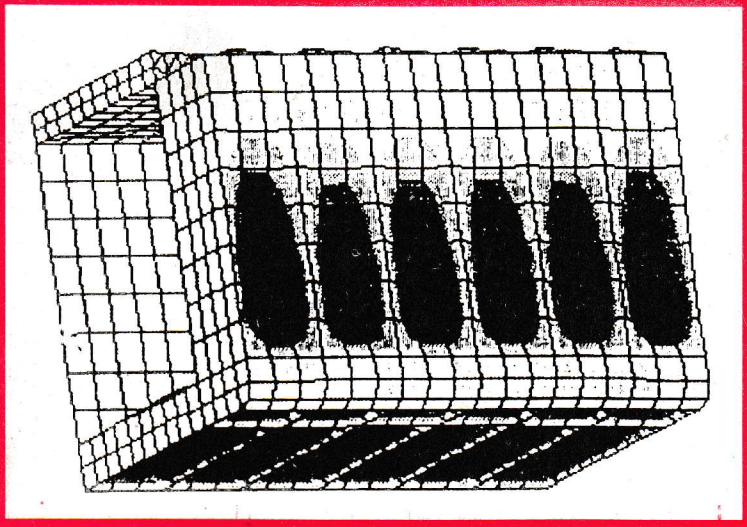
15.810

IONEL CHIRICĂ



ANALIZĂ CU ELEMENTE FINITE ÎN INGINERIA STRUCTURILOR

EDITURA FUNDAȚIEI UNIVERSITARE
"DUNĂREA DE JOS" GALAȚI

m 15.810.

IONEL CHIRICĂ

ANALIZA CU ELEMENTE FINITE ÎN INGINERIA STRUCTURILOR

214.744.

UNIVERSITATEA
„DUNĂREA DE JOS" GALAȚI
BIBLIOTECA 1

Editura Fundației Universitare
„Dunărea de Jos" - Galați, 2001

C-214744R

Lucrarea prezintă conceptele de bază ale Metodei elementului finit.
Se tratează noţiuni de calcul variaţional precum şi metodele energetice, utilizate în studiul elementelor finite. Se studiază elementul de bară, separat de celelalte tipuri de elemente. Se prezintă modul de determinare a ecuaţiei elementului finit. Se prezintă modul de evaluare a termenilor matricei de rigiditate a elementului finit când se trece la sistemul local de coordonate adimensional, pe baza matricei Jacobiene. Se prezintă funcţiile de formă utilizate în studiul elementelor finite. Se tratează modul de transformare a matricelor caracteristice ale elementelor. Se prezintă diferite metode de asamblare. Se tratează problema introducerii deplasărilor şi a legăturilor impuse. Se prezintă modul de determinare a matricelor caracteristice ale diferitelor tipuri de elemente finite bidimensionale, tridimensionale izoparametrice, infinite şi ierarhice. Este tratată tehnica substructurării. Se tratează elementele finite de echilibru şi elemente hibride. Se prezintă câteva metode de integrare numerică utilizate la definirea matricelor caracteristice ale elementelor finite.

Lucrarea este utilă studenţilor şi doctoranzilor de la profilul general de mecanică, construcţii navale, construcţii civile şi industriale. De asemenea, lucrarea este utilă şi inginerilor din cercetare şi proiectare.

© Editura Fundaţiei Universitare
"Dunărea de Jos", Galaţi, 2001
ISBN 973-8139-50-3

Cuprins

1 Introducere 13
1.1 Metoda elementelor finite 13
1.2 Evoluţia metodei 14
1.3 Modul de aplicare a metodei elementelor finite 14
1.4 Modul de prezentare a metodei elementelor finite 15
1.5 Mărimi caracteristice ale elementelor finite 16
1.6 Descrierea generală a aplicării Metodei Elementului Finit 17
1.6.1 Discretizarea domeniului de calcul 17
1.6.2 Alegerea tipului de element finit 18
1.6.3 Determinarea matricelor şi vectorilor la nivelul elementului finit 18
1.6.4 Asamblarea elementelor 18
1.6.5 Rezolvarea sistemului de ecuaţii 18
1.6.6 Calcule auxiliare (postprocesare) 18

2 Elementul de bară 19
2.1 Generalităţi 19
2.2 Elementul de bară ce transmite forţe axiale 20
2.2.1 Matricea de rigiditate 20
2.2.2 Vectorul sarcinilor reduse la extremităţile barei 21
2.2.3 Influenţa temperaturii 22
2.3 Elementul de bară ce transmite sarcini torsionale 23
2.3.1 Matricea de rigiditate a barei solicitată la torsiune pură 23
2.3.2 Vectorul sarcinilor reduse la extremităţile barei 23
2.4 Elementul de bară încovoiată cu considerarea forfecării (încovoiere în planul *xOz*) 24
2.4.1 Deplasările şi rotirile secţiunilor transversale datorită forfecării 24
2.4.2 Deplasările şi rotirile secţiunilor transversale datorită încovoierii 25
2.4.3 Matricea de rigiditate a barei solicitată la încovoiere cu considerarea forfecării 26
2.4.4 Vectorul sarcinilor reduse la extremităţile barei 27
2.4.5 Influenţa temperaturii 28
2.5 Elementul de bară încovoiată cu considerarea forfecării (încovoiere în planul xOy) 29
2.6 Elementul de bară solicitată spaţial 30
2.7 Funcţii de modelare a parametrilor încovoierii 31

3 Introducere în calculul variaţional 33
3.1 Generalităţi 33
3.2 Extremele funcţiilor 33
3.3 Extremele funcţionalelor 35
3.4 Teorema minimului energiei potenţiale şi reciproca ei 36
3.5 Metoda multiplicatorilor lui Lagrange 38

4 Principii energetice, principii variaţionale, teoreme energetice 39
4.1 Generalităţi 39
4.2 Lucrul mecanic şi energia potenţială. Lucrul mecanic complementar şi energia potenţială complementară 40
4.2.1 Generalităţi 40
4.2.2 Lucrul mecanic şi potenţialul forţelor aplicate 41
4.3 Energia potenţială de deformaţie şi energia potenţială de deformaţie complementară 43
4.3.1 Expresia generală a energiei potenţiale de deformaţie 43
4.3.2 Energia potenţială de deformaţie în cazul existenţei deformaţiilor iniţiale, sau a distribuţiei neuniforme de temperatură 47
4.3.3 Energia potenţială de deformaţie exprimată în raport cu deformaţiile elastice 48
4.3.4 Expresia generală a energiei potenţiale de deformaţie complementare 49
4.3.5 Energia potenţială complementa ră de deformaţie în cazul existen ţei deformaţiilor iniţiale sau a distribuţiei neuniforme de temperatură 50
4.4 Energia potenţială totală şi energia potenţială complementară totală 51
4.5 Principii energetice 52
4.5.1 Principiul lucrului mecanic virtual sau principiul deplasărilor virtuale 52
4.5.2 Principiul lucrului mecanic virtual complementar 53
4.5.3 Comparaţia între principiile lucrului mecanic virtual şi lucrului mecanic virtual complementar 55
4.6 Aplicaţiile principiului lucrului mecanic virtual 56
4.6.1 Prima teoremă a lui Castigliano 56
4.6.2 Teorema minimului energiei potenţiale de deformaţie 57
4.6.3 Teorema deplasării unitare
4.7 Aplicaţiile principiului lucrului mecanic virtual complementar 58
4.7.1 A doua teoremă a lui Castigliano 58
4.7.2 Teorema minimului energiei potenţiale de deformaţie complementară 59
4.7.3 Teorema forţei unitare 59

5 Ecuaţia elementului finit 61
5.1 Generalităţi 61
5.2 Energia potenţială de deformaţie 61
5.3 Lucrul mecanic al forţelor exterioare 62
5.4 Funcţionala 63
5.5 Ecuaţia generală a elementului finit 64
5.6 Influenţa temperaturii 65
5.7 Proprietăţile matricei de rigiditate 66
5.8 Exprimarea polinoamelor de interpolare funcţie de gradele de libertate ale nodurilor 66
5.9 Sisteme locale de axe de coordonate 67
5.9.1 Generalităţi 67
5.9.2 Sistemul local monodimensional 67
5.9.3 Sistemul local bidimensional triunghiular 68
5.9.4 Sistemul local tridimensional tetraedric 69
5.10 Evaluarea termenilor matricei de rigiditate a elementului finit când se trece la sistemul local de coordonate adimensional 71
5.11 Particularităţi ale analizei cu elemente finite 73

6 Funcţii de formă 75
6.1 Generalităţi 75
6.2 Condiţii de convergenţă 75
6.3 Funcţii de formă pentru elemente monodimensionale 77
6.3.1 Elementul cu 2 noduri 77
6.3.2 Elementul cu 3 noduri 78
6.3.3 Elementul cu 4 noduri 78
6.3.4 Metoda alternativă 79
6.4 Elemente plane (bidimensionale) 81
6.4.1 Elemente triunghiulare 81
6.4.2 Elemente patrulatere lagrangiene 83
6.4.3 Elemente Serendip 88
6.5 Elemente volumice 90
6.5.1 Elemente tetraedrice 90
6.5.2 Elemente hexaedrice 91
6.5.3 Elemente prismatice 93

7 Transformarea matricelor caracteristice ale elementelor 97
7.1 Generalităţi 97
7.2 Matrice de transformare 97
7.3 Translaţia sistemului de axe de coordonate 100
7.4 Rotatia sistemului de axe 103
7.4.1 Matricea de rotaţie a elementului de bară al unui cadru plan 105
7.4.2 Calculul cosinusurilor directoare ale direcţiilor axelor locale ale barei 106

8 Asamblarea elementelor finite 109
8.1 Generalităţi 109
8.2 Metoda matricei de expansiune 110
8.3 Metoda matricei indicilor 112
8.4 Asamblarea matricei de rigiditate a structurii pe blocuri 114
8.5 Particularităţi ale sistemelor de ecuaţii ce rezultă în urma asamblării 115
8.6 Exemplu de asamblare pentru un element finit de triunghi 117
8.7 Modelarea legăturilor 119
8.7.1 Generalităţi 119
8.7.2 Legături rigide pe direcţiile axelor de coordonate 119
8.7.3 Deplasări impuse pe direcţiile axelor de coordonate 119
8.7.4 Legături elastice pe direcţii oarecare 120
8.7.5 Legături elastice pe direcţiile axelor de coordonate 121
8.7.6 Deplasări impuse pe direcţii oarecare 121
8.7.7 Legături rigide pe direcţii oarecare 122
8.8 Sisteme plane şi spaţiale de bare 123
8.8.1 Grade de libertate locale şi globale. Sistemul global de ecuaţii 123
8.9 Algoritm de rezolvare a sistemelor plane de bare 124
8.9.1 Descrierea datelor problemei 125
8.9.2 Stabilirea gradelor de libertate 126
8.9.3 Calculul matricelor şi vectorilor la nivel de element 127
8.9.4 Asamblarea sistemului de ecuaţii 128
8.9.5 Rezolvarea sistemului de ecuaţii 129
8.9.6 Afişarea rezultatelor 130

9 Tipuri de elemente finite 131
9.1 Generalităţi 131
9.2 Elemente finite bidimensionale în stare plană 131
9.2.1 Elementul finit triunghiular izoparametric cu deformaţii constante (CST) 132
9.2.2 Elementul de placă încovoiată 138
9.2.3 Algoritm de generare automată a reţelei de elemente finite plane triunghiulare 145
9.3 Elemente finite de volum 149
9.3.1 Tetraedrul 149
9.3.2 Elementul finit de volum cu 8 noduri (hexaedru) 152

10 Elemente izoparametrice 159
10.1 Generalităţi 159
10.2 Calculul Jacobianului 160
10.2.1 Elemente monodimensionale 160
10.2.2 Elemente bidimensionale 161
10.2.3 Elemente tridimensionale 162
10.2.4 Elemente superparametrice şi subparametrice 163
10.3 Proprietatea Jacobianului 163
10.3.1 Elementul monodimensional 163
10.3.2 Elementul triunghiular 163
10.3.3 Elementul patrulater 163
10.3.4 Elemente superioare 163
10.3.5 Ordinul topologic 164
10.4 Probleme monodimensionale 164
10.4.1 Elementul monodimensional parabolic 164
10.4.2 Ecuaţia lui Helmoltz 165
10.4.3 Elementul axial-simetric 165
10.5 Elementul izoparametric tridimensional (hexaedrul liniar) 166
10.5.1 Determinarea matricei $\boldsymbol{J}$ 167
10.5.2 Determinarea matricei $\boldsymbol{B}$ 167

11 Tehnica substructurării 169
11.1 Generalităţi 169
11.2 Condensarea statică 172
11.3 Condensarea dinamică 173

12 Elemente speciale 175
12.1 Generalităţi 175
12.2 Elementul infinit 175
12.2.1 Elementul infinit unidimensional 175

12.2.2 Elementul infinit bidimensional 176
12.3 Elementul ierarhic 178
12.3.1 Elemente unidimensionale 179
12.3.2 Elemente bidimensionale 182
12.3.3 Alegerea gradului de discretizare a rețelei 184

13 Elemente finite de echilibru 185
13.1 Generalități 185
13.2 Modelare cu elemente finite de echilibru 185
13.3 Modelare cu elemente hibride 186
13.3.1 Modelare cu elemente hibride HSM 186
13.3.2 Modelare cu elemente hibride HDM 194
13.4 Modelare cu elemente finite mixte 195

14 Probleme dinamice 197
14.1 Generalități 197
14.2 Matricea consistentă de inerție și matricea inerțiilor concentrate 198
14.3 Matricea consistentă de inerție a elementului de bară 198
14.4 Matricea consistentă de de inerție a elementului finit triunghiular CST 200
14.5 Matricea de amortizare 200

15 Probleme neliniare 201
15.1 Generalități 201
15.2 Neliniaritatea de material 201
15.2.1 Metoda rigidității variabile 202
15.2.2 Metoda tensiunilor inițiale 202
15.3 Metoda deformațiilor inițiale 203
15.4 Neliniaritatea geometrică 204
15.4.1 Matricea geometrică la bare 206
15.5 Metoda Newton-Raphson de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare 210

16 Integrarea numerică 211
16.1 Generalități 211
16.2 Elemente monodimensionale 211
16.2.1 Metoda Newton – Cotes 212
16.2.2 Metoda Gauss 214
16.3 Elemente bidimensionale 215
16.3.1 Elemente patrulatere 215
16.3.2 Elemente triunghiulare 215
16.4 Elemente tridimensionale 217
16.4.1 Elemente hexaedrice 217
16.4.2 Elemente tetraedrice 218
16.4.3 Elemente prismatice 218
16.5 Elemente degenerate 219
16.6 Integrarea elementelor izoparametrice 219
16.7 Moduri de deformare 219
Bibliografie 220