y_i y_j\} = E\{(s_i + n_i)(s_j + n_j)\} =$$

$$= E\{s_i \cdot s_j\} + E\{s_i \cdot n_j\} + E\{n_i \cdot s_j\} + E\{n_i \cdot n_j\} =$$

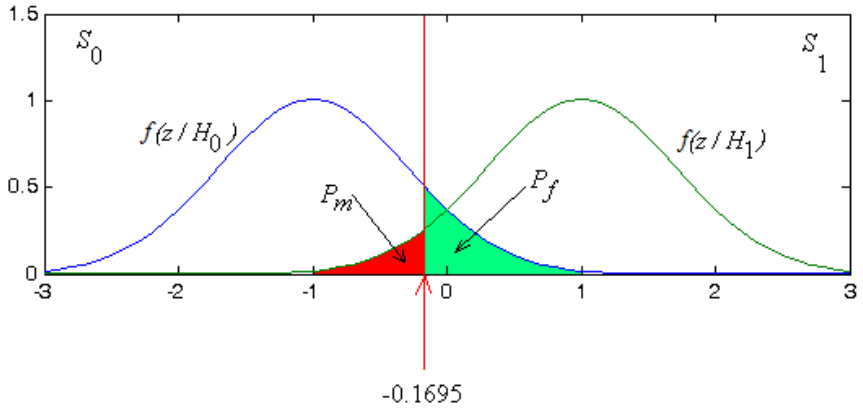
$$= E\{s_i\} \cdot E\{s_j\} + 0 + 0 + E\{n_i\} \cdot E\{\cdot n_j\} = \mu_s \cdot \mu_s + 0 + 0 + 0 \cdot 0 = \mu_s^2 = \mu_y^2$$

(iii) $$\mu_Z = E\{Z\} = E\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i\right\} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E\{y_i\} = \frac{1}{m} \cdot m \cdot \mu_y = \mu_y$$

S-a folosit faptul că $\{s_i\}$ și $\{n_i\}$ sunt necorelate și că dispersia eșantioanelor semnalului recepționat este aceeași cu dispersia zgomotului de pe canal.

Probabilitățile de eroare se calculează ușor cu ajutorul figurii de mai jos. Probabilitatea medie de eroare este

$$P_e = P(D_1 \cap a_0) + P(D_0 \cap a_1) = P(a_0) \cdot P(D_1 / a_0) + P(a_1) \cdot P(D_0 / a_1) =$$
$$= P(a_0) \cdot P_f + P(a_1) \cdot P_m$$



Expresiile generale pentru probabilități sunt:

$$P_f = P(D_1 / a_0) = \int_{\gamma}^{\infty} w(Z / a_0) dZ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \int_{\gamma}^{\infty} \exp\left(-\frac{(z+1)^2}{2\sigma_z^2}\right) dz$$

$$P_m = P(D_0 / a_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} w(z / a_1) dZ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} \int_{-\infty}^{\gamma} \exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2\sigma_z^2}\right) dz$$

În vederea folosirii funcției eroare [29], pentru prima probabilitate se face schimbarea de variabilă $\frac{z-\mu_z}{\sqrt{2}\cdot\sigma}=t$. Rezultă $dz=\sqrt{2}\sigma\cdot dt$, limitele de integrare devin $t_1=\frac{\gamma+1}{\sqrt{2}\cdot\sigma_z}=\frac{-0.1695+1}{\sqrt{2}\cdot 0.4}=1.4681,\quad t_2=\infty$ și relația finală

$$P_f=P(D_1/a_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{t_1}^{\infty}\exp\left(-t^2\right)\cdot\sigma\cdot dt\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{\infty}\exp\left(-t^2\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{\infty}\exp\left(-t^2\right)dt\right]=\frac{1}{2}\left[erfc(t_1)\right]=\frac{0.0379}{2}=0.0189$$

Pentru a doua probabilitate, avem $t_1=\frac{\gamma-1}{\sqrt{2}\cdot\sigma}=\frac{-0.1695-1}{\sqrt{2}\cdot 0.4}=-2.0674$, $t_2=\infty$ și relația finală

$$P_m=P(D_0/a_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{-2.0674}exp\left(-t^2\right)\sqrt{2}\sigma\cdot dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-2.0674}exp\left(-t^2\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{2.0674}^{+\infty}exp\left(-t^2\right)dt\right]=\frac{1}{2}\left[erfc(2.0674)\right]=\frac{0.0035}{2}=0.0017$$

Probabilitatea medie de eroare este

$$P_e=P(a_0)\cdot P_f+P(a_1)\cdot P_m=0.3\cdot 0.0189+0.7\cdot 0.0017=0.0069$$

[29] $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,\quad erfc(x)=1-erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt$

d). Vectorul recepționat conține 10 eșantioane, deci corespunde transmisiei a două simboluri. Pentru primele 5 eșantioane se obține:

$$z = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} y_k = -0.24 < -0.084 \Rightarrow H_0 \text{ ADEVĂRATĂ},$$

deci s-a transmis a_0= ‘0’ logic.

Pentru următoarele 5 eșantioane rezultă

$$z = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} y_k = 0.63 > -0.084 \Rightarrow H_1 \text{ ADEVĂRATĂ},$$

deci s-a transmis a_1= ‘1’ logic.

Exercițiu propus: Un sistem de comunicație binar utilizează formele de undă: $s_0(t) = 0V$ și $s_1(t) = 2V$. La intrarea receptorului, semnalul sosește cu zgomot gaussian cu medie zero și dispersie $\sigma^2 = 0.2$. Banda canalului este $B = 2$ MHz. Durata de transmisie a unui simbol este $T = 1\,\mu s$. Se cere:
1). Să se identifice/determine/stabilească perioada minimă de eșantionare și numărul maxim de eșantioane independente din intervalul de observare.
2). Dacă receptorul consideră numărul maxim de eșantioane, să se scrie regula de decizie bazată pe plauzibilitate maximă. Se consideră $P(a_1) = P(a_0)/3$.
3). Să se calculeze probabilitatea medie de eroare.
4). Să se decidă simbolurile transmise dacă vectorul eșantioanelor este:
$\mathbf{y} = [-0.11, -0.15, -0.25, +0.21, 0; 0.15, 1.55, 1.89, 0.36, 0.12] + 0.1$.

4.10. Detecţia multiplă

4.10.1. Ipoteze

Se consideră o sursă de informație cu mai multe simboluri și cu distribuție cunoscută:

$$S: \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{M-1} \\ P(a_0) & P(a_1) & \dots & P(a_{M-1}) \end{pmatrix} \qquad (352)$$

Emițătorul va genera semnalele $s_0(t), s_1(t),..., s_{M-1}(t)$, după cum a fost emis a_0, a_1 și, respectiv, a_{M-1}. Semnalele emise sunt cunoscute de receptor. Ceea ce nu se cunoaște la recepție este care semnal, din cele *M* posibile, a fost emis la un moment dat.
La ieșirea canalului aditiv se recepționează semnalul

$$y(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 0,1,...,M-1 \tag{353}$$

unde *n(t)* este zgomotul de pe canal. O reprezentare intuitivă a semnalului recepționat este prezentată în fig.11, pentru cazul a 4 simboluri.

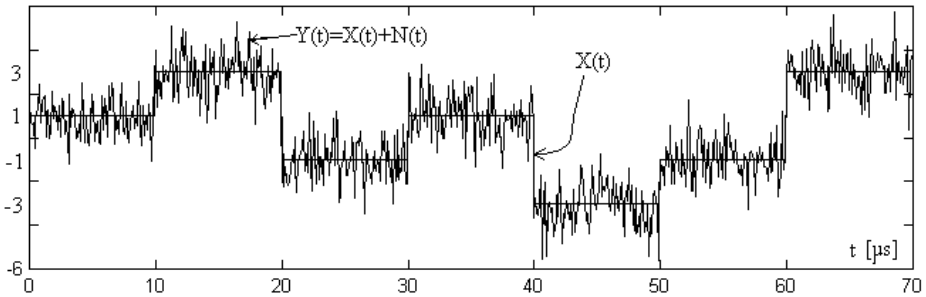


Fig. 11 : Semnale pentru cazul detectiei a *M* = 4 simboluri,
$s_0 t) = -3, s_1(t) = -1, s_2(t) = 1, s_3(t) = 3$

4.10.2. Criteriul riscului minim (Bayes) în ipoteză multiplă

Dacă deciziile sunt însoșite de costuri, atunci interesează costul mediu minim. Considerând C_{ij} ca fiind costurile deciziilor luate și $P(D_i \cap a_j), i, j = 0,1,..., M-1$ probabilitățile intersecției evenimentului de a se lua decizia D_i și a furnizării mesajului a_j, expresia costului mediu este:

$$\begin{aligned} \overline{C} &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} \cdot P(D_i \cap a_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} \cdot P(D_i / a_j) \cdot P(a_j) \end{aligned} \tag{354}$$

Probabilitățile condiționate din relația de mai sus se calculează cu expresia:

$$P(D_i / a_j) = \int_{S_i} f(\mathbf{y} / a_j) d\mathbf{y} \tag{355}$$

unde $f(\mathbf{y} / a_j)$ este densitatea de probabilitate a semnalului recepționat conditionată de simbolul a_j. Spațiul observațiilor S este împărțit acum în M subspații $S_0, S_1, ..., S_{M-1}$ astfel încât

$$S = S_0 \cup S_1 \cup ... \cup S_{M-1} \tag{356}$$

Pentru găsirea suprafeței de decizie care minimizează costul mediu, relația (42) poate fi rescrisă prin separarea costurilor deciziilor corecte:

$$\begin{aligned} \overline{C} = & \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0, \\ j \neq i}}^{M-1} P(a_j) \cdot C_{ij} \cdot \int_{S_i} f(\mathbf{y} / H_j) d\mathbf{y} + \\ & + \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} \cdot P(a_i) \cdot \int_{S_i} f(\mathbf{y} / H_i) d\mathbf{y} \end{aligned} \tag{357}$$

Întrucât

$$\int_{S_i} f(\mathbf{y} / a_i) d\mathbf{y} = 1 - \sum_{\substack{j=0, S_j \\ j \neq i}}^{M-1} \int f(\mathbf{y} / a_i) d\mathbf{y} \tag{358}$$

al doilea termen din (351) se poate scrie echivalent:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} P(a_i) \left[1 - \sum_{\substack{j=0, S_j \\ j \neq i}}^{M-1} \int f(\mathbf{y} / a_i) d\mathbf{y} \right] = \\ & = \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} P(a_i) - \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} P(a_i) \sum_{\substack{j=0, S_j \\ j \neq i}}^{M-1} \int f(\mathbf{y} / a_i) d\mathbf{y} \end{aligned} \tag{359}$$

Rezultă pentru (351):

$$\overline{C} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{M-1} C_{ij} P(a_j) \int_{S_i} f(\mathbf{y}/a_j) d\mathbf{y} +$$

$$\sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} \cdot P(a_i) - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{M-1} C_{ii} P(a_i) \int_{S_j} f(\mathbf{y}/a_i) d\mathbf{y} =$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{M-1} C_{ij} P(a_j) \cdot \int_{S_i} f(\mathbf{y}/a_j) d\mathbf{y} -$$

$$- \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{M-1} C_{ii} P(a_i) \int_{S_j} f(\mathbf{y}/a_i) d\mathbf{y} + \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} \cdot P(a_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{M-1} \left[C_{ij} P(a_j) \int_{S_i} f(\mathbf{y}/a_j) d\mathbf{y} - C_{ii} P(a_i) \int_{S_j} f(\mathbf{y}/a_i) d\mathbf{y} \right] + \tag{360}$$

$$+ \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} \cdot P(a_i)$$

Întrucât

$$P(a_j) \int_{S_i} f(\mathbf{y}/a_j) d\mathbf{y} = P(a_i) \int_{S_j} f(\mathbf{y}/a_i) d\mathbf{y} \tag{361}$$

se poate scrie

$$\overline{C} = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{S_i} \sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{M-1} P(a_j) \left(C_{ij} - C_{jj} \right) f(\mathbf{y}/a_j) d\mathbf{y} + \sum_{i=0}^{M-1} C_{ii} \cdot P(a_i) \tag{362}$$

Se observă ca al doilea termen este constant, astfel încât costul este determinat numai de primul termen, în funcție de spațiul selectat. Valoarea minimă a integralei impune selecția ipotezei pentru care expresia de sub integrala

$$I_i(\mathbf{y}) = \sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{M-1} P(a_j)\cdot(C_{ij} - C_{jj})\cdot f(\mathbf{y}/H_j) \qquad (363)$$

este minimă.

Definind rapoarte de plauzibilitate de forma:

$$\Lambda_i(\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}/a_i)}{f(\mathbf{y}/a_0)}, \quad i = 0,1,...,M-1 \qquad (364)$$

se poate scoate scrie

$$f(\mathbf{y}/a_i) = \Lambda_i(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}/a_0) \qquad (365)$$

și

$$J_i(\mathbf{y}) = \frac{I_i(y)}{f(y/H_0)} = \sum_{j=1}^{M-1} P(a_j)\cdot(C_{ij} - C_{jj})\cdot\Lambda_j(\mathbf{y}) \qquad (366)$$

Regula de decizie constă în alegerea ipotezei H_i pentru care funcţia $J_i(\mathbf{y})$ este minimă.

4.10.3. Regula probabilității maxime a posteriori (MAP[30])

În sistemele de comunicații, se consideră des următoarele costuri

$$C_{ii} = 0, \quad i = 1,2,...,M-1 \qquad (367)$$

și

$$C_{ij} = 1, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,...,M-1 \qquad (368)$$

În acest caz, minimizarea costului mediu este echivalentă cu minimizarea probilității medii de eroare. Înlocuind (358) și (359) în (354) se obține

[30] MAP = Maximum A posteriori Probability

$$I_i(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{M-1} P(a_j)\cdot f(\mathbf{y}/a_j)d\mathbf{y} = \\ = \sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{M-1} P(a_j/\mathbf{y})\cdot f(\mathbf{y}) = \left[1-P(a_i/\mathbf{y})\right]\cdot f(\mathbf{y}) \tag{369}$$

Minimizarea expresiei (62) este echivalentă cu maximizarea probabilității $P(a_i/\mathbf{y})$, care este probabilitatea a posteriori de a lua decizia H_i dându-se vectorul observațiilor $\mathbf{y}$.

4.10.4. Regula (criteriul) plauzibilității maxime

Criteriul plauzibilității maxime consideră că s-a furnizat simbolul a_i dacă

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}/a_i)}{f(\mathbf{y}/a_j)} > \frac{P(a_j)}{P(a_i)}, \quad \forall i \neq j, \quad i,j = 0,1,2,...,M-1 \tag{370}$$

sau

$$D_i: \quad \Lambda_{ij}(y) > \gamma_{ij}, \quad \forall i \neq j = 0,1,2,...,M-1 \tag{371}$$

Pentru cazul unui zgomot alb gaussian, cu medie nulă și dispersie σ^2, și prin observarea discretă a semnalului recepționat la momente generatoare de eșantioane independente, relația (63) poate fi scrisă sub forma

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{y}) = \frac{\prod_{k=1}^{N} f(y_k/a_i)}{\prod_{k=1}^{N} f(y_k/a_j)} = \frac{e^{-\sum_{k=1}^{N}\frac{(y_k - s_{ik})^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\sum_{k=1}^{N}\frac{(y_k - s_{jk})^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_j}{\overset{H_i}{\gtrless}} \frac{P(H_j)}{P(H_i)}, \quad \forall i \neq j \tag{372}$$

Considerând logaritmul natural al raportului de plauzibilitate, se obține condiția pentru H_i adevarată:

$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{(y_k-s_{ik})^2}{2\sigma^2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{(y_k-s_{jk})^2}{2\sigma^2}>\ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)},\qquad(373)$$
$$\forall i\neq j$$

sau

$$\sum_{k=1}^{N}(y_k-s_{ik})^2<-2\sigma^2\cdot\ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)}+\sum_{k=1}^{N}(y_k-s_{jk})^2,\qquad(374)$$
$$\forall i\neq j$$

Prin prelucrări succesive, $\forall i\neq j$, se pot scrie expresiile:

$$\sum_{k=1}^{N}\left(-2y_k s_{ik}+s^2{}_{ik}\right)<-2\sigma^2\ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)}+\sum_{k=1}^{N}\left(-2y_k s_{jk}+s^2{}_{jk}\right)\qquad(375)$$

$$2\sum_{k=1}^{N}y_k(s_{ik}-s_{jk})>2\sigma^2\cdot\ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)}+\sum_{k=1}^{N}\left(s^2{}_{ik}-s^2{}_{jk}\right)\qquad(376)$$

$$\sum_{k=1}^{N}y_k(s_{ik}-s_{jk})>\sigma^2\ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(s^2{}_{ik}-s^2{}_{jk}\right)\qquad(377)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}y_k(s_{ik}-s_{jk})>\frac{\sigma^2}{N}\cdot\ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)}+\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}\left(s^2{}_{ik}-s^2{}_{jk}\right)\qquad(378)$$

Considerând observațiile sub forma unor vectori coloană

$$\mathbf{y}=[y_1\ \ldots\ y_k\ \ldots\ y_N]^T\qquad(379)$$

$$\mathbf{s}_i=[s_{i1}\ \ldots\ s_{ik}\ \ldots\ s_{iN}]^T\qquad(380)$$

$$\mathbf{s}_j=[s_{j1}\ \ldots\ s_{jk}\ \ldots\ s_{jN}]^T\qquad(381)$$

se obține relația matricială "Consideră D_i dacă

$$\mathbf{y}^T \cdot \left(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j \right) > \sigma^2 \cdot ln \frac{P(H_j)}{P(H_i)} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{s}_i^T \cdot \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j^T \cdot \mathbf{s}_j \right), \qquad (382)$$

$$\forall i \neq j, i, j = 0,1,2,...,M-1;$$

Structura generală a unui receptor pentru detecția multiplă are la baza relația (369) și este prezentată în fig.12. Schema va selecta acea decizie pentru care corelația dintre vectorul observațiilor, **y**, și vectorii semnalelor emise, $\{\mathbf{s}_j, j = 0,1,..., M-1\}$ este <u>maximă</u>.

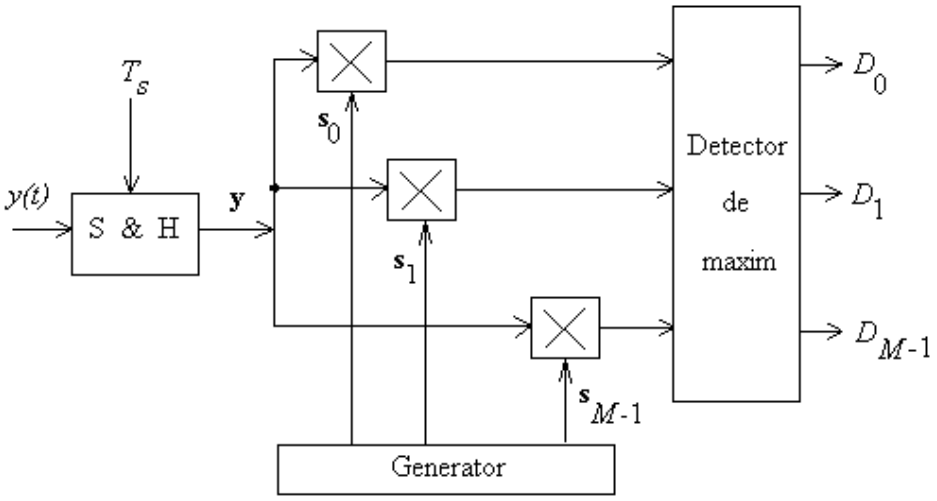


Fig. 12: Structura generală a unui receptor pentru detecție multiplă și observare discretă

Funcționarea schemei este următoarea: semnalul recepționat, $y(t)$, este eșantionat și rezultă vectorul eșantionelor **y**; de la un generator de semnale (sau o memorie) se obțin eșantioanele semnalelor $s_i(t), i = 0,1,..., M-1; \quad t \in [0,T]$; înmulțirea este realizată cu ajutorul multiplicatoarelor; cea mai mare valoare este detectată de un circuit numit "*Detector de maxim*", implementat după relația (381), cu ajutorul căruia se determină <u>cel mai probabil simbol emis</u>, a_i.

<u>Observații:</u> Dacă semnalele reprezintă impulsuri de amplitudine constantă, așa cum se va vedea în exercițiul următor, $s_i(t) = s_i = ct, \quad t \in [t_0, t_0 + T]$, și prin considerarea a *N* eșantioane, se consideră H_i adevarată dacă

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k(s_i - s_j) > \frac{\sigma^2}{N}\cdot ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)} + \frac{s^2 i - s^2 j}{2}, \quad \forall i \neq j$$

sau

$$2(s_i - s_j)\cdot \bar{y} > \frac{2\sigma^2}{N}\cdot ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)} + s_i^2 - s_j^2, \quad \forall i \neq j$$

sau

$$\bar{y}^2 + 2\cdot\bar{y}\cdot\left(s_i - s_j\right) > \frac{2\sigma^2}{N}\cdot ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)} + \bar{y}^2 + s_i^2 - s_j^2, \quad \forall i \neq j$$

$$\bar{y}^2 - 2\cdot\bar{y}\cdot s_j + s_j^2 > \frac{2\sigma^2}{N}\cdot ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)} + \bar{y}^2 - 2\cdot\bar{y}\cdot s_i + s_i^2, \quad \forall i \neq j$$

$$(\bar{y} - s_i)^2 \underset{H_i}{<} -\frac{2\sigma^2}{N}\cdot ln\frac{P(H_j)}{P(H_i)} + (\bar{y} - s_j)^2, \quad \forall i \neq j = 0,1,2,...,M-1$$

Ultima relație arată că se ia decizia D_i dacă variabila "finală" a observațiilor (în cazul de față, media observațiilor) se află la distanța (diferența) minimă de semnalul s_i din mulțimea tuturor semnalelor $\{s_j, j = 0,1,...,M-1\}$. Acest lucru se mai scrie:

$$D_i \text{ dacă } i = arg\,min\left\{(\bar{y} - s_j)^2\right\}, j = 0,1,2,...,M-1 \qquad (383)$$

Exercițiul 1*:* Un sistem de comunicaţii numeric utilizează formele de undă de tip impuls, fiecare impuls emis putând avea o amplitudine din patru posibile, -3,-1,1 sau 3, cu aceeaşi probabilitate. Semnalul recepţionat este $y(t)=s_i(t)+n(t)$, i=0,1,2,3, unde $n(t)$ este un zgomot aleatoriu gaussian cu medie zero şi densitate spectrală de putere:

$$S_{nn}(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} = 2\cdot 10^{-7}, & \text{daca } |f| \leq f_0 = 1\text{MHz} \\ 0, & \text{daca } |f| > f_0 = 1\text{MHz} \end{cases}$$

Receptorul prelucrează câte cinci eşantioane egal distanţate pe durata fiecărui impuls şi ia o decizie. Durata de emisie a unui simbol este 10 μs iar perioada de eșantionare de 2 μs.

1). Să se stabilească regula de decizie şi să se calculeze probabilitatea deciziei eronate.

2). Să se ia decizia cea mai bună pentru vectorul recepționat $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.25 & 1.15 & 1.21 & 1.26 \end{bmatrix}$

Soluţie*:* 1). În timpul duratei primului simbol recepţionat [0, 10μs], $s_i(t)$ este constant şi se citesc eşantioanele semnalului recepţionat $y(t)$ la fiecare 2 μs. S-a demonstrat că eşantioanele multiplu de 0.5 μs sunt independente, deci şi cele prelevate cu o perioadă de 2 μs sunt independente.
Regula de decizie pentru decizia D_i este

$$z = \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \gtrless \frac{s_i + s_j}{2} = \gamma_{ij}, \quad \forall i \neq j, s_i > s_j$$

Variabila de decizie este media eșantioanelor recepționate, deci vom avea densități de probabilitate de forma:

$$f(z/a_j) = f\left(z/a_j\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z{}^2}} \exp\left[-\frac{\left(z - s_j\right)^2}{2\sigma_z{}^2}\right], \quad j = 0,1,2,3$$

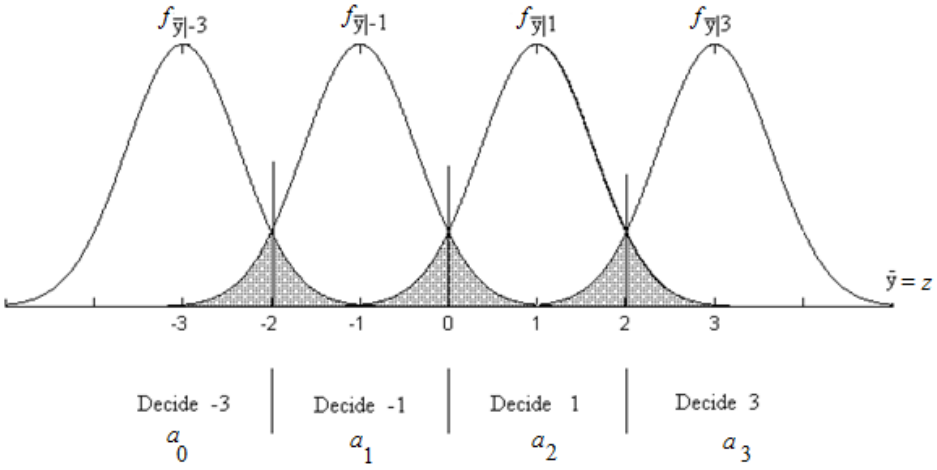
Dispersia zgomotului este:

$$\sigma_n{}^2 = N_0 \cdot B = 4 \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 = 0.4 \quad W$$

Dispersia variabilei *z* este

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_y^2}{N} = \frac{\sigma_n^2}{5} = \frac{0.4}{5} = 0.08 \quad W$$

Funcţiile densitate de probabilitate condiţionate ale variabilei de decizie $z = \bar{y}$ şi regiunile de decizie sunt indicate mai jos.



F.d.p. condiţionate şi probabilităţile deciziilor incorecte

Fiecare porţiune haşurată reprezintă probabilitatea unei decizii incorecte şi probabilitatea medie a deciziei incorecte este:

$$P_e = \sum_{i=0}^{3} \sum_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{3} P(D_j \mid a_i) \cdot P(a_i) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{3} P(D_j \mid a_i) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum (ariilor\ hașurate) = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot \int_{2}^{+\infty} f(z/a_2)dz =$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^{\,2}}} \int_{2}^{+\infty} exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2\cdot\sigma_z^{\,2}}\right)dz = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 0.08}} \int_{2}^{+\infty} exp\left(-\frac{(z-1)^2}{2\cdot 0.08}\right)dz$$

Prin schimbarea de variabilă $t = \frac{z-1}{\sqrt{0.08}}$ se obţin noile limite de integrare $t_1 = \frac{1}{\sqrt{0.08}}$ şi $t_2 = \infty$, variabila de integrare $dt = dz/\sqrt{0.08}$ şi probabilitatea medie de eroare

$$P_e = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{+\infty} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

Însă, pentru a folosi funcţia tabelată *erf(x)*[31], se face schimbarea de variabilă: $t/\sqrt{2} = x$, $dt = \sqrt{2} \cdot dx$ şi se obţine:

$$P_e = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - 0.5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} exp\left(-\frac{t^2}{2} \right) dt \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(0.5 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot 0.08}}} exp\left(-x^2 \right) dx \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(0.5 - \frac{erf(1/\sqrt{0.16})}{2} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(0.5 - \frac{erf(2.5)}{2} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(0.5 - \frac{0.99959}{2} \right) =$$

$$= 3.052 \cdot 10^{-4}$$

2). Pentru vectorul recepționat $\mathbf{y} = [1.2 \quad 1.25 \quad 1.15 \quad 1.21 \quad 1.26]$ variabila de decizie este

$$z = \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_k = \frac{1}{5}(1.2 + 1.25 + 1.15 + 1.21 + 1.26) = 1.21$$

Distanţele dintre variabila de decizie *z* şi valorile s_i sunt:

$$d(z, s_0)^2 = (z - s_0)^2 = (1.21 - (-3))^2 = 4.21^2 = 17.72$$
$$d(z, s_1)^2 = (z - s_1)^2 = (1.21 - (-1))^2 = 2.21^2 = 4.88$$
$$d(z, s_2)^2 = (z - s_2)^2 = (1.21 - (1))^2 = 0.21^2 = 0.04$$
$$d(z, s_3)^2 = (z - s_3)^2 = (1.21 - 3)^2 = (-2.21)^2 = 4.88$$

Întrucât

$$min\left\{ d_j^2, j = 0,1,2,3 \right\} = min\{17.72; \quad 4.88; \quad 0.04; \quad 4.88\} = 0.04 = d_2^2$$

rezultă ca s-a emis simbolul a_2.

Exerciţiul 2: Un sistem de comunicație ternar folosește semnalele $s_1(t) = 1V$, $s_2(t) = 2V$ și $s_3(t) = 3V$ pentru emiterea simbolurilor $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$ cu probabilitățile $P(a_1) = 0.3, P(a_2) = 0.2$. Zgomotul

[31] erf(x) = 2/sqrt(pi) * integral from 0 to x of exp(-t^2) dt.

de pe canal este aditiv, gaussian cu medie zero și varianța $\sigma^2 = 0.5$. Se folosesc eșantioane independente. Receptorul face câte 2 observații în fiecare perioadă de transmisie.

a). Să se deseneze forma de undă recepționată, pentru o secvența emisă "010122101".

b). Să se scrie regula de decizie după plauzibilitate maximă și observare discretă.

c). Să se scrie și să se deseneze densitățile de probabilitate $f(z/a_1), f(z/a_2), f(z/a_3)$, unde *z* este variabila de decizie.

d). Să se evidențieze subspațiile de decizie.

e). Să se decidă simbolurile emise dacă s-a recepționat $\mathbf{y} = [+2.8; +3.2; +0.2; +0.5; 1.3; +0.75]$.

Soluție**:** b). Regula de decizie prin observare discretă, scrisă pentru cazul ipotezei binare *i* și *j*, are la bază relația

$$\Lambda_{ij}(z) = (s_i - s_j)\cdot z \quad > \quad \gamma_{ij} = \frac{\sigma^2}{N} ln\left(\frac{P(H_j)}{P(H_i)}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(s_i^2 - s_j^2\right)$$

Pentru cazul multiplu se poate scrie regula

$$D_i: \quad \Lambda_{ij}(z) > \gamma_{ij}, \quad \forall i \neq j = 1,2,...,M$$

Valorile pragurilor se calculează cu relațiile

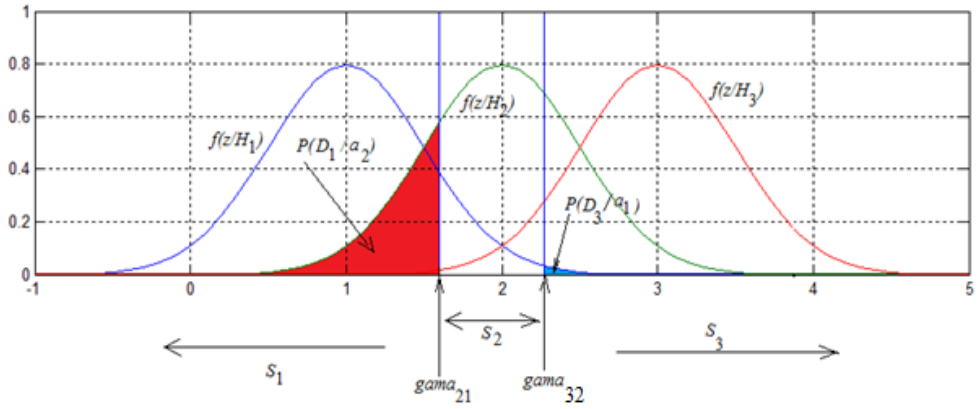
$$\gamma_{12} = \frac{0.5}{2} ln\frac{0.2}{0.3} + \frac{1}{2}\left(1^2 - 2^2\right) = 0.25\cdot ln\,0.66 - 1.5 = -1.6039$$

$$\gamma_{13} = \frac{0.5}{2} ln\frac{0.5}{0.3} + \frac{1}{2}\left(1^2 - 3^2\right) = 0.25\cdot ln\,1.66 - 4 = -3.8733$$

Rezultă matricea pragurilor

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1.6039 & -3.8733 \\ 1.6039 & 0 & -2.2709 \\ 3.8733 & 2.2709 & 0 \end{bmatrix}$$

Din mulțimea pragurilor calculate se reţin numai pragurile care au semnificație fizică, respectiv cele care separă cele trei domenii de observații S_1, S_2 și S_3, așa cum se prezintă în figura de mai jos.



c). Variabile de decizie este (z/a_j) cu densitățile de probabilitate

$$f(z/a_j)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\sigma^2}}exp\left(-\frac{(z-s_j)^2}{2\sigma_z^2}\right),\ \text{unde}\ \sigma_z^2=\sigma^2/N.$$

Această expresie se folosește la calculul probabilităților de eronare.

e). Pentru primele două valori ale lui $\mathbf{y}=[+\mathbf{2.8};+\mathbf{3.2};+0.2;+0.5;1.3;+0.75]$ se obțin valorile rapoartelor de plauzibilitate:

$$\Lambda_{12}=(s_1-s_2)\cdot\frac{y(1)+y(2)}{2}=(1-2)\cdot\frac{2.8+3.2}{2}=-3$$

$$\Lambda_{13}=(s_1-s_3)\cdot\frac{y(1)+y(2)}{2}=(1-3)\cdot\frac{2.8+3.2}{2}=-6$$

$$\Lambda_{23}=(s_2-s_3)\cdot\frac{y(1)+y(2)}{2}=(2-3)\cdot\frac{2.8+3.2}{2}=-3$$

Celelalte valori ale raportului de plauzibilitate sunt scrise în matricea

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23}\\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3 & -6\\ 3 & 0 & -3\\ 6 & 3 & 0\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23}\\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1.6 & -3.87\\ 1.6 & 0 & -2.27\\ 3.87 & 2.27 & 0\end{bmatrix}$$

Considerând diverse referințe pentru simbolul emis (variabila *i*) putem scrie:

i=1 și $j\neq i$, rezultă $j=2,3$:

$$\Lambda_{12}=-3<\gamma_{12}=-1.6039\rightarrow H_2 \quad \text{deci nu } H_1$$
$$\Lambda_{13}=-6<\gamma_{13}=-3.87\rightarrow H_3 \quad \text{deci nu } H_1$$

i=2 și $j\neq i$, rezultă $j=1,3$:

$$\Lambda_{21}=3>\gamma_{21}=1.6039\rightarrow H_2$$
$$\Lambda_{23}=-3<\gamma_{23}=-2.27\rightarrow H_3 \quad \text{ar putea deci nu } H_1$$

i=3 și $j\neq i$, rezultă $j=1,2$:

$$\Lambda_{31}=6>\gamma_{31}=3.87\rightarrow H_3$$
$$\Lambda_{32}=3>\gamma_{32}=2.27\rightarrow H_3$$

Rezultă H_3 ADEVĂRATĂ.

Pentru următoarele două valori ale lui $\mathbf{y}=[+2.8;+3.2;+\mathbf{0.2};+\mathbf{0.5};1.3;+0.75]$ se obțin:

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13}\\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23}\\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -0.35 & -0.7\\ 0.35 & 0 & -0.35\\ 0.7 & 0.35 & 0\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}0 & -1.6 & -3.87\\ 1.6 & 0 & -2.27\\ 3.87 & 2.27 & 0\end{bmatrix}$$

Considerând diverse referințe putem scrie:

i=1 și $j \neq i$, rezultă $j = 2,3$:

$$\Lambda_{12} = -0.35 > \gamma_{12} = -1.6039 \rightarrow H_1$$
$$\Lambda_{13} = -0.7 > \gamma_{13} = -3.87 \rightarrow H_1$$

Rezultă H_1 ADEVĂRATĂ.

Pentru următoarele două valori ale lui $\mathbf{y} = [+2.8;+3.2;+0.2;+0.5;\mathbf{1.8};+1.\mathbf{75}]$ se obțin:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1.775 & -3.55 \\ 1.775 & 0 & -1.775 \\ 3.55 & 1.775 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & -1.6 & -3.87 \\ 1.6 & 0 & -2.27 \\ 3.87 & 2.27 & 0 \end{bmatrix}$$

i= 1 și $j \neq i$, rezultă $j = 2,3$:

$$\Lambda_{12} = -1.775 < \gamma_{12} = -1.6039 \rightarrow H_2$$
$$\Lambda_{13} = -3.55 > \gamma_{13} = -3.87 \rightarrow H_1$$

i=2 și $j \neq i$, rezultă $j = 1,3$:

$$\Lambda_{21} = 1.775 > \gamma_{21} = 1.6039 \rightarrow H_2$$
$$\Lambda_{23} = -1.775 > \gamma_{23} = -2.27 \rightarrow H_2$$

Rezulta H_2 ADEVĂRATĂ.

Exerciţiu propus: Un sistem de comunicație ternar folosește semnalele $s_1(t) = 0V$, $s_2(t) = 1V$ și $s_3(t) = 2V$ pentru emiterea simbolurilor a_1, a_2, a_3, cu probabilitățile $P(a_1) = 0.25$; $P(a_2) = 0.35$. Zgomotul de pe canal este gaussian cu medie zero și varianță $\sigma^2 = 0.25$. Pentru luarea unei decizii se consideră câte trei eșantioane independente ale semnalului recepționat.

a). Să se scrie regula de decizie după plauzibilitate maximă.

b). Să se decidă simbolurile transmise, dacă vectorul recepționat este: $y = [+0.15;+0.21;+0.23;+2.51;+1.83;+2.15]$.

c). Să se calculeze probabilitatea medie de eroare, considerând numai probabilitățile de eroare (P_{12}, P_{21}) și (P_{23}, P_{32}). Celelate sunt suficient de mici pentru a fi considerate nule.

4.11. Detecţia secvenţială

4.11.1. Detecţia secvenţială în cazul ipotezei binare

În multe aplicaţii este posibil să se micşoreze durata observaţiei, discrete sau continue, datorită puterii mici a zgomotului sau a restricţiilor de timp impuse pentru luarea deciziei. Soluţia practică constă în micşorarea numărului de eşantioane prelucrate pentru calculul raportului de plauzibilitate şi – deci – pentru luarea deciziei.

Dacă zgomotul are putere mică, este posibil să se estimeze cu o eroare mică valorile pragului testului. În locul unei singure valori a pragului testului, se vor considera două valori de comparaţie, *A* şi *B*, *A*<*B*. Dacă raportul de plauzibilitate este mai mare decât *B* se consideră adevarată ipoteza H_1. Dacă raportul de plauzibilitate este mai mic decât pragul *A*, se consideră adevarată ipoteza H_0, așa cum se prezintă în fig.13.

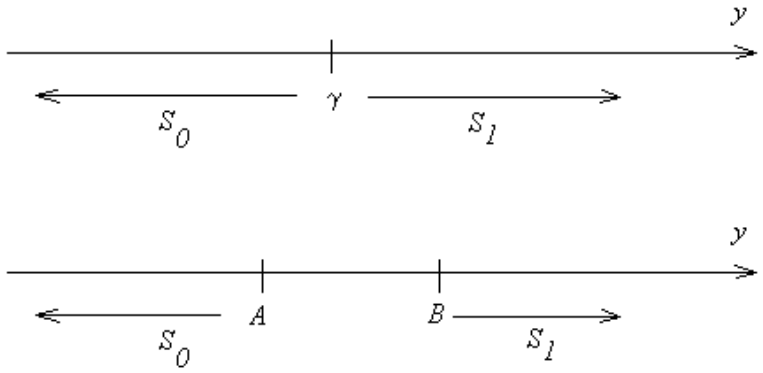


Fig. 13: Transformarea unui prag în două praguri, pentru detecție secvențială

Inițial, în primii pași ai detecției, pragurile *A* și *B* sunt la diferențe mari una de cealaltă, în funcție de probabilitățile impuse ale detecției (sau a probabilității de pierdere) și a alarmei false. Pragurile se apropie unul de celalalt, pe măsură ce crește numărul de observaţii.

Considerăm numărul de observaţii variabil, fie acesta *m*. Eşantioanele observate sunt $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Raportul de plauzibilitate este în funcţie de numărul de eşantioane:

$$L(\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y} \mid H_1)}{f(\mathbf{y} \mid H_0)} \tag{384}$$

Detecţia secvenţială se realizează prin parcurgerea următorilor paşi:

1. Se face prima observaţie, m=1, $\mathbf{y}$ = [y_1]. Se calculează raportul de plauzibilitate $\Lambda(\mathbf{y})$.
2. Se compară raportul de plauzibilitate cu două praguri, B şi A, $B>A$. Sunt posibile următoarele cazuri:
   2.1 dacă $L(\mathbf{y}) \geq B$ se consideră adevărată ipoteza H_1 şi testul este terminat;
   2.2 dacă $L(\mathbf{y}) \leq A$ se consideră adevărată ipoteza H_0 şi testul este terminat;
   2.3 dacă $A < L(\mathbf{y}) < B$ nu se ia o decizie şi se face o nouă observaţie, crescând numărul de eşantioane la $m=m+1$.

3. Numărul de eşantioane este crescut până când este îndeplinită una din condiţiile de terminare a testului. Evident, numărul de observaţii m necesar luării unei decizii este o variabilă aleatorie. Dacă $m>n$, unde n este numărul maxim de observaţii ce se pot efectua, se decide că nu este posibilă detecţia.

Perioada de eşantionare se alege astfel încât să fie asigurată condiţia de independenţă statistică a eşantioanelor.

Calculul pragurilor A şi B se poate face uşor. În cazul ipotezei H_1 raportul de plauzibilitate este:

$$L(\mathbf{y}_m) = \frac{f(\mathbf{y}_m \mid H_1)}{f(\mathbf{y}_m \mid H_0)} \geq B \tag{385}$$

sau, echivalent,

$$f(\mathbf{y}_m \mid H_1) \geq B \cdot f(\mathbf{y}_m \mid H_0) \tag{386}$$

Ultima relaţie se integrează pe spaţiul S_1, ce conţine toate punctele de coordonate $\mathbf{y}_m$, pentru care se consideră ipoteza H_1:

$$\int_{S_1} f(\mathbf{y}_m \mid H_1) d\mathbf{y} \geq B \cdot \int_{S_1} f(\mathbf{y}_m \mid H_0) d\mathbf{y} \tag{387}$$

Se cunosc următoarele mărimi, definite anterior: probabilitatea *de detecţie* P_d:

$$P_d = \int_{S_1} f(\mathbf{y}_m \mid H_1) d\mathbf{y} = 1 - \int_{S_0} f(\mathbf{y}_m \mid H_1) d\mathbf{y} = 1 - P_m \tag{388}$$

și probabilitatea *alarmei false* P_f:

$$P_f = \int_{S_1} f(\mathbf{y}_m \mid H_0) d\mathbf{y} \tag{389}$$

de unde rezultă

$$B \le \frac{P_d}{P_f} = \frac{1 - P_m}{P_f} \tag{390}$$

În cazul ipotezei H_0 avem relaţia:

$$L(\mathbf{y}_m) = \frac{f(\mathbf{y}_m \mid H_1)}{f(\mathbf{y}_m \mid H_0)} \le A \tag{391}$$

sau

$$f(\mathbf{y}_m \mid H_1) \le A \cdot f(\mathbf{y}_m \mid H_0) \tag{392}$$

Se integrează ultima relaţie pe întreg spaţiul S_0:

$$\int_{S_0} f(\mathbf{y}_m \mid H_1) d\mathbf{y} \le A \cdot \int_{S_0} f(\mathbf{y}_m \mid H_0) d\mathbf{y} \tag{393}$$

Integrala din stânga este probabilitatea unei decizii eronate, în sensul că se consideră adevărată ipoteza H_0, când s-a emis simbolul a_1. Se numește probabilitate de pierdere, P_m. Integrala din membrul drept se poate scrie sub forma:

$$\int_{S_0} f(\mathbf{y}_m \mid H_0) d\mathbf{y} = 1 - \int_{S_1} f(\mathbf{y}_m \mid H_0) d\mathbf{y} = 1 - P_f \tag{394}$$

Rezultă din ultimele două relaţii valoarea pentru pragul inferior:

$$A \geq \frac{Pm}{1-Pf} \tag{395}$$

Pentru începerea detecției, respectiv calculul pragurilor *A* si *B*, se impun valorile dorite ale probabilităților specifice detecției [32]: P_f și P_m (sau P_d).

4.11.2. Detecția secvențială prin observare discretă și zgomot alb gaussian

Fie o sursă discretă de informație. La furnizarea simbolului a_1, emițătorul furnizează $s_1(t) = a$, un impuls de amplitudine cunoscută. La furnizarea simbolul a_0 se emite un impuls rectangular de amplitudine $s_0(t) = 0$. Zgomotul de pe canal se consideră alb, repartizat normal, cu medie nulă și dispersie σ^2, cu expresia:

$$f(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}\right) \tag{396}$$

Ne propunem să stabilim regulile de decizie și expresiile de calcul pentru probabilitățile de alarmă falsă și de pierdere.

Un eșantion oarecare y_i va fi de forma:

$$y_i = n_i \tag{397}$$

în ipoteza H_0 și

$$y_i = a + n_i \tag{398}$$

în ipoteza H_1. Densitățile de probabilitate în cazul celor două ipoteze devin:

În ipoteza H_0:

$$f(y_i / a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}\right) \tag{399}$$

În ipoteza H_1 :

$$f(y_i / a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(-\frac{(y_i - a)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left(--\frac{(n_i - a)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{400}$$

[32] Aceste probabilități sunt calculate a priori, și sunt valori maxime. Valorile finale sunt mai mici, în majoritatea cazurilor.

După *m* eșantioane în care se poate lua decizia, raportul de plauzibilitate este:

$$\Lambda(\mathbf{y}_m)=\frac{f(\mathbf{y}_m/a_1)}{f(\mathbf{y}_m/a_0)}=\frac{\prod_{i=1}^{m}f(y_i/a_1)}{\prod_{i=1}^{m}f(y_i/a_0)}=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i-a\right)^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}y_i^2\right)}=$$

$$=\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i^2-2y_ia+a^2-y_i^2\right)\right)= \tag{401}$$

$$=\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(-2y_ia\right)+\sum_{i=1}^{m}a^2\right)\right)$$

Decizia D_1 se ia dacă $\Lambda(\mathbf{y}_m)\geq B$ sau, echivalent,:

$$ln\,\Lambda(\mathbf{y}_m)=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}\left(-2y_ia\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}a^2=$$

$$=\frac{a}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}y_i-\frac{ma^2}{2\sigma^2}\geq ln\,B \tag{402}$$

sau

$$z=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}y_i\geq\sigma^2\frac{ln\,B}{ma}+\frac{a}{2} \tag{403}$$

Decizia D_0 se ia dacă $\Lambda(\mathbf{y}_m)\leq A$, sau, echivalent,

$$ln\,\Lambda(\mathbf{y}_m)=\frac{a}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}y_i-\frac{ma^2}{2\sigma^2}\leq ln\,A \tag{404}$$

sau

$$z=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}y_i\leq\sigma^2\frac{ln\,A}{ma}+\frac{a}{2} \tag{405}$$

Cu notația:

$$z = (z/a_1) = (z/a_0) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i \tag{406}$$

se ia decizia D_1 pentru

$$(z/a_1) \geq \frac{\sigma^2}{ma} \ln B + \frac{a}{2} = B' \tag{407}$$

și se ia decizia D_0 dacă:

$$(z/a_0) \leq \frac{\sigma^2}{ma} \ln A + \frac{a}{2} = A' \tag{408}$$

Pentru calculul probabilităților, trebuie deduse densitățile de probabilitate ale variabilei de decizie, în cele două ipoteze. În cazul ipotezei H_1 variabila (z/a_1) este cu repartiție normală, cu următorii parametri:
- <u>media</u>:

$$\begin{aligned} E\{(z/a_1)\} &= E\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i\right\} = \frac{1}{m} E\left\{\sum_{i=1}^{m}(n_i + a)\right\} = \\ &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(E\{n_i\} + a\right) = \frac{1}{m} ma = a = \mu_{z1} \end{aligned} \tag{409}$$

- <u>dispersia</u>:

$$var\{(z/a_1)\} = \sigma_{z1}^2 = E\left\{\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i - a\right]^2\right\} = E\left\{\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i\right]^2\right\} - a^2 =$$

$$= \frac{1}{m^2} E\left\{\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{m} y_j\right\} - a^2 = \frac{1}{m^2} E\left\{\sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m}\sum_{j=1}^{m} y_i y_j\right\} - a^2 =$$

$$= \frac{1}{m^2}\left[\sum_{i=1}^{m} E\{y_i^2\} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{m} E\{y_i y_j\}\right] - a^2 =$$

$$= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\left[\sigma_n^2 + \mu_y^2\right] + \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1, \\ i\neq j}}^{m} R_{yy}(i,j) - a^2 = \tag{410}$$

$$= \frac{1}{m^2} m\left(\sigma_n^2 + \mu_y^2\right) + \frac{1}{m^2}\cdot m\cdot(m-1)\cdot\mu_y^2 - a^2 =$$

$$\frac{1}{m}\left(\sigma_n^2 + \mu_y^2\right) + \frac{m-1}{m}\cdot\mu_y^2 - a^2 = \frac{\sigma_n^2}{m} + \frac{\mu_y^2}{m} + \mu_y^2 - \frac{\mu_y^2}{m} - a^2 = \frac{\sigma_n^2}{m}$$

Rezultă

$$f(z/a_1) = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{z1}^2}} exp\left(-\frac{(z-\mu_{z1})^2}{2\sigma_{z1}^2}\right) \tag{411}$$

Pentru cazul ipotezei H_0, variabila z este tot cu distribuție normală cu parametrii:

$$\mu_{z0} = E\{(z/a_0)\} = E\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i\right\} = \frac{1}{m}E\left\{\sum_{i=1}^{m} n_i\right\} =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} E\{n_i\} = 0 \tag{412}$$

și dispersia

$$var\{(z/a_0)\} = \sigma_{z0}^2 = E\left\{\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i\right]^2\right\} = \frac{1}{m^2}E\left\{\left[\sum_{i=1}^{m} n_i\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{m^2}E\left\{\sum_{i=1}^{m} n_i^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{m} n_i n_j\right\} = \frac{1}{m^2}E\left\{\sum_{i=1}^{m} n_i^2\right\} + \tag{413}$$

$$+ \frac{1}{m^2}E\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{m} n_i n_j\right\} = \frac{1}{m^2} m\sigma_n^2 + \frac{1}{m^2} m(m-1)\cdot 0 = \frac{\sigma_n^2}{m}$$

Rezultă

$$f(z/a_0) = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{z0}^2}} exp\left(-\frac{(z-\mu_{z0})^2}{2\sigma_{z0}^2}\right) \tag{414}$$

Rezultatele de până acum permit trasarea grafică a densităților de probabilitate și a reprezentării geometrice a probabilităților de alarmă falsă și de pierdere, ca în fig.14.

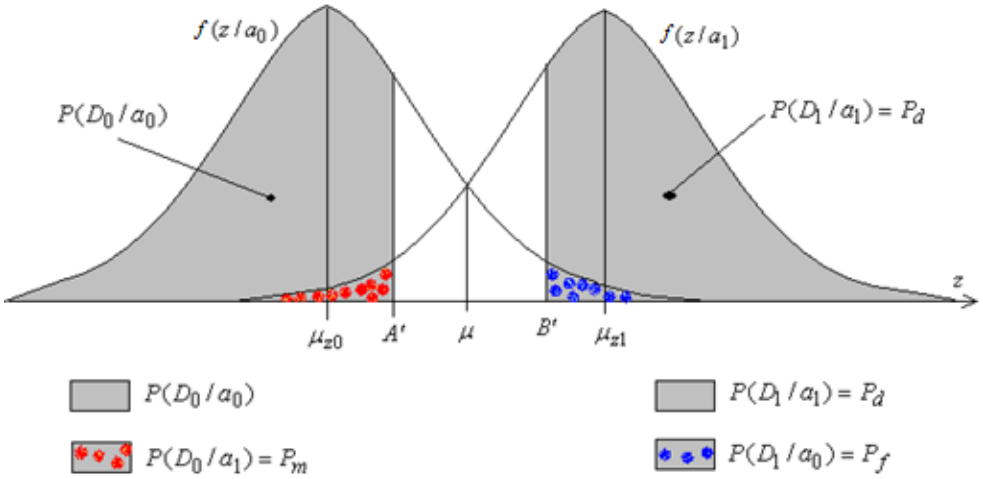


Fig. 14 : Reprezentarea geometrică a probabilităților deciziilor corecte și incorecte, în cazul detecției secvențiale a unui semnal cunoscut

Punctul de intersecție μ al densităților de probabilitate se poate afla din condiția

$$f(z/a_0) = f(z/a_1) \tag{415}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} &(z-\mu_{z0})^2 = (z-\mu_{z1})^2 \rightarrow -2z\mu_{z0} + \mu_{z0}^2 = -2z\mu_{z1} + \mu_{z1}^2 \\ &\rightarrow z = \frac{\mu_{z1}^2 - \mu_{z0}^2}{2(\mu_{z1} - \mu_{z0})} = \frac{\mu_{z1} + \mu_{z0}}{2} = \frac{\mu_{z1}}{2} = \frac{a^2}{2\sigma^2} = \mu \end{aligned} \tag{416}$$

Apoi, diferența dintre pragurile *A'* și *B'* este

$$B' - A' = \frac{\sigma^2}{ma} \ln B + \frac{a}{2} - \frac{\sigma^2}{ma} \ln A - \frac{a}{2} = \frac{\sigma^2}{ma} \ln \frac{B}{A} \tag{417}$$

de unde rezultă că, odată cu creșterea numărului de eșantioane, intervalul de incertitudine scade.

În fig.14 s-au haşurat, în diverse moduri, suprafețele proporționale cu probabilitățile de interes [33], adică:

- Probabilitatea deciziei corecte:

$$P(D_0 / a_0) = \int_{-\infty}^{A'} f(z / a_0)dz \tag{418}$$

- Probabilitatea detecției:

$$P_d = P(D_1 / a_1) = \int_{B'}^{+\infty} f(z / a_1)dz \tag{419}$$

- Probabilitatea de pierdere

$$P_m = P(D_0 / a_1) = \int_{-\infty}^{A'} f(z / a_1)dz \tag{420}$$

- Probabilitatea alarmei false

$$P_f = P(D_1 / a_0) = \int_{B'}^{+\infty} f(z / a_0)dz \tag{421}$$

Se poate observa grafic că

$$P(D_0 / a_0) + P(D_1 / a_0) < 1 \tag{422}$$

Dacă se notează cu $P(D / a_0)$, probabilitatea de a nu se putea lua o decizie la furnizarea mesajului a_0, se poate scrie relația:

$$P(D_0 / a_0) + P(D_1 / a_0) + P(D / a_0) = 1 \tag{423}$$

unde

$$P(D / a_0) = \int_{A'}^{B'} f(z / a_0)dz \tag{424}$$

În mod similar se poate scrie relația

$$P(D_0 / a_1) + P(D_1 / a_1) + P(D / a_1) = 1 \tag{425}$$

unde

[33] Aceste valori se modifică în cursul deciziei, întrucât se modifică pragul deciziei.

$$P(D/a_1) = \int_{A'}^{B'} f(z/a_1)dz \qquad (426)$$

este probabilitatea de a nu lua o decizie în situaţia emiterii simbolului a_1, probabilitate care scade odată cu scăderea intervalului de incertitudine (*A',B'*).

Probabilitatea medie de incertitudine (de a nu lua o decizie) este

$$P_\varepsilon = P(D/a_0)\cdot P(a_0) + P(D/a_1)\cdot P(a_1) \qquad (427)$$

În fig.15 se prezintă organigrama algoritmului de detecție secvențială, valabil pentru intervalul de timp T în care are loc emiterea unui simbol.

Observații: 1). În cadrul metodei detecției secvențiale, criteriul de decizie nu folosește probabilitățile de furnizare a simbolurilor la sursă, $P(a_0)$ şi $P(a_1)$.

2). Odată cu creșterea numărului de eșantioane, pragurile intermediare (variabile) *A'* și *B'* se apropie unul de altul. Din acest punct de vedere, se poate considera că detecția secvențială este o metodă adaptivă cu prag variabil.

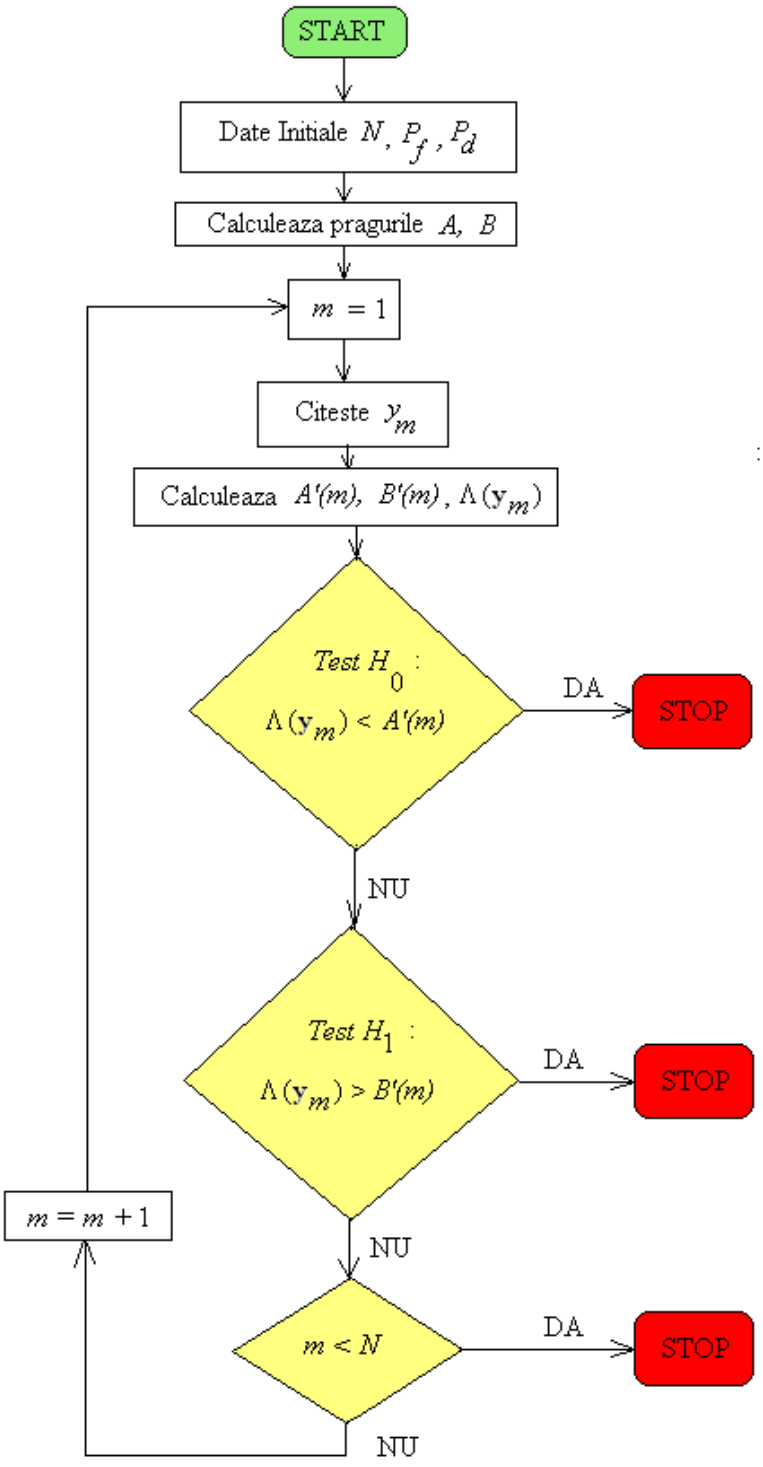


Fig. 15: Organigrama detecției secvențiale pe durata emiterii unui simbol

Exemplu: Fie un sistem de transmisiune cu detecție secvenţială, cu parametrii: $s_1(t) = 2$, perioada de eșantionare este T_s = 0.1 ms, perioada de observație este $T = 0.7$ ms. Se impun probabilitățile P_f = 0.1; P_m = 0.05. Dispersia zgomotului este $\sigma_n^2 = 0.25$. Se consideră vectorul observaţiilor $\mathbf{y} = [1.00,\ 1.05,\ 1.35,\ 1.55,\ 1.85,\ 1.95,\ 2.00]$.

Se cere:

1). Să se considere decizia corectă într-un timp minim posibil.

2). Să se calculeze probabilitățile de pierdere, P_m, probabilitatea alarmei false, P_f.

Soluție:

Pas 1: Se calculează pragurile A și B:

$$A \geq \frac{Pm}{1-Pf} = \frac{0.05}{1-0.1} = \frac{0.05}{0.9} = 0.055 \qquad \text{si} \qquad B \leq \frac{Pd}{Pf} = \frac{0.95}{0.1} = 9.5$$

Pas 2:

1: Citește primul eșantion: m=1, $\mathbf{y} = [1]$;

2: Calculează variabila de decizie: $z = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i = 1.0$

3: Calculează pragurile:

$$A' = \frac{\sigma^2}{m \cdot a} ln\, A + \frac{a}{2} = \frac{0.25}{1 \cdot 2} ln\, 0.055 + \frac{2}{2} = -0.125 * 2.90 + 1 = 0.63$$

$$B' = \frac{\sigma^2}{ma} ln\, B + \frac{a}{2} = \frac{0.25}{1 \cdot 2} ln\, 8 + \frac{2}{2} = 0.125 * 2.25 + 1 = 1.28$$

Test:

$z = 1 \in (A', B') = (0.63; 1.25)$? → NU se poate lua o decizie → m=m+1.

Pas 3:

1: Citește eșantion: $m = m+1 = 2$, $\mathbf{y}_2 = [1.00,\ \ 1.05]$;

2: Calculează variabila de decizie:

$$z = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i = \frac{1}{2}(1+1.05) = \frac{2.05}{2} = 1.025$$

3: Calculează pragurile:

$$A' = \frac{\sigma^2}{ma} ln\, A + \frac{a}{2} = \frac{0.25}{2 \cdot 2} ln\, 0.055 + \frac{2}{2} = 0.0625 * (-2.90) + 1 = 0.81$$

$$B' = \frac{\sigma^2}{ma} ln\, B + \frac{a}{2} = \frac{0.25}{2 \cdot 2} ln\, 8 + \frac{2}{2} = 0.0625 * 2.25 + 1 = 1.14$$

4: Test:

$z = 1.025 \in (A', B') = (0.81;\ \ 1.12)$? → NU se poate lua o decizie → $m=m+1$.

Pas 4:

3). $m=m+1 = 3$, $\mathbf{y}_3 = [1.00,\ \ 1.05,\ \ 1.35]$

$$z = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i = \frac{1}{3}(1 + 1.05 + 1.35) = 1.13$$

Calculează pragurile:

$$A' = \frac{\sigma^2}{ma} \ln A + \frac{a}{2} = \frac{0.25}{3 \cdot 2} \ln 0.055 + \frac{2}{2} = 0.0416 * (-2.9) + 1 = 0.87$$

$$B' = \frac{\sigma^2}{ma} \ln B + \frac{a}{2} = \frac{0.25}{3 \cdot 2} \ln 8 + \frac{2}{2} = 0.0416 * 2.07 + 1 = 1.09$$

Test:

$z = 1.13 \notin (A', B') = (0.87;\ \ 1.09)$, $z > B'$ → H_1 adevarat → a_1

2). Pentru calculul probabilităților trebuie determinate densitățile de probabilitate. Se cunosc parametrii

H_0: $\boxed{\mu_{z0} = 0}$ și $\boxed{\sigma_z^2 = \frac{\sigma_n^2}{m} = \frac{0.25}{3} = 0.083 = 0.288^2}$

H_1: $\boxed{\mu_{z1} = 2}$ și $\boxed{\sigma_z^2 = 0.083 = 0.288^2}$

Densitățile de probabilitate sunt:

$$f(z / a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} exp\left(- \frac{(z - \mu_{z0})^2}{2\sigma_z^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.083}} exp\left(- \frac{z^2}{2 \cdot 0.083} \right)$$

$$f(z/a_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}}exp\left(-\frac{(z-\mu_{z1})^2}{2\sigma_z^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 0.083}}exp\left(-\frac{(z-2)^2}{2\cdot 0.083}\right)$$

Probabilitățile sunt:

2.1). Probabilitatea alarmei false

$$P_f=P(D_1/a_0)=\int_{B'}^{+\infty}f(z/a_0)dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 0.083}}\int_{1.09}^{+\infty}exp\left(-\frac{(z)^2}{2\cdot 0.083}\right)dz$$

Cu schimbarea de variabilă:

$\frac{z}{\sqrt{2}\cdot\sigma}=t\rightarrow dz=\sqrt{2}\cdot\sigma\cdot dt; t_1=\frac{1.09}{\sqrt{2}\cdot 0.288}=2.67$. Rezultă

$$P_f=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 0.083}}\int_{2.67}^{+\infty}exp(-t^2)\sqrt{2}\cdot\sigma\cdot dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{2.67}^{+\infty}exp(-t^2)dt=$$

$$=\frac{1}{2}erfc(2.67)=7.97\cdot 10^{-5}$$

2.2). Probabilitatea de pierdere:

$$P_m=P(D_0/a_1)=\int_{-\infty}^{A'}f(z/a_1)dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 0.083}}\int_{-\infty}^{0.87}exp\left(-\frac{(z-2)^2}{2\cdot 0.083}\right)dz$$

Cu schimbarea de variabilă:

$\frac{z-2}{\sqrt{2}\cdot\sigma}=t\rightarrow dz=\sqrt{2}\cdot\sigma\cdot dt; t_1=\frac{0.87-2}{\sqrt{2}\cdot 0.083}=-9.57$. Rezultă

$$P_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 0.083}}\int_{-\infty}^{-9.57}exp(-t^2)\sqrt{2}\cdot\sigma\cdot dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-9.57}exp(-t^2)dt=$$

$$=\frac{1}{2}erfc(9.57)=4.92\cdot 10^{-42}$$

2.3). Probabilitatea de detecție:

$$P_d = P(D_1 / a_1) = \int_{B'}^{\infty} f(z / a_1)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.083}} \int_{1.09}^{\infty} exp\left(-\frac{(z-2)^2}{2 \cdot 0.083}\right)dz$$

Schimbarea de variabilă:

$\frac{z-2}{\sqrt{2} \cdot \sigma} = t \rightarrow dz = \sqrt{2} \cdot \sigma \cdot dt; t_1 = \frac{1.09-2}{\sqrt{2} \cdot 0.083} = -7.8$. Rezultă

$$P_d = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0.083}} \int_{-7.8}^{\infty} exp(-t^2)\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-7.8}^{\infty} exp(-t^2)dt =$$

$$= \frac{1}{2}[0.5 + erf(7.8)] = 1$$

Această valoare era de așteptat, întrucât $P_d = 1 - P_m = 1 - 0 = 1$

Exercițiu propus: Un sistem de comunicație binar folosește semnalele $s_0(t) = 0V$, $s_1(t) = 5V$ pentru transmiterea simbolurilor a_0 și a_1. Zgomotul de pe canal este gaussian cu medie zero și varianța $\sigma^2 = 1/5$. Numărul maxim de eșantioane din fereastra de observație este $N = 5$. Se impun probabilitățile $P_m = 0.1$ şi $P_f = 0.2$.

a). Să se scrie regula de decizie după plauzibilitate maximă și timp minim de decizie.

b). Să se decidă simbolul transmis dacă vectorul recepționat este: $y = [+0.15; +1.25; +2.13; +0.51; -0.83; +4.15; +4.75; +4.95; +5.12 + 5.00]$.

c). Să se calculeze probabilitățile de eroare $P(D_1 / a_0)$, $P(D_0 / a_1)$.

4.12. Detecția cu receptor filtru adaptat la semnalul emis

4.12.1. Filtru adaptat la forma semnalului. Descrierea în domeniul timp

În structura receptorului dintr-un sistem cu detecţia semnalelor este necesar să se calculeze o integrală de forma:

$$\int_0^T r(t) \cdot s(t)dt \qquad (428)$$

unde *r(t)* este semnalul recepţionat şi *s(t)* este semnalul emis. Varianta folosită în evaluarea integralei utilizează un multiplicator urmat de un integrator. Se pune problema dacă aceeaşi operaţie (calculul integralei) nu s-ar putea realiza cu un filtru liniar la intrarea căruia să se aplice semnalul recepţionat *r(t),* iar la ieşire să rezulte un semnal proporţional cu semnalul transmis.

Fie *h(t)* funcţia pondere a unui astfel de filtru. Răspunsul filtrului la semnalul *r(t),* presupus nul pentru $t<0$, este dat de integrala de convoluţie:

$$y(t) = h(t) * r(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau) \cdot r(\tau) \cdot d\tau \tag{429}$$

Dacă timpul de observare este *T* atunci:

$$y(T) = \int_0^{T} h(T-\tau) \cdot r(\tau) \cdot d\tau \tag{430}$$

Pentru ca răspunsul filtrului, dat de relaţia (411), să fie proporţional cu valoarea integralei (409), se impune condiţia:

$$y(T) = \int_0^{T} h(T-\tau) \cdot r(\tau) \cdot d\tau = C \cdot \int_0^{T} r(\tau) \cdot s(\tau) \cdot d\tau \tag{431}$$

unde *C* este o constantă de proporţionalitate. Rezultă condiţia:

$$h(T-\tau) = C \cdot s(\tau) \tag{432}$$

la care se adaugă condiţia de realizabilitate fizică:

$$h(t) = 0, \qquad t < 0 \tag{433}$$

Făcând schimbarea de variabilă $T-\tau=t$, rezultă $\tau=T-t$ şi relaţiile:

$$h(t) = C \cdot s(T-t) \tag{434}$$

$$h(t) = 0, \qquad t < 0 \tag{435}$$

Ultimele două ecuaţii arată că funcţia pondere a filtrului căutat este proporţională cu semnalul determinist *s(t),* motiv pentru care filtrul se

numeşte *filtru adaptat la semnalul s(t).* În fig.16.a este reprezentat un semnal oarecare *s(t)* de durata *T*. În fig.16.b s-a reprezentat semnalul *s(-t);* în fig.16.c s-a reprezentat semnalul *s(T-t), T<D;* în fig.16.d s-a reprezentat semnalul *s(T-t)=s(T-t).*

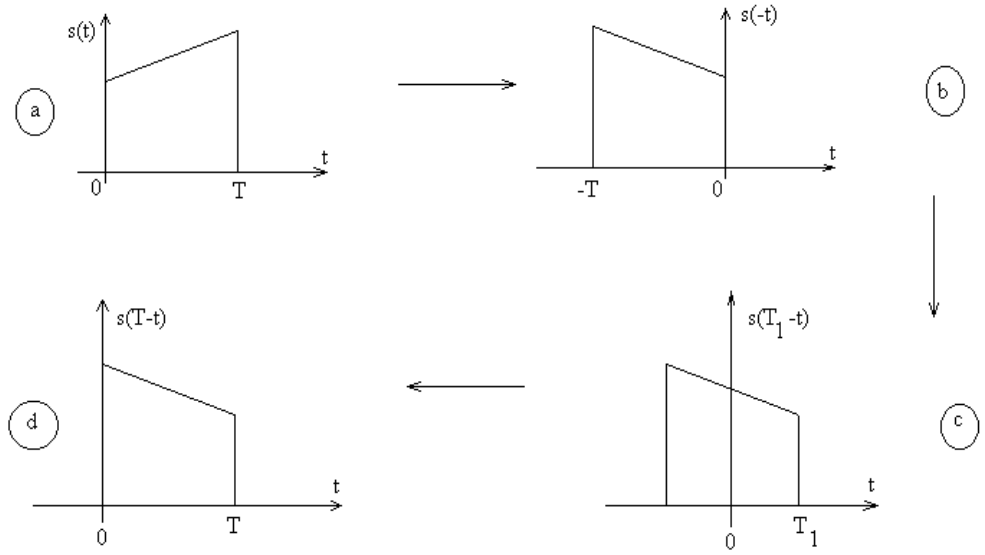


Fig. 16: Semnalele de intrare/ieşire ale filtrului adaptat (FA)

Pentru ca filtrul adaptat să fie realizabil trebuie ca $h(t)=C\cdot s(T-t)=0$ pentru $t<0$, deci trebuie ca $T\geq D$, unde *D* este durata semnalului şi *T* este timpul de integrare. Răspunsul filtrului la un semnal oarecare *x(t)* este:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=C\int_{-\infty}^{\infty}s(T-t+\tau)x(\tau)d\tau=C\,R_{xs}(t-T) \quad (436)$$

deci este funcţia de intercorelaţie între semnalul aplicat la intrare şi semnalul la care filtrul este adaptat.

4.12.2. Filtru adaptat la forma semnalului. Descrierea în domeniul frecvență

Funcţia de transfer *H(f)* a filtrului adaptat se determină din transformata Fourier a funcţiei pondere *h(t):*

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\cdot e^{-j2\pi ft}\cdot dt=C\cdot\int_{-\infty}^{\infty}s(T-t)\cdot e^{-j2\pi ft}\cdot dt \qquad (437)$$

Cu schimbarea de variabilă:

$$T-t=u \qquad (438)$$

obţinem:

$$\begin{aligned}H(f)&=C\cdot\int_{-\infty}^{\infty}s(u)\cdot e^{-j2\pi f(T-u)}\cdot du=\\&=C\cdot e^{-j2\pi fT}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}s(u)\cdot e^{j2\pi fu}\cdot du=\\&=C\cdot e^{-j2\pi fT}\cdot S(-f)=C\cdot e^{-j2\pi fT}\cdot S^{*}(f)\end{aligned} \qquad (439)$$

unde *S*(f)* este conjugata transformatei Fourier a semnalului *s(t).* Relaţia finală este:

$$H(f)=C\cdot e^{-j2\pi fT}\cdot S^{*}(f) \qquad (440)$$

Pentru *C*=1 se obţine funcţia de transfer:

$$H(f)=e^{-j2\pi fT}\cdot S^{*}(f)=e^{-j2\pi fT}\cdot S(-f) \qquad (441)$$

iar modulul acesteia:

$$|H(f)|=|S(-f)|=|S(f)| \qquad (442)$$

Modulul funcţiei de transfer este egal cu modulul densităţii spectrale de amplitudine a semnalului la care filtrul este adaptat. Considerând, de exemplu, un semnal dreptunghiular pentru *s(t)* şi reprezentând densitatea spectrală de amplitudine a semnalului *s(t),* |*S(f)*|, densitatea spectrală de putere a zgomotului $S_{nn}(f)$ şi modulul funcţiei de transfer a filtrului adaptat, se obţine reprezentare grafică fig.17.

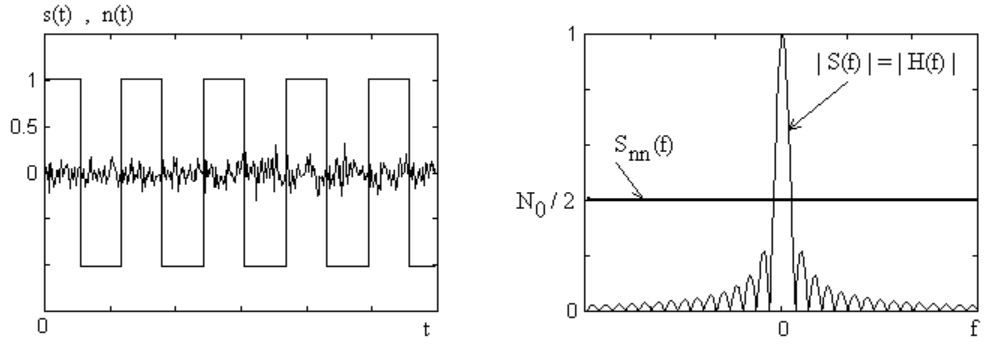


Figura 17: Interpretarea filtrului adaptat la un semnal în domeniul frecvenţă

Se observă că acolo unde raportul semnal-zgomot este mic şi amplificarea filtrului este mică, iar în zonele în care raportul semnal-zgomot este mare şi amplificarea este mare. La un filtru adaptat caracteristica amplitudine-frecvenţă se "adaptează" la forma spectrului semnalului la care filtrul este adaptat, pentru ca să reducă zgomotul la ieşirea filtrului, acolo unde semnalul util este mic.

4.12.3 - Detecţia unui semnal cunoscut cu filtru adaptat

Fie problema detecţiei unui semnal cunoscut, *s(t)*. Receptorul trebuie să detecteze prezenţa semnalului util în semnalul recepţionat. Răspunsul filtrului adaptat, *y(t),* la semnalul *s(t)* este

$$\begin{aligned} y(t) &= \Im^{-1}\{Y(f)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f)\cdot e^{j2\pi ft}\,df = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\cdot S(f)\cdot e^{j2\pi ft}\,df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(C\cdot e^{-j2\pi fT}\cdot S^{*}(f)\right)\cdot S(f)\cdot e^{j2\pi ft}\,df = \\ &= C\cdot \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^{2}\cdot e^{-j2\pi f(T-t)}\,df \end{aligned} \tag{443}$$

Valoarea maximă a răspunsului filtrului adaptat la semnalul util *s(t)* se obţine la momentul $t=T$:

$$max\, y(t) = y(t)\big|_{t=T} = C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \cdot df = C \cdot E \qquad (444)$$

unde *E* este energia semnalului. Ca urmare, în cazul folosirii unui filtru adaptat la detecţia prezenţei semnalului, este necesar un comutator *K*, care să se închidă la momentul *t=T*, moment în care se obţine valoarea maximă a raspunsului filtrului adaptat la semnalul util *s(t).*

Schema structurală a unui receptor cu filtru adaptat pentru detecţia prezentei semnalului este prezentată în fig.18. Receptorul conţine un filtru adaptat la semnalul ce trebuie detectat, un întrerupator *K* şi un comparator. Comutatorul *K* se închide în momentele în care răspunsul filtrului adaptat poate să fie maxim, deci la fiecare *T* secunde.

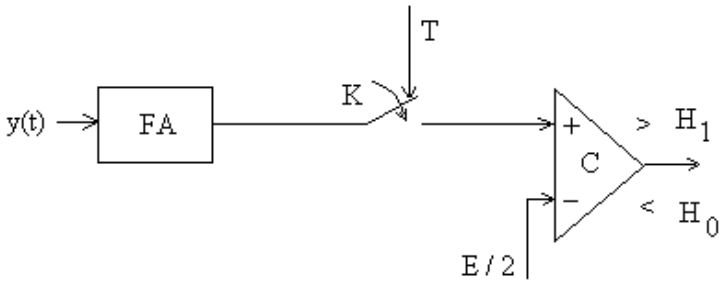


Fig. 18: Receptor cu filtru adaptat

4.12.4 - Raportul semnal-zgomot la ieşirea filtrului adaptat

În problemele de detecţie, un filtru adaptat are două avantaje în comparaţie cu alte receptoare:

- răspunsul filtrului adaptat la un semnal aplicat la intrare este proporţional cu semnalul la care filtrul este adaptat;
- asigură un răspuns semnal/zgomot maxim la ieşirea sa.

Să calculăm raportul semnal/zgomot la ieşirea filtrului adaptat. Fie *y(t)* semnalul de la ieşirea filtrului, *n(t)* zgomotul de pe canal şi *z(t)* zgomotul de la ieşirea filtrului când la intrare se aplică numai zgomotul de pe canal. Raportul semnal zgomot la ieşirea filtrului adaptat este

$$RSZ = \rho = \frac{P_y}{P_z} = \frac{E\{y^2(t)\}}{E\{z^2(t)\}} \qquad (445)$$

Răspunsul filtrului *z(t)* la zgomotul de pe canal *n(t)* este:

$$z(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(T-\tau)\cdot n(\tau)\cdot d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left[C\cdot s(T-t+\tau)\right]\cdot n(\tau)\cdot d\tau \quad (446),$$

iar puterea zgomotului *z(t)* este:

$$P_Z=E\left\{z^2(t)\right\}=E\left\{z(t)\cdot z(t)\right\}=$$

$$=C^2\cdot E\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}s(T-t+u)\cdot n(u)\cdot du\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty}s(T-t+v)\cdot n(v)\cdot dv\right]\right\}=(447)$$

$$=C^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(T-t+u)s(T-t+v)\cdot E\left\{n(u)n(u)\right\}dudv$$

Considerând zgomotul de pe canal alb cu densitate spectrală de putere constantă $S_{nn}(f)=N_0/2$, în reprezentare bilaterală, ultima relaţie devine:

$$P_Z=C^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(T-t+u)s(T-t+v)E\left\{n(u)n(v)\right\}dudv=$$

$$=C^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(T-t+u)s(T-t+v)\cdot R_{nn}(u-v)\cdot dudv= \quad (448)$$

$$=C^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(T-t+u)s(T-t+v)\cdot\delta(u-v)\cdot\frac{N_0}{2}\cdot dudv=$$

$$=C^2\cdot\frac{N_0}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}s(T-t+v)^2dv=C^2\cdot\frac{N_0}{2}\cdot E$$

Puterea maximă a semnalului de la ieşirea filtrului este:

$$P_y=E\left\{y^2(t)\right\}=(C\cdot E)^2 \quad (449)$$

Rezultă raportul semnal-zgomot maxim:

$$\rho = \frac{P_y}{P_z} = \frac{(C \cdot E)^2}{(C)^2 \cdot (N_0/2) \cdot E} = \frac{2 \cdot E}{N_0} \tag{450}$$

Ca observaţie, de reţinut că se poate demonstra că niciun alt filtru liniar nu determină un raport semnal/zgomot mai mare faţă de filtrul adaptat.

Concluzii

În acest capitol, s-au abordat câteva probleme specifice sistemelor de transmisiune cu detecţia semnalelor.

După numărul de observaţii care se efectuează asupra semnalului recepţionat, există două tipuri de sisteme de detecţie: cu observare *continuă* şi cu observare *discretă*.

Sistemele de transmisiune folosesc la recepție două funcții: detecția semnalului recepționat și – apoi – decizia simbolului transmis, pe baza prelucrării semnalului recepționat.

S-a definit problema detecției: receptorul nu știe ce simbol a fost emis; știe însă semnalul emis, semnalul recepționat și o parte din informațiile folosite la emisie.

Există patru categorii de probabilități importante, numite probabilități ale detecției: (1) probabilitatea de detecție; (2) probabilitatea unei pierderi; (3) probabilitatea alarmei false; (4) probabilitatea medie de eroare.

S-au prezentat criteriile (reguli) de decizie:

1. regula riscului mimin (Bayes) permite obţinerea celui mai mic cost mediu;
2. regula probabilităţii maxime a posteriori (MAP);
3. regula plauzibilităţii maxime a posteriori, ce permite minimizarea erorii medii de eroare.

În cazul observării discrete, perioada de eșantionare trebuie să fie un multiplu al perioadei de anulare a autocorelației zgomotului, astfel încât eșantioanele semnalului recepționat să poată fi considerate independente.

Pentru calcularea probabilităţilor specifice detecției, trebuie calculați parametrii distribuțiilor de probabilitate ai variabilei de decizie, în toate ipotezele de lucru.

Detectia secvențială este o metodă adaptivă, bazată pe prelucrarea unui număr variabil (cât mai mic) de eșantioane în vederea luării unei decizii. Detecția secvențială este utilă în aplicațiile în care timpul luării deciziei este un parametru foarte important.

Capitolul 5 - Estimarea parametrilor

Cuprins

Cadrul general al problemei estimării
Estimarea unui parametru determinist după metoda plauzibilității maxime
Estimarea unui parametru aleatoriu prin metoda minimizării funcției de cost
Estimatul unui parametru aleatoriu cu funcție de cost pătratică
Estimatul unui parametru aleatoriu cu funcție de cost uniformă
Estimatul unui parametru aleatoriu cu funcție de cost valoare absolută
Criterii de evaluare a calității estimatului
Calculul estimatului unui parametru aleatoriu invariant în timp
Estimarea parametrilor prin relații recursive
Estimarea mediei și dispersiei seriilor de timp
Estimarea dispersiei unui semnal prin măsurători la surse diferite
Concluzii

5.1. Cadrul general al problemei estimării

În sistemele de comunicații apare des problema evaluării parametrilor semnalului recepționat. Parametrii pot fi amplitudinea, frecvența sau faza unui semnal. Estimarea parametrilor poate fi considerată ca o generalizare a problemei detecției pentru o infinitate de ipoteze, corespunzătoare valorilor pe care le poate lua un parametru.

Se presupune că receptorul a luat o decizie, dar anumiți parametri ai semnalului recepționat (de exemplu, amplitudinea) nu sunt cunoscuți. Estimarea parametrilor necunoscuți se face pe baza observațiilor asupra semnalului recepționat.

Parametrii pot fi aleatorii sau determiniști.

Estimarea parametrilor aleatorii este cunoscută ca estimare Bayes și are la bază minimizarea unor funcții de cost.

Estimarea parametrilor determiniști este cunoscută sub numele de estimare de plauzibilitate maximă (MLE)[*].

Schema bloc a unui sistem de transmisiune cu estimarea unui parametru este prezentată în fig. 1. Sursa de informație este caracterizată fie printr-o variabilă aleatorie θ, fie printr-un parametru determinist *a*, necunoscute

[*] MLE = Maximum Likelihood Estimation.

receptorului. Variabila aleatorie continuă θ sau parametrul determinist a modulează un semnal purtător, sub forma unui parametru al acestuia (amplitudine, frecvență sau fază) astfel încât, la ieșirea emițătorului E, se generează semnalul $s(t,\theta)$ sau $s(t,a)$.

Pe canalul de transmisiune apar perturbațiile P, modelate printr-un zgomot aditiv, care degradează informația transmisă de sursa S. Semnalul recepționat, de forma

$$y(t)=s(t,\theta)+n(t) \tag{451}$$

sau

$$y(t)=s(t,a)+n(t) \tag{452}$$

este observat în intervalul $[0,T]$, în mod discret sau continuu. Pe baza acestor observații, receptorul trebuie astfel proiectat, încât să furnizeze la ieșire estimatul $\hat{\theta}$ sau $\hat{a}$.

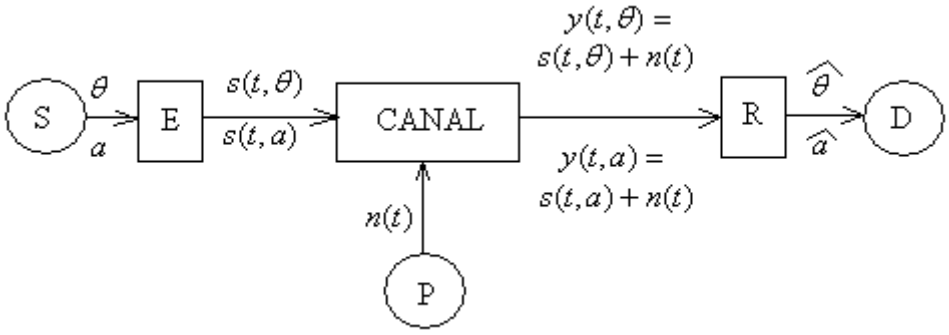


Fig. 1 : Schema bloc a unui sistem de transmisiune pentru estimarea unui parametru

Se definește eroarea de estimare cu relația

$$\varepsilon_\theta=\hat{\theta}-\theta \tag{453}$$

sau

$$\varepsilon_a=\hat{a}-a \tag{454}$$

Pentru a ține seama de importanța pe care o are această eroare pentru destinatar, se definesc funcții de cost, care sunt funcții de eroarea de estimare, așa cum se prezintă în fig. 2. Cele mai folosite funcții de cost sunt:

- funcția de cost pătratul erorii

$$C(\varepsilon) = \varepsilon^2 = \left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 \tag{455}$$

- funcția de cost uniformă

$$C(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & daca\ |\varepsilon| \le \dfrac{E}{2} \\ 1, & daca\ |\varepsilon| > \dfrac{E}{2} \end{cases} \tag{456}$$

- funcția de cost valoare absolută:

$$C(\varepsilon) = |\varepsilon| \tag{457}$$

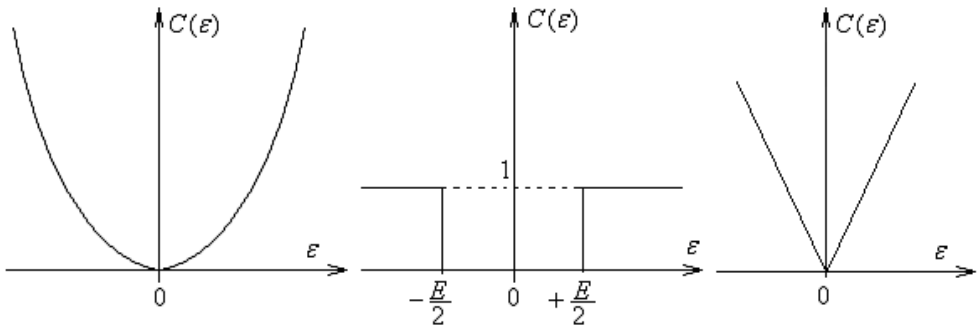


Fig. 2 : Reprezentarea grafică a funcțiilor de cost:
patrătul erorii, uniformă și liniară (valoare absolută)

În cazul funcției de cost uniforme, erorile mai mici decât $E/2$ nu au importanță, în timp ce erorile mai mari decât $E/2$ au aceeași importanță, indiferent de mărimea lor. Pragul E este impus de aplicație și are – în general – valori mici. Dacă y este semnalul recepționat și $f(y,\theta) = f(y \cap \theta)$ este densitatea de probabilitate a lui y și θ, atunci produsul $f(y,\theta)dyd\theta$ reprezintă o probabilitate iar costul mediu al deciziilor este o integrală dublă (mediere în raport cu y și θ).

$$\overline{C} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int C(\varepsilon) \cdot f(y,\theta)dyd\theta \tag{458}$$

Alegerea funcției de cost depinde de aplicație și este, de obicei, impusă.

5.2. Estimarea unui parametru determinist prin metoda plauzibilității maxime

Procedura clasică pentru estimarea parametrilor determiniști este estimarea după plauzibilitatea maximă.

Fie eșantioanele $\{ y_1, y_2,..., y_N \}$ ale variabilei aleatorii *Y*. Acestea se consideră variabile aleatorii independente și identic distribuite. Fie $f(\mathbf{y}/a)$ funcția densitate de probabilitate condiționată a variabilei aleatorii *Y*. Dacă valorile vectorului **y** se consideră fixate atunci $f(\mathbf{y}/a)$ depinde numai de parametrul *a* care trebuie estimat.

Funcția densitate de probabilitate denumită și functie de plauzibilitate este:

$$f(\mathbf{y}/a) = L(a) = \prod_{k=1}^{N} f(y_k/a) \tag{459}$$

Valoarea $\hat{a}$ care maximizează funcția de plauzibilitate se numește estimatul de plauzibilitate maximă a lui *a*:

$$L(\hat{a}) = f(y,\hat{a}) \geq f(y,a) = L(a) \tag{460}$$

Un astfel de estimat este justificat pe baza faptului că $\hat{a}$ este valoarea care maximizează densitatea de probabilitate compusă (*y* și a), dându-se un set de observații (măsurători).

Condiția necesară pentru obținerea estimatului de plauzibilitate maximă $\hat{a}$ este să se rezolve ecuația de plauzibilitate

$$\frac{\partial}{\partial a} f(\mathbf{y}/a) = \frac{\partial}{\partial a} L(a) = 0 \tag{461}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial a} ln\, f(\mathbf{y}/a) = 0 \rightarrow a = \hat{a}_{MP} \tag{462}$$

Exemplul 1: Un semnal aleatoriu *Y(t)* are o distribuție exponențială, de forma: $f(y,a) = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{y}{a}}, & y \geq 0, a > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$. Se cunosc 5 valori identic distribuite și independente: $y = [10; 11; 8; 12; 9]$. Să se calculeze: 1) funcția de plauzibilitate a lui a; 2). estimatul de plauzibilitate maximă a lui *a*.

Soluție: 1). Funcția de plauzibilitate este

$$L(a)=f(\mathbf{y},a)=\prod_{k=1}^{5}f(y_k,a)=\prod_{k=1}^{5}\frac{1}{\theta}\cdot e^{-\frac{y_k}{a}}=$$

$$=\frac{1}{a^5}\cdot e^{-\sum_{k=1}^{5}\frac{y_k}{a}}=\frac{1}{a^5}\cdot e^{-\frac{50}{a}},\quad a>0$$

2). Derivata de ordinul întâi a funcției de plauzibilitate este:

$$\frac{dL(a)}{da}=\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a^5}\cdot e^{-\frac{50}{a}}\right)=-5\frac{1}{a^6}\cdot e^{-\frac{50}{a}}+\frac{1}{a^5}\cdot\left(\frac{50}{a^2}\right)\cdot e^{-\frac{50}{a}}$$

Impunând condiția de anulare a derivatei, se obține estimatul de plauzibilitate maximă a lui *a*:

$$\frac{dL(a)}{da}=0\rightarrow\boxed{\hat{a}=10}$$

Exemplul 2: (*Estimarea mediei unui semnal aleatoriu, prin observare discretă*) Se consideră un semnal zgomot alb gaussian cu medie zero și dispersie σ_n^2 care afectează aditiv un parametru constant în timp, *a*, însă necunoscut, dupa relația

$$y(t)=a+n(t)$$

Densitatea de probabilitate a semnalului recepționat (afectat de zgomot) este condiționată de parametrul determinist necunoscut

$$f(\mathbf{y}/a)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\right]^N\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i-a)^2}$$

Estimatul maxim plauzibil se poate calcula cu relația

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\ln f(\mathbf{y}/a)\right]\Big|_{\hat{a}=a_{MP}}=0$$

Dar

$$ln\, f(\mathbf{y}/a) = -N\, ln\left(\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_n\right) - \frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - a)^2,$$

de unde rezultă derivata

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[ln\, f(\mathbf{y}/a)\right] = -\frac{1}{2\sigma_n^2}2\sum_{i=1}^{N}(y_i - a)(-1) = \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - a) = \frac{1}{\sigma_n^2}\left[\sum_{i=1}^{N} y_i - N\cdot a\right]$$

Condiția de anulare a derivatei impune

$$\hat{a}_{MP} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

Din relația finală rezultă ca estimatul maxim plauzibil este egal cu media aritmetică a eșantioanelor semnalului recepționat.

Exemplul 3: (*Estimarea dispersiei unui semnal aleatoriu*) Semnalul recepționat $y(t) = a + n(t)$ este eșantionat. Eșantioanele sunt independente și identic distribuite $y_k = a + n_k, k = 1,2,...,N$. Ne interesează dispersia zgomotului gaussian, σ^2.

Soluție: Se estimează mai întâi media prin estimatul de plauzibilitate maximă

$$\hat{\mu}_{ML} = \mu = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k$$

Funcția de plauzibilitate a dispersiei este:

$$L(\sigma^2) = f(\mathbf{y}/\sigma^2) = \prod_{k=1}^{N} f(y_k/\sigma^2) = \prod_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left(-\frac{(y_k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \cdot exp\left(-\sum_{k=1}^{N}\frac{(y_k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Aplicând logaritmul natural se obține expresia

$$ln L(\sigma^2) = -\frac{N}{2} ln(2\pi) - \frac{N}{2} ln(\sigma^2) - \sum_{k=1}^{N} \frac{(y_k - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

Derivata în raport cu σ este

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} ln L(\sigma^2) = 0 + \frac{\partial}{\partial \sigma}(-N ln \sigma) - \sum_{k=1}^{N} \frac{(y_k - \mu)^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) =$$

$$= -\frac{N}{\sigma} - \sum_{k=1}^{N} \frac{(y_k - \mu)^2}{2} \cdot \left(\frac{-2}{\sigma^3}\right) = \frac{N}{\sigma} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(y_k - \mu)^2}{\sigma^3}$$

Anulând derivata se obține

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (y_k - \mu)^2$$

5.3. Estimarea unui parametru aleatoriu prin minimizarea funcției de cost

5.3.1. Estimarea unui parametru aleatoriu în cazul funcției de cost pătratice

Strategia în luarea deciziei privind cea mai bună estimare constă în minimizarea valorii medii a costului. Ținând cont de relația de legătură dintre densitățile de probabilitate

$$f(y,\theta) = f(y) \cdot f(\theta / y) \tag{463}$$

costul mediu devine

$$\begin{aligned} \overline{C} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int C(\varepsilon) \cdot f(y,\theta) dy d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty}\int C(\varepsilon) \cdot f(y) \cdot f(\theta / y) dy d\theta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} C(\varepsilon) \cdot f(\theta / y) d\theta \right] dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[I(\hat{\theta}, y) \right] dy \end{aligned} \tag{464}$$

Întrucât funcțiile densitate de probabilitate sunt nenegative, costul minim se obține odată cu minimumul integralei $I(\hat{\theta}, y)$. Condiția necesară de extrem impune*

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} I(\hat{\theta}, y) = \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 f(\theta / y) d\theta =$$

$$= 2\hat{\theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta / y) d\theta}_{=1} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta / y) d\theta = 0 \tag{465}$$

Întrucât

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta / y) d\theta = 1 \tag{466}$$

ultima ecuație devine

$$\hat{\theta}_{MMS} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta \cdot f(\theta / y) d\theta \tag{467}$$

Densitatea de probabilitate $f(\theta / y)$ se numește densitate de probabilitate *a posteriori* (se calculează după recepționarea lui *y*). Estimatul (462) se numește estimatul bazat pe eroare pătratică medie minimă (MMS = **M**inimum **M**ean **S**quare), $\hat{\theta}_{MMS}$, ca rezultat al folosirii funcției de cost pătratice în minimizarea costului mediu.

5.3.2. Estimarea unui parametru aleatoriu în cazul funcției de cost uniforme

Pentru cazul funcției de cost uniforme, costul mediu devine

$$\overline{C} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-\infty}^{\hat{\theta} - E/2} f(\theta / y) d\theta + \int_{\hat{\theta} + E/2}^{\infty} f(\theta / y) d\theta \right] dy \tag{468}$$

sau

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[1 - \int_{\hat{\theta} - E/2}^{\hat{\theta} + E/2} f(\theta / y) d\theta \right] dy \tag{469}$$

* $\frac{d}{dx} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\, dy$

Costul minim se obține odată cu maximumul integralei

$$I(\hat{\theta},y)=\int_{\hat{\theta}-E/2}^{\hat{\theta}+E/2} f(\theta/y)d\theta \tag{470}$$

Maximumul integralei se obține pentru maximumul densității de probabilitate $f(\theta/y)$, numită densitate de probabilitate a posteriori. Valoarea lui θ care determină maximumul densității de probabilitate $f(\theta/y)$ se notează cu $\hat{\theta}_{MAP}$ și se numește estimatul maximum a posteriori. Condiția necesară de extrem este

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(\theta/y)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{MAP}} = 0 \tag{471}$$

Ultima ecuație se mai numește ecuația estimatului maxim a posteriori.

5.3.3. Estimarea unui parametru aleatoriu în cazul funcției de cost valoare absolută

Expresia riscului (costului mediu) este

$$\begin{aligned}\overline{C}_{abs} &= \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty}\left|\theta-\hat{\theta}\right|\cdot f(\theta,y)d\theta dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\theta-\hat{\theta}\right|\cdot f(\theta/y)\cdot d\theta\right]\cdot dy\end{aligned} \tag{472}$$

Riscul poate fi minimizat prin minimizarea integralei dintre parantezele drepte, care se scrie echivalent sub forma:

$$I=-\int_{-\infty}^{\hat{\theta}}(\theta-\hat{\theta})\cdot f(\theta/y)d\theta+\int_{\hat{\theta}}^{+\infty}(\theta-\hat{\theta})\cdot f(\theta/y)d\theta \tag{473}$$

Condiția de anulare a integralei impune anularea derivatei de ordinul întâi în raport cu $\hat{\theta}$:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} I=\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} f(\theta/y)d\theta-\int_{\hat{\theta}}^{+\infty} f(\theta/y)d\theta=0 \tag{474}$$

Rezultă

$$\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} f(\theta / y)d\theta = \int_{\hat{\theta}}^{+\infty} f(\theta / y)d\theta = 0 \rightarrow \hat{\theta} = \hat{\theta}_{MAV} \qquad (475)$$

Valoarea estimatului este chiar mediana funcției densitate de probabilitate $f(\theta / y)$. Acest estimat mai este cunoscut și sub numele de estimatul erorii medii absolute minime, $\hat{\theta}_{MAV}$, (MAV = **M**inimum **A**bsolute **V**alue). Dacă funcțiile densitate de probabilitate sunt simetrice, atunci estimatorii MMS, MAP, MAV sunt identici, așa cum se prezintă în fig. 3, partea stângă.

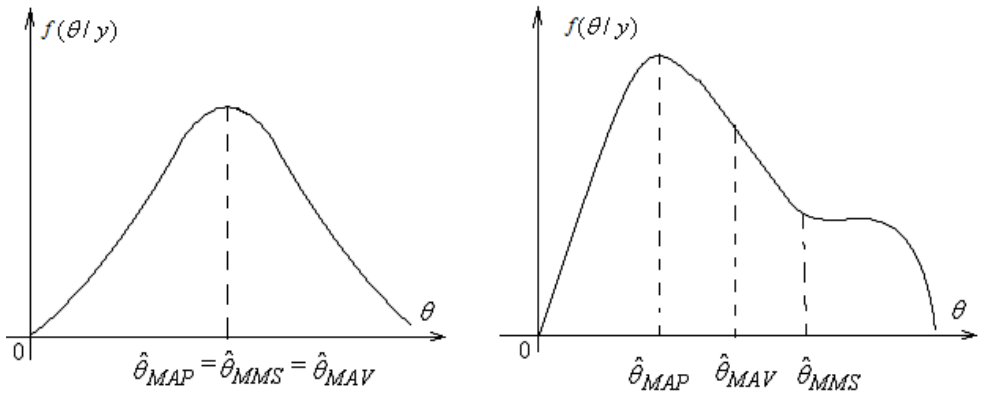


Fig. 3: Estimatorii MMS, MAP şi MAV

5.4. Criterii de evaluare a calității estimatului

Fie θ (sau a) valoarea reală a parametrului căutat. Estimatul $\hat{\theta}$ (sau $\hat{a}$) este o variabilă aleatorie, deci poate lua mai multe valori în funcție de numărul de valori prelucrate. Se pune problema stabilirii unor mărimi statistice privind calitatea unui estimat. Cele mai folosite criterii de evaluare a calității unui estimat sunt valoarea medie și dispersia erorii de estimare.

Pentru cazul în care parametrul este variabilă aleatorie continuă, θ, valoarea medie a estimatului se determină cu relația

$$E\{\hat{\theta}\} = \bar{\bar{\hat{\theta}}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\theta} \cdot f(y,\theta)dyd\theta \qquad (476)$$

unde bara dublă reprezintă o mediere dublă, atât în raport cu observația y (variabilă aleatorie), cât și în raport cu parametrul de estimat θ (variabilă aleatorie). Se pot evidenția următoarele cazuri:

(1) Dacă $\overline{\hat{\theta}} = \theta$ atunci media erorii de estimare este zero și estimatul se numește nedeplasat[34]

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\hat{\theta} - \theta} = \overline{\hat{\theta}} - \theta = 0 \tag{477}$$

(2) Dacă $\overline{\hat{\theta}} = \theta + c$, unde c este o constantă care nu depinde de parametrul ce urmează a fi estimat, se spune ca estimatul este deplasat și estimatul are o deplasare cunoscută.

(3) Dacă $\overline{\hat{\theta}} = \theta + b(\theta)$ se spune că estimatul este deplasat și are o deplasare necunoscută ce depinde de valoarea parametrului ce urmează a fi estimat.

Al doilea criteriu de apreciere a calității este dispersia erorii de estimare. Se calculează cu relațiile cunoscute:

$$var(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 = \overline{\varepsilon^2} - \left[\overline{\varepsilon}\right]^2 \tag{478}$$

egal cu diferența dintre valoarea pătratică medie și pătratul valorii medii.

Pentru cazul în care parametrul de estimat este determinist, avem relațiile:

- valoarea medie a estimatului:

$$E\{\hat{a}\} = \overline{\hat{a}} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a} \cdot f(y/a) \cdot dy \tag{4794}$$

- media erorii de estimare:

$$\overline{\varepsilon_a} = \overline{\hat{a} - a} = \overline{\hat{a}} - a \tag{480}$$

Pentru estimat nedeplasat avem relația:

$$\overline{\varepsilon_a} = \overline{\hat{a}} - a = 0 \tag{481}$$

Dacă $\overline{\hat{a}} = a + c$ atunci estimatul este deplasat cu deplasare cunoscută.

[34] *Unbiased, în limba engleză.*

Dacă $\bar{\hat{a}} = a + b(a)$ atunci estimatul este deplasat cu deplasare necunoscută.

Observație: Faptul că un estimator este nedeplasat (adică valoarea medie a estimatului este egală cu valoarea reală), nu garantează în mod necesar că estimatul este bun. Acest lucru este prezentat în fig. 4 pentru o funcție densitate de probabilitate cu două valori diferite ale dispersiei. Se observă că pot să apară erori mari în cazul unui estimat cu dispersie mare, chiar dacă estimatul este nedeplasat. Rezultă că, pe lângă media zero a erorii de estimare, trebuie să avem și o dispersie cât mai mică pentru orice estimator de calitate.

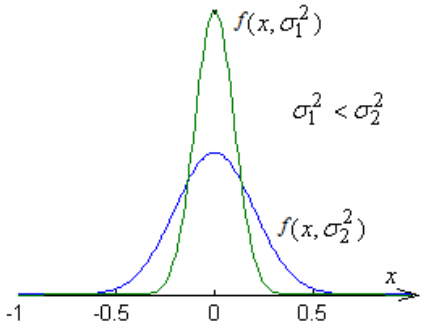


Fig. 4 : Funcții densitate de probabilitate cu dispersii diferite

Cel mai bun estimat este cel care nu este deplasat și are dispersie minimă a erorii de estimare. Obținerea unui astfel de estimat poate ridica probleme de calcul sau timp de calcul și atunci se preferă un estimat cu deplasare mică însă cu dispersie a erorii foarte mici.

Observație: Valoarea minimă a dispersiei erorii de estimare este egală cu valoarea minimă a covarianței estimatului:

$$cov\{\hat{\theta}\} = E\left\{\left(\hat{\theta} - \bar{\hat{\theta}}\right)^2\right\} = E\left\{(\varepsilon_\theta)^2\right\} \tag{482}$$

În afară de medie și dispersie se mai folosesc și două criterii calitative numite consistența și eficiența.

Un estimator $\hat{\theta}$ este un estimat consistent al parametrului θ, bazat pe N observații, dacă probabilitatea ca eroarea de estimare sa fie mai mare decât o limită impusă, ε, tinde la zero când numarul N de valori considerate tinde la infinit :

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\left|\theta-\hat{\theta}\right|>\varepsilon\right)=0,\forall\varepsilon \tag{483}$$

Aplicarea definiției pentru a verifica consistența unui estimator nu este o cale ușoară, de obicei. Se folosește teorema:

Definiţie (*estimator consistent*): Fie $\hat{\theta}$ un estimator al lui θ bazat pe *N* eșantioane. Dacă $\lim_{N\to\infty} E\left\{\hat{\theta}\right\}=\theta$ și $\lim_{N\to\infty} \text{var}\left(E\left\{\hat{\theta}\right\}\right)=0$ atunci $\hat{\theta}$ este un estimator consistent al lui θ.

Pentru o estimare consistentă trebuie ca performanțele estimării să se îmbunătățească pe măsură ce crește numărul de eșantioane disponibile.
Pentru orice estimator există o valoare minimă a erorii de estimare. Un estimator este eficient dacă este nedeplasat și dispersia erorii de estimare este egală cu valoarea minimă posibilă [35]:

$$\sigma^2_{\varepsilon_{\theta ef}}=\frac{1}{\left[\frac{\partial \ln f(y,\theta)}{\partial\theta}\right]^2}=-\frac{1}{\left[\frac{\partial^2 \ln f(y,\theta)}{\partial\theta^2}\right]} \tag{484}$$

unde bara dubla însemnă mediere dublă după ambele variabile aleatorii, *y* și θ.

Exerciţiu: Să se verifice dacă estimatorul $\hat{\mu}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k$ este un estimat nedeplasat al lui $\mu=E\{y\}$.

Soluție: Un estimat este nedeplasat dacă media lui este egală cu media semnalului, deci dacă $E\{\hat{\mu}\}=\mu$. Într-adevăr:

$$E\{\hat{\mu}\}=E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k\right\}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E\{y_k\}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mu=\frac{1}{N}\cdot N\cdot\mu=\mu$$

[35] Cramér-Rao

Exerciţii propuse: 1). Să se demonstreze că estimatorul $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - \overline{Y}\right)^2$ este deplasat. Nu se cunoaște media, deci trebuie estimată. *Indicație*: se calculează media estimatului:

$$E\left\{\hat{\sigma}^2\right\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - \overline{Y}\right)^2\right\} = ... = \sigma^2\,\frac{N-1}{N}$$

3) Să se demonstreze că estimatorul $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - \overline{Y}\right)^2$ este nedeplasat. Nu se cunoaște media, deci trebuie estimată. *Indicație*: se calculează media estimatului:

$$E\left\{\hat{\sigma}^2\right\} = E\left\{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - \overline{Y}\right)^2\right\} = ... = \sigma^2$$

5.5. Calculul estimatului unui parametru aleatoriu invariant în timp prin observare discretă

Se dorește calculul estimatului pe baza erorii pătratice medii minime a unui parametru de tip variabilă aleatorie continuă, invariantă în timp, cu distribuție gaussiană.

Semnalul recepționat este la ieșirea unui canal aditiv:

$$y(t) = \theta + n(t) \tag{485}$$

unde *n(t)* este zgomot alb, gaussian cu medie nulă și dispersie σ_n^2. Fie *T* durata observației. Prin observare discretă rezultă eșantioanele:

$$y(t_k) = \theta + n(t_k), \quad k = \overline{1,N} \tag{486}$$

sau

$$y_k = \theta + n_k, \quad k = \overline{1,N} \tag{487}$$

sau, în scriere vectorială,

$$\mathbf{y} = \theta + \mathbf{n} \tag{488}$$

Datorită zgomotului alb, eșantioanele sunt statistic independente, astfel încât se poate scrie relația

$$f(\mathbf{n}) = \prod_{k=1}^{N} f(n_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \right)^N \cdot exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{N} n_k^2 \right) \tag{489}$$

întrucât funcția densitate de probabilitate a unui eșantion de zgomot este

$$f(n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} exp\left(-\frac{n_k^2}{2\sigma_n^2} \right), \quad k = \overline{1,N} \tag{490}$$

Estimatul pe baza erorii medii pătratice minime este

$$\hat{\theta}_{MMS} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta \cdot f(\theta / y) d\theta \tag{491}$$

unde

$$f(\theta / \mathbf{y}) = \frac{f(\theta) \cdot f(\mathbf{y} / \theta)}{f(\mathbf{y})} \tag{492}$$

Funcția densitate de probabilitate a parametrului θ este

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta^2}} exp\left(-\frac{(\theta)^2}{2\sigma_\theta^2} \right) \tag{493}$$

Pentru vectorul **y** avem

$$f(\mathbf{y} / \theta) = \prod_{k=1}^{N} f(y_k / \theta) \tag{494}$$

În continuare trebuie calculate media și dispersia variabilei $(y_k / \theta) = y_k$. Media este

$$\mu_{y_k / \theta} = E\{y_k / \theta\} = E\{\theta + n_k\} = \theta + E\{n_k\} = \theta \tag{495},$$

iar dispersia

$$var\{y_k / \theta\} = E\left\{\left[y_k - \overline{y_k}\right]^2\right\} = E\left\{\left[\theta + n_k - \theta\right]^2\right\} = E\left\{\left[n_k\right]^2\right\} = \sigma_n^2 \quad (496)$$

Rezultă că funcția densitate de probabilitate a eșantionului y_k este:

$$f(y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} exp\left(-\frac{(y_k - \theta)^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad k = \overline{1,N} \quad (497)$$

și, în final, densitatea de probabilitate a vectorului **y** condiționată de parametrul θ:

$$f(\mathbf{y} / \theta) = \prod_{k=1}^{N} f(y_k / \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}\right)^N \cdot exp\left(-\frac{1}{2\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \theta)^2\right) \quad (498)$$

În final, după o serie de calcule, rezultă estimatul

$$\hat{\theta}_{MMS} == \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2 + \frac{\sigma_n^2}{N}} \cdot \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \quad (499)$$

Dacă numărul de eșantioane este suficient de mare, se realizeaza condiția:

$$\frac{\sigma_n^2}{N} << \sigma_\theta^2 \quad (500),$$

astfel încât se obține

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \quad (501),$$

adică estimatul se poate deduce din media aritmetică a eșantioanelor observate din semnalul recepționat.

Exemplul 1: Fie semnalul recepționat cu eșantioanele: $y_k = \theta + n_k$, $k = 1,2,..., N = 10$ unde θ și n_k sunt independente statistic, cu distribuție gaussiană cu medie zero și dispersie $\sigma^2 = 1$. Să se calculeze

estimatorul de eroare medie patratică minimă $\hat{\theta}_{MMS}$, pentru N=10 și pentru N=15 eșantioane. Care estimat este mai aproape de valoarea reală ? Se cunoaște vectorul recepționat

$$\mathbf{y} = [\ 0.1633 \quad 1.0758 \quad -0.2383 \quad 2.5332 \quad 0.2136 \quad 0.4639 \quad 1.4168 \quad 0.4093 \quad 0.2544 \quad -0.4823 \quad 0.6444 \quad -0.9862 \quad 1.0643 \quad 1.9736 \quad -0.3418]$$

Soluție: Estimatul erorii medii pătratice minime este

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = 0.5810 (N = 10), = 0.5443 (N = 15)$$

dacă N este mare, astfel încât să fie satisfăcută condiția $\sigma_n^2 / N << \sigma_\theta^2$. A doua valoare este mai aproape de valoarea reală.

5.6. Estimarea parametrilor prin relații recursive

5.6.1. Estimarea mediei și dispersiei seriilor de timp

Sunt dese cazurile în care circuitul de calcul al diverșilor parametri (medie, dispersie, valoare medie pătratică etc.) nu are memorie suficientă pentru a reține toate eșantionale semnalului prelucrat. Se pune problema folosirii unor relații de calcul (de estimare) a mărimilor medii statistice folosind un număr miminm de locații de memorie.

1. Estimarea mediei: Fie o serie de timp (valori) de forma $x_1, x_2, ..., x_n$. Media statistică este

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{502}$$

Dacă se consideră un punct nou din seria de timp în desfășurare, x_{n+1}, media se poate calcula pe baza celor (n+1) valori disponibile sau se poate corecta valoarea veche a mediei pe baza relației

$$\hat{\mu}_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}x_{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\hat{\mu}_n + \frac{1}{n}x_{n+1}\right) \tag{503}$$

Se poate scrie echivalent:

$$\hat{\mu}_{n+1} = \frac{n}{n+1}\hat{\mu}_n + \frac{1}{n+1}x_{n+1} = \frac{n+1}{n+1}\hat{\mu}_n + \frac{1}{n+1}\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right) = \hat{\mu}_n + K\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right) \tag{504}$$

unde $K = 1/(n+1)$, se poate numi factor de câștig. Relația finală este

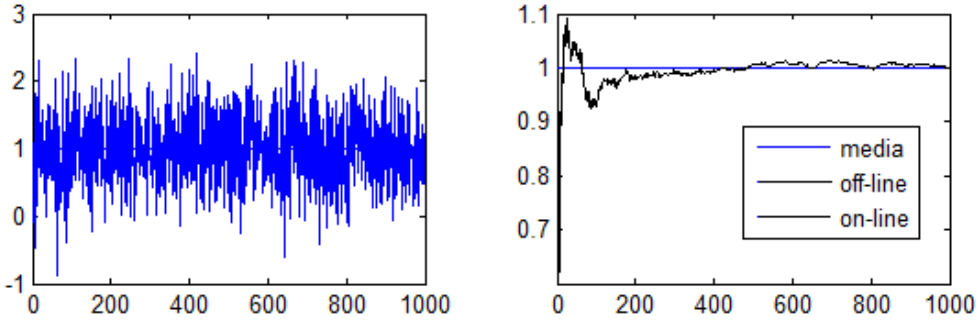
$$\hat{\mu}_{n+1} = \hat{\mu}_n + K\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right), \quad unde\, K = \frac{1}{n+1} \tag{505}$$

Valorea nouă a mediei $\hat{\mu}_{n+1}$ este o sumă ponderată a vechii valori a mediei și a noii valori măsurate x_{n+1}. Ponderile celor doi termeni sunt diferite întrucât avem mai multă încredere în $\hat{\mu}_n$ (calculată pe baza a *n* puncte (valori)) decât în valoarea x_{n+1}. Ultima ecuație poate fi interpretată ca o corecție a vechii valori cu o diferență, iar valorea corecției este afectată de factorul *K*.

Exemplu: Fie un semnal recepționat de forma $y(t) = a + n(t)$, unde a = 1 V este o constantă necunoscută și *n(t)* este zgomot gaussian alb cu medie zero și dispersie $\sigma_n^2 = 0.25$. Se cere să se estimeze parametrul determinist, *a*, prin două metode (off-line) (prelucrare pe mulțime) și on-line (prelucrare pe eșantion).

Soluție: Problema are o soluție imediată prin folosirea relațiilor de estimare $\hat{a} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k$ (pentru cazul off-line) și a relației recursive $\hat{\mu}_{n+1} = \hat{\mu}_n + K\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)$, unde $K = \frac{1}{n+1}$ (pentru cazul on-line). Soluțiile sunt prezentate în figura de mai jos. În partea stângă este reprezentat semnalul recepționat. În partea dreaptă sunt reprezentate estimările, în mod

off-line cât și on-line (eșantion după eșantion). De reținut, valorile identice ale celor doi estimatori.



2. Estimarea dispersiei. Se pot considera două cazuri, după cum se cunoaște sau nu media statistică. Mai întâi, se presupune cunoscută media statistică μ. Dându-se n valori din seria de timp, dispersia statistică este

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \tag{506}$$

Cu un punct (eșantion) nou măsurat, x_{n+1}, dispersia devine

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{n+1}^2 &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2+(x_{n+1}-\mu)^2\right] = \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2+\frac{1}{n}(x_{n+1}-\mu)^2\right] = \frac{n}{n+1}\left[\hat{\sigma}_n^2+\frac{1}{n}(x_{n+1}-\mu)^2\right] = \\
&= \frac{n}{n+1}\hat{\sigma}_n^2+\frac{1}{n+1}(x_{n+1}-\mu)^2 = \hat{\sigma}_n^2-\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n+1}+\frac{1}{n+1}(x_{n+1}-\mu)^2 = \\
&= \hat{\sigma}_n^2+\frac{1}{n+1}\left[(x_{n+1}-\mu)^2-\hat{\sigma}_n^2\right] = \hat{\sigma}_n^2+K\left[(x_{n+1}-\mu)^2-\hat{\sigma}_n^2\right]
\end{aligned} \tag{507}$$

Relația finală este

$$\hat{\sigma}_{n+1}^2 = \hat{\sigma}_n^2+K\left[(x_{n+1}-\mu)^2-\hat{\sigma}_n^2\right], \quad \text{unde } K=\frac{1}{n+1} \tag{508}$$

Pentru cazul în care media nu se cunoaște, ea trebuie estimată în același timp cu dispersia. Se folosesc relațiile

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right)^2 \tag{509}$$

La apariția unui punct nou avem

$$\hat{\sigma}_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left(x_i - \hat{\mu}_{n+1}\right)^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left(x_i - \hat{\mu}_n - K\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n+1}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right)^2 - 2K\sum_{i=1}^{n+1}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right)\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right) + K^2\sum_{i=1}^{n+1}\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right)^2 - 2K\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right)\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right) + K^2\sum_{i=1}^{n}\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2\right] + \tag{510}$$

$$\frac{1}{n+1}\left[\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2 - 2K\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2 + K^2\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n+1}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right)^2 - 2K\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right)\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right) + \\ nK^2\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2 + \left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2\left(1 - K^2\right)\end{bmatrix}$$

Termenul doi este zero întrucât

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right) = \sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}\hat{\mu}_n = n\cdot\hat{\mu}_n - n\cdot\hat{\mu}_n = 0 \tag{511}$$

Apoi,

$$nK^2 + (1-K)^2 = nK^2 + 1 - 2K + K^2 =$$
$$= (n+1)\frac{1}{(n+1)^2} + 1 - \frac{2}{n+1} = \frac{1+n+1-2}{n+1} = nK \tag{512}$$

Rezultă

$$\hat{\sigma}_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right)^2 + nK\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2\right] =$$
$$\frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{\mu}_n\right)^2 + K\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2\right] = \tag{513}$$
$$= (1-K)\left(\hat{\sigma}_n^2 + K\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2\right)$$

cu expresia finală

$$\hat{\sigma}_{n+1}^2 = (1-K)\left(\hat{\sigma}_n^2 + K\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2\right), \quad \text{unde } K = \frac{1}{n+1} \tag{514}$$

Se observă existența a doi termeni de corecție: unul pentru dispersia de la momentul *n* și unul pentru termenul doi, care conține măsurătoarea de la momentul (*n*+1).

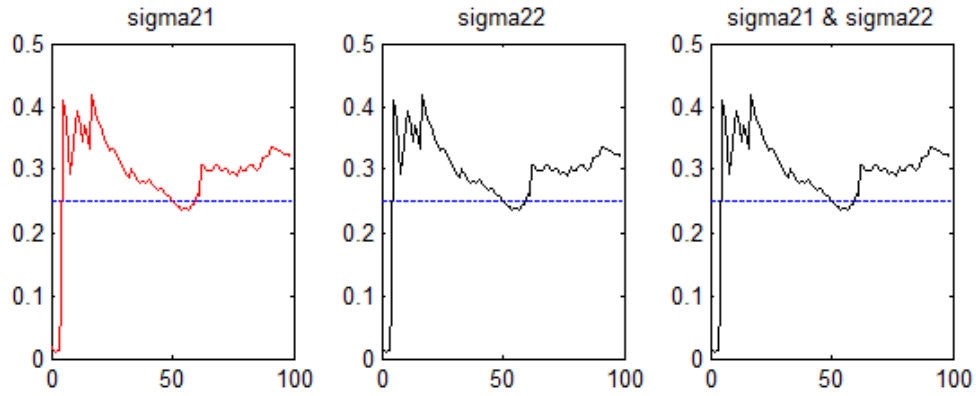
În concluzie, dându-se un nou punct de măsurare x_{n+1} procedura de calcul a dispersiei, pentru cazul (ii) este:

1). calculează câştigul $K = 1/(n+1)$;
2). calculează media $\mu_{n+1} = \mu_n + K\left(x_{n+1} - \mu\right)$;
3). calculează prima corecție: $\hat{\sigma}_{n+1}^2 = \hat{\sigma}_n^2 + K\left(x_{n+1} - \hat{\mu}_n\right)^2$;
4). calculează a doua corecție: $\hat{\sigma}_{n+1}^2 = (1-K)\cdot\hat{\sigma}_{n+1}^2$.

Acest mod de calcul se folosește în calculatoare (microcontrolere/microprocesoare) pentru actualizarea mediei și dispersiei dintr-o serie de numere introduse secvențial, fără să fie necesară memorarea numerelor.

Exemplu: Fie un semnal recepționat de forma $y(t) = a + n(t)$, unde a = 0,25 V este o constantă necunoscută și $n(t)$ este zgomot gaussian alb cu medie zero și dispersie $\sigma_n^2 = 0.25$. Se cere să se estimeze dispersia semnalului recepționat prin două metode (off-line) (prelucrare pe mulțime) și on-line (prelucrare pe eșantion)). Se va considera cazul mediei μ cunoscute.

Soluție: Soluțiile constau în folosirea relației de estimare $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu\right)^2$ (pentru cazul off-line) și a uneia din cele două relații iterative, după cum se cunoaște sau nu se cunoaște media statistică. Rezultatele obținute prin simulare numerică sunt prezentate în figura de mai jos.



5.6.2. Estimarea dispersiei unui semnal prin măsurători de la mai multe surse

Presupunem existența a două instrumente de măsură pentru furnizarea cantității de interes, *x*. Fie x_1 citit de la primul instrument și x_2 citit de la al doilea instrument. Primul instrument are o eroare cu distribuție gaussiană și deviație standard σ_1. Eroarea de la al doilea instrument are aceeasi distributie gaussiană cu medie zero și abatere standard σ_2. Se pune problema combinării celor două citiri într-o singura valoare estimată.
Dacă instrumentele ar avea aceeași abatere ($\sigma_1 = \sigma_2$), atunci s-ar considera media celor două numere. Dacă primul instrument este superior celui de al doilea ($\sigma_1 << \sigma_2$), se va păstra prima citire pentru valoarea estimată. În orice altă situație trebuie calculată o sumă ponderată a citirilor pentru a genera un estimat a lui *x*, care se va nota cu $\hat{x}$.
Problema este de a selecta/calcula cea mai bună medie ponderată. O posibilitate este de a pondera fiecare citire cu o valoare inversă a preciziei, adică

$$\hat{x} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2}{w_1 + w_2} = \frac{\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\sigma_2^2 \cdot x_1 + \sigma_1^2 \cdot x_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad (515)$$

Se poate demonstra că valoarea estimată (58) are o dispersie

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{516}$$

Se face observația că estimatul de mai sus poate fi pus sub forma

$$\hat{x} = x_1 + K\left(x_2 - x_1\right) = x_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\left(x_2 - x_1\right) \tag{517}$$

adică o ecuație de actualizare de aceeași forma generală ca în cazul din secțiunea anterioară.

Concluzii

Estimarea unui parametru aleatoriu se face prin minimizarea unei funcții de cost, care poate fi pătratică, uniformă (constantă) sau liniară. Estimatorii obținuți se numesc de medie patratică minimă (MMS), maxim a posteriori (MAP) și, respectiv, de medie absolută minimă (MAV).

Estimarea unui parametru determinist se face prin criteriul plauzibilității maxime, iar estimatul se numește estimatul plauzibilității maxime.

Cel mai bun estimat este cel care nu este deplasat și are dispersie minimă a erorii de estimare. Obținerea unui astfel de estimat poate ridica probleme de memorie sau timp de calcul și atunci se preferă un estimat cu deplasare și dispersie a erorii foarte mici.

Un estimat este consistent dacă media și dispersia erorii de estimare tind la zero pe măsură ce numărul de valori prelucrate tinde la infinit.

Un estimat este eficient dacă este nedeplasat și dispersia erorii de estimare este minim posibilă.

BIBLIOGRAFIE ȘI REFERINȚE

Aiordăchioaie, 2004	Aiordăchioaie Dorel, *Bazele sistemelor de transmisiune a informației*, Editura Academica, 2004.
Barkat, 2005	Mourad Barkat, *Signal Detection and Estimation*, 2nd Edition, Artec House, 2005.
Cover si Thomas, 2006	Thomas M. Vover and Joy A. Thomas, *Elements of Information theory*, 2nd edition, Wiley Interscience, 2006.
Davenport and Root, 1987	Wilbur B. Davenport and William L. Root, An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, IEEE Press, 1987.
Desurvire, 2006	Emmanuel Desurvire, (Editor), *Probability and random proceses*, 2006 by John Wiley & Sons
Kay, 1993	Steven M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*, Prentice Hall, 1993.
Kay, 1998	Kay, S.M, *Fundamentals of Statistical Signal Processing. Vol. II. Detection Theory*, Prentice-Hall, 1998.
Kay, 2006	Steven M. Kay, *Intuitive Probability and Random Processes Using Matlab*, Springer, 2006.
Klir, 2006	George J. Klir, *Uncertainty and Information. Foundations of Generalized Information Theory*, Wiley – Interscience, 2006.
Kullback, 1968	Solomon Kullback, *Information Theory ans Statistics*, Dover Publications, 1968.
Gardner, 1989	W.A. Gardner, *Introduction to Random Processes*, McGraw-Hill Book Company, NY, 1989.
Gallager, 1968	Gallager, R.G, *Information Theory and Reliable Communication*, John Wiley & Sons, 1968.
Gray, 1990	Robert M. Gray, Entropy and Information Theory, Springer, 1990.
Gray and Davisson, 1999	Robert M. Gray and Lee D. Davisson, An Introduction to Statistical Signal Processing, Cambridge University Press, 1999.
Girod s.a., 2001	Bernd Girod, Rudolf Rabenstein, Alexander Stenger, Signals ans Systems, John Wiley & Sons, 2001.
Gikhman and Skorokhod, 1969	I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod, Introduction to the Theory of Random Processes, Saunders Company, 1969.
Grintead and Snell, 2000	Charles M. Grintead and J. Laurie Snell, Introduction to Probability, 2000.
Hayes, 1996	Monson H. Hayes, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Wiley, 1996.
Lessard, 2006	Charles S. Lessard, *Signal Processing Of Random Physiological Signals*, 2006 by Morgan & Claypool
Levy, 2008	Bernard C. Levy, Principles of Signal Detection and Parameter Estimation, Springer, 2008.
Maybeck, 1979	Peter Maybeck, *Stochastic Models, Estimationd and Control*, Academic Press. Inc, 1979.
Middleton, 1994	David Middleton, *An introduction to Statistical Communication Theory*, IEEE Press, 1994.
Mihoc și Micu, 1980	Ghe. Mihoc şi N. Micu, *Teoria probabilităţilor şi statistică matematică*, E.D.P., Bucureşti, 1980.

Miller and Childers, 2004	Scott L. Miller and Donald G. Childers, Probability and random Processes with Applications to Signal Processing and Commnucations, Elsevier Academic Press, 2004.
Moon and Stiling, 2000	Todd K. Moon and Wynn C. Stirling, *Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing*, Prentice Hall, 2000.
Moler, 2010	Cleve Moler, Numerical Computing with Matlab, http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html
Munteanu, 2005	Munteanu Valeriu, *Teoria Transmisiunii Informației*, Ed. Ghe Asachi, Iasi, 2001.
Munteanu și Tarniceriu, 2005	Valeriu Munteanu, Daniela Tarniceriu, *Teoria estimarii si filtrare optimala*, Iasi, 2005.
Orfanidis, 1988	Sophocles J. Orfanidis, *Optimum Signal Processing*, 1988 by McGraw-Hill
Proakis and Manolakis, 1996	John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis, *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications*. Third Edition, Prentice-Hall, 1996.
Poor, 1988	H. Vincent Poor, *An introduction to Signal Detection and Estimation*, Springer, 1988.
Random generation, 2010	Papers on random number generation: http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~mat/MT/ARTICLES/earticles.html
Shanmugan, 1988	K.S. Shanmugan and A.M.Breipohl, *Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis*, John Wiley & Sons, NY, 1988.
Spataru, 1983	Alexandru Spătaru, *Teoria Transmisiunii Informaţiei*, E.D.P., București, 1983.
Stoica și Mihaescu, 1990	V.Stoica & A.Mihăescu, *Teoria Transmisiunii Informaţiei*, I.P.Timişsoara, 1990.
Srinath, s.a., 1996	M.D. Srinath, P.K. Rajaseakran, R. Viswanathan, *Introduction to Statistical Signal Processing with Applications*, Prentice-Hall, 1996.
Shiavi, 2007	Richard Shiavi, *Introduction to Applied Statistical Signal Analysis: Guide to Biomedical and Electrical Engineering Applications*, Elsevier, 2007.
Shin and Hammond, 2008	Kihong Shin and Joseph K. Hammond, *Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vbration Engineers*, John Wiley & Sons Ltd., 2008.
Singpurwalla and Meinhold, 1983	N.D. Singpurwalla and R.J. Meinhold, *Understanding the Kalman Filter*, The American Statistician, vol. 37, no. 2, 1983, pp. 123-7.
van der Lubbe, 1997	Jan C.A. van der Lubbe, *Information Theory*, Cambridge University Press, London, 1997.
Vaseghi, 2000	Saeed V. Vaseghi, *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*, Second Edition, 2000, John Wiley & Sons Ltd.
Welch and Bishop, 2002	Greg Welch and Gary Bishop, *An Introduction to the Kalman Filter*, TR-95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapell Hill, updated in 2002.

Anexa 1 - Codul Matlab pentru generarea secvențelor aleatorii

```
%  Aplicatie capitolul 1
% PASUL 1:  Generare numere aleatorii cu distribuție uniformă

clc; clear; clf;

seed = rand('seed');      % Întoarce starea inițială a generatorului
x0 = 5000;
rand('seed', x0);       % setează metoda "seed" valoarea inițială x0;
N = 100;                % numărul de valori;

% 1st method: standard functions of Matlab.
figure(1);
VU = rând(1,N);
subplot(221), stem(VU); title('numere aleatorii u.d.'); xlabel('valori');
subplot(222), plot(VU);  title('numere aleatorii u.d.'); xlabel('valori');

[Nh, Xh] = hist(VU);
subplot(223), bar(Xh, Nh);title('Densitatea de prob.');
int_Nh = cumsum(Nh); int_Nh = int_Nh ./ max(int_Nh);
subplot(224), plot(Xh, int_Nh); title('Distributia de prob.');

% 2nd method: algoritmul multiplicativ congruential:
a = 65539; c = 0; m = 2^31;  x(1) = x0;
for k=1:N-1,
   x(k+1) = mod(a*x(k) + c, m);
end;
x = x./m;

figure(2);
subplot(221), stem(x);  title('numere aleatorii u.d.'); xlabel('valori');
subplot(222), plot(x);  title('numere aleatorii u.d.'); xlabel('valori');

[Nh, Xh] = hist(x);
subplot(223), bar(Xh, Nh); title('Densitatea de prob.');
int_Nh = cumsum(Nh); int_Nh = int_Nh ./ max(int_Nh);
subplot(224), plot(Xh, int_Nh); title('Distributia de prob.');
```

```
% ========================================|
% PASUL 2: Generarea unei densităţi de probabilitate liniare:
% (vezi exemplul din curs);

%1. Se generează variabila cu distribuţie uniformă:
N = 100;          % try also 500 and 1000...
A = rand(1,N);
C = 2 .* sqrt(A);  %2: Se generează v.a. cu pdf liniară.
x = C;

figure(3);
subplot(221), stem(x); title('numere aleatorii u.d.'); xlabel('valori');
subplot(222), plot(x); title('numere aleatorii u.d.'); xlabel('valori');

[Nh, Xh] = hist(x);
subplot(223), bar(Xh, Nh); title('Densitatea de prob.');
int_Nh = cumsum(Nh); int_Nh = int_Nh ./ max(int_Nh);
subplot(224), plot(Xh, int_Nh); title('Distributia de prob.');


% Pasul 3: Generarea unei densităţi de probabilitate gaussiene:
N = 1000;  % try also 500 and 1000...
sigma2 = 1;
%1.Se generează distribuţia uniformă:
A = rand(1,N);
%2.Se generează distribuţia Rayleigh:
R = sqrt(2*sigma2 *log(1./(1-A)));
%3.Se generează alta v.a. cu distribuţie uniformă pentru unghi:
B = rand(1,N);
teta = B *2*pi;
%4.Se genereaza v.a. gaussiană:
C = R .* cos(teta);
x = C;
figure(4);
subplot(221), stem(x); title('numere aleatorii n.d.'); xlabel('valori');
subplot(222), plot(x); title('numere aleatorii n.d.'); xlabel('valori');
[Nh, Xh] = hist(x);
subplot(223), bar(Xh, Nh); title('Densitatea de prob.');
int_Nh = cumsum(Nh);  int_Nh = int_Nh ./ max(int_Nh);
subplot(224), plot(Xh, int_Nh); title('Distributia de prob.');

% ================== end ========================|
```

Anexa 2 - Proprietățile secvențelor pseudoaleatorii periodice

P1). Dacă se definește prin stare a unei secvențe, valoarea secvenței dintr-un interval elementar în care secvența are valoarea 0 sau 1, atunci numărul total de stări este $(n+1)/2$.

P2). Dacă într-o porţiune din secvenţa aleatorie, de lungime $n>>1$, N_{11} este numărul de simboluri cu valoarea 1 logic, N_{01} este numărul de simboluri cu valoarea 0 logic, N_{12} este numărul de succesiuni de simboluri de 1 logic de lungime 2, N_{02} numărul de succesiuni de 0 logic de lungime 2, ş.a.m.d, este îndeplinită relaţia:

$$N_{i1} = n/2, N_{i2} = n/4, N_{i3}, = n/8, ..., N_{ik} = n/2^k ..., \quad i \in \{0,1\} \quad (1)$$

P3). În fiecare interval de lungime *n*, numărul de simboluri 1 logic este cu 1 mai mare decât numărul de simboluri 0 logic, deci

$$N_{11} = N_{01} - 1 \quad (2)$$

P4). În cadrul unei perioade, jumătate din numărul de stări au o durată egală cu Δ, un sfert din numărul de stări au durata 2Δ, o optime au durata 3Δ ș.a.m.d., exceptând o stare cu valoarea 1, pe o durată $m\Delta$ și o stare cu valoarea (-1), de durata (m-1) Δ.

P5). Numărul de simboluri de 0 este

$$N_0 = \frac{n-1}{2} = 2^{n-1} - 1 \quad (3)$$

P6). Numărul de simboluri de 1 este

$$N_1 = \frac{n+1}{2} = 2^{n-1} \quad (4)$$

Anexa 3– Codul sursă Matlab pentru estimarea dsp

```
% estimarea densității spectrale de putere.

clc; clear; clf

% define signals:
fm = 50; F01 = 100; F02 = 280; Fs = 1000; Ts = 1/Fs; N = 500;
t = (0:N-1) .*Ts;
m = sin(6.28 * fm *t);
s = (1+0.8 * m) .* sin(6.28 * F01 .*t) + (1+0.8 * m) .* cos(6.28 * F02 .*t);

% 1. Direct method..
x = s;
Nfft = 2^nextpow2(N);
X = fft(x,Nfft) ./ N ;                % DFT
Px = X .* conj(X) ;                   % double sided power spectrum
Px_plus = 2 * Px(1:Nfft/2);           % one-sided power spectrum
Px_psd = Px_plus / (Nfft * Ts);       % one-sided psd
fx = linspace(0,1,Nfft/2) .* (Fs/2);  % pozitive frequency axis

% 2. Indirect method..
y = s;
[ryy, tau] = xcorr(y) ;       % correlation
Nr = length(ryy);    Nrfft = 2^nextpow2(Nr);

Y = fft(ryy, Nrfft) ./ Nr;            % DFT
Py = Y .* conj(Y) ;                   % double sided power spectrum
Py_plus = 2 * Py(1:Nrfft/2);          % one-sided power spectrum
Py_psd = Py_plus / (Nrfft * Ts) ;     % one-sided psd
fy = linspace(0,1,Nrfft/2) .* (Fs/2);

% 3. Matlab's function ...
[Pyy_mat , f_mat]= periodogram(s,[],fx,Fs);     % one-side periodogram..

xx = [1:50];
subplot(231), plot(fx, Px_psd); title('Direct method')
subplot(232), plot(fy, Py_psd,'r');  title('Indirect method')
subplot(233), plot(f_mat, Pyy_mat,'g'); title('Matlab result');
subplot(212), plot(fx, Px_plus, fy, Py_plus,'r',f_mat, Pyy_mat, 'g');
xlabel('F[Hz]');  legend('Indirect)', 'Direct',  'Matlab periodogram');
  ============================== END ============================
```