Colecţia Ştiinţe Inginereşti

ISBN 978-606-696-254-4

Elemente de geometrie euclidiană plană

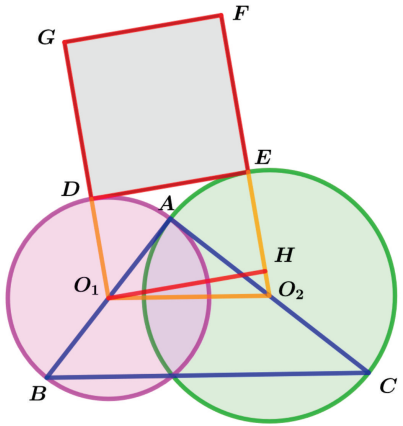
Stefănuţ CIOCHINĂ

Monica Alice APRODU

Monica Alice APRODU

Stefănuţ CIOCHINĂ

# Elemente de geometrie euclidiană plană




GALAŢI UNIVERSITY PRESS

**Aprodu Monica Alice**

**Ciochină Ştefănuţ**

# Elemente de geometrie euclidiană plană

**GALATI UNIVERSITY PRESS**

**2022**

**Copyright © 2022 Galati University Press**
Toate drepturile rezervate. Nicio parte a acestei publicaţii nu poate fi reprodusă în nicio formă fără acordul scris al editurii.

## Colecţia Ştiinţe Inginereşti

**Galati University Press** – Cod CNCS 281
Editura Universităţii „Dunărea de Jos” din Galaţi
Str. Domnească, nr. 47, 800008 – Galaţi, ROMANIA
Tel. 0336 13 01 39; Fax: 00 40 236 46 13 53
gup@ugal.ro

**Referenţi Ştiintifici:**
**Conf. univ. dr. Jenică CRÂNGANU**
**Lector univ. dr. Camelia FRIGIOIU**

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României**
**APRODU, MONICA ALICE**
**Elemente de geometrie euclidiană plană** / Aprodu Monica Alice, Ciochină Ştefănuţ. - Galaţi : Galaţi University Press, 2022
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-696-254-4

I. Ciochină, Ştefănuţ

51

Tipărit la Editura Universităţii „Dunărea de Jos” din Galaţi.

# Cuprins

Introducere 3

Capitolul 1. Noţiuni de bază 1

Capitolul 2. Triunghi 15
1. Cazuri de congruenţă în triunghi 19
2. Triunghi isoscel 21
3. Triunghi echilateral 23
4. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă 25
5. Linia mijlocie în triunghi 32
6. Proprietăţi ale dreptelor importante în triunghi 34
7. Asemănarea triunghiurilor 43
8. Relaţii metrice în triunghi 53

Capitolul 3. Patrulater 69
1. Poligon 69
2. Paralelogram 80
3. Dreptunghiul 83
4. Rombul 84
5. Pătrat 87
6. Trapez 89
7. Relaţii metrice în patrulater 92

Capitolul 4. Cerc 97
1. Definiţii, proprietăţi 97
2. Unghiuri şi arce în cerc 104
3. Patrulater înscris şi circumscris 114
4. Puterea unui punct faţă de un cerc. Axa radicală 122

Capitolul 5. Probleme. Triunghi 127
1. Congruenţa triunghiurilor. Cazuri de congruenţă 127
2. Drepte importante în triunghi 134
3. Triunghi isoscel 140
4. Triunghi echilateral 146
5. Triunghi dreptunghic 151
6. Linia mijlocie în triunghi 157
7. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă 161
8. Triunghiuri asemenea 167
9. Relaţii metrice în triunghi 180

Capitolul 6. Probleme. Patrulater 189
1. Patrulater convex 189
2. Paralelogram 196
3. Dreptunghi 202
4. Romb 206
5. Pătrat 212
6. Trapez 218
7. Relaţii metrice în patrulater 224

Capitolul 7. Probleme. Cerc 231
1. Definiţii, proprietăţi 231
2. Patrulatere inscriptibile 236
3. Poligoane regulate 242
4. Arii 247

Bibliografie 255

# Introducere

Materialul de faţă reprezintă o introducere în lumea geometriei plane, fiind util atât studenţilor de la programele de licenţă şi master din domeniul Matematică, cât şi elevilor din gimnaziu. Această lucrare îşi propune să vină în ajutorul şi spijinul cititorului în vederea înţelegerii modalităţilor de a construi raţionamente necesare rezolvării problemelor de geometrie. În general, principala metodă prin care se rezolvă o problemă de geometrie sintetică este demonstraţia. Prin parcurgerea acestei cărţi dorim să creăm deprinderi în realizarea unor demonstraţii eficiente.

*Elemente de geometrie euclidiană plană* nu reprezintă o colecţie exhaustivă de conţinuturi ale geometriei euclidiene în plan. Este un material ce prezintă, într-o formă uşor de urmărit, principalele noţiuni fundamentale ale geometriei sintetice. La problemele selectate din Gazeta Matematică sau din alte cărţi de specialitate au fost indicate şi citate sursele de informare. Definiţiile, proprietăţile şi teoremele utilizate aparţin resurselor clasice de geometrie menţionate la bibliografie.

Materialul este structurat în şapte capitole.

Primul capitol, *Noţiuni de bază*, prezintă geometria euclidiană având la bază un sistem de axiome. Sunt amintite noţiuni fundamentale: punctul, planul, dreapta, incidenţa, ordinea şi congruenţa.

Al doilea capitol, intitulat *Triunghi*, tratează triunghiul şi principalele sale elemente. Sunt clasificate triunghiurile şi sunt evidenţiate principalele proprietăţi ale triunghiului isoscel, triunghiului

echilateral, respectiv ale triunghiului dreptunghic. O parte importantă a acestui capitol este alocată liniilor importante în triunghi, asemănării triunghiurilor precum şi relaţiilor metrice în triunghiul dreptunghic. Multe dintre proprietăţi sunt demonstrate în detaliu cu scopul de a-i ajuta pe studenţi să-şi dezvolte propriile demonstraţii ale unor probleme cu caracter practic.

În capitolul al treilea, *Patrulater*, sunt prezentate linia poligonală închisă şi elementele caracteristice ale acesteia. Sunt studiate proprietăţi ale patrulaterului convex, paralelogramului, dreptunghiului, pătratului, rombului şi trapezului. De asemenea, în ultimul subcapitol sunt amintite o serie de proprietăţi referitoare la relaţii metrice în patrulatere.

Capitolul patru, numit *Cerc*, este destinat studiului cercului şi proprietătilor acestora, trecând în revistă unghiuri în cerc, patrulatere inscriptibile şi circumscrise în cerc şi cu proprietăţile esenţiale ale acestora.

Capitolele cinci, şase şi şapte sunt destinate consolidării noţiunilor teoretice. Fiecare subcapitol este structurat în două secţiuni: probleme rezolvate şi probleme propuse.

*Galaţi, decembrie 2022* *Autorii*

CAPITOLUL 1

# Noţiuni de bază

Geometria euclidiană se bazează pe axiome, adică pe propoziţii care se acceptă fără demonstraţie şi cu ajutorul cărora se deduc alte propoziţii, teoreme. Prima prezentare axiomatică, cea a lui Euclid (365-300 î.e.n), a fost completată de sistemul axiomatic a lui D. Hilbert (1899) în care noţiunile fundamentale sunt: punctul, dreapta, planul, incidenţa, ordinea şi congruenţa. Considerarea funcţiilor "distanţă" şi "măsura unghiului" printre noţiunile fundamentale duce la simplificarea sistemului axiomatic obţinându-se sistemul lui G.D. Birkoff (1932) ce stă la baza construcţiei, prin deducţie logică, a rezultatelor studiate în geometria euclidiană. Axiomele se împart în "axiome de incidenţă", "axioma riglei" şi cea de "separare", "axiomele unghiului", de "congruenţă" şi "axioma paralelelor".

*Punctul* este o noţiune fundamentală, primară în geometria euclidiană, fără dimensiune.

Se notează cu majuscule: $A$, $B$, $C$ etc.

Reprezentare pe hârtie:




FIGURA 1. Reprezentarea punctului

*Planul,* noţiune fundamentală în axiomatica geometriei euclidiene este o mulţime de puncte cunoscută ca o suprafaţă de dimensiune doi. Planul nu are grosime şi are lungime şi lăţime infinită.

Se notează cu litere greceşti: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\pi$ etc.

Reprezentare pe hârtie:




FIGURA 2. Reprezentarea planului

*Dreapta* este o submulţime a planului de dimensiune unu, fară grosime care se prelungeşte la infinit în ambele sensuri.

Se notează cu: $a$, $b$, $c$, $d$ etc.

Reprezentare pe hârtie:

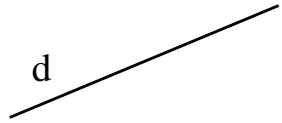



FIGURA 3. Reprezentarea dreptei

În cele ce urmează vom reaminti axiome cu ajutorul cărora se vor putea defini elementele de bază, precum segment, semidreaptă, unghi, semiplan.

Din primul grup de axiome, "axiomele de incidenţă", amintim:

A1: "Oricare două puncte distincte determină o dreaptă unică; Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte distincte."

A2: "Fiind dat un plan $\pi$, există cel puţin trei puncte distincte în el, necoliniare. Dacă se dau trei puncte necoliniare, distincte, atunci există un plan unic care să le conţină."

A3: "Dacă se consideră două puncte $A, B$ situate în planul $\pi$, atunci dreapta determinată de cele două puncte este conţinută în plan."

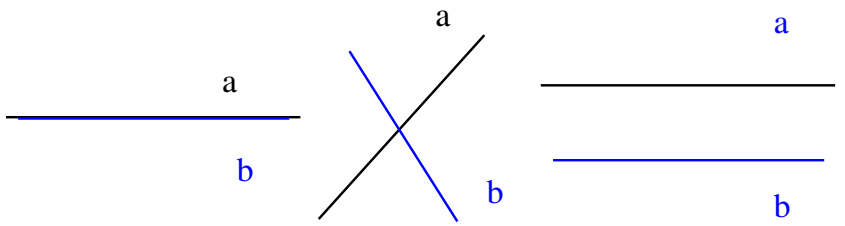
Un exemplu de folosire a axiomelor pentru a deduce alte proprietăţi este următorul rezultat. Folosind axioma $(\mathrm{A1})$, se poate demonstra:

*Într-un plan, oricare două drepte diferite au cel mult un punct comun.*

Într-adevăr, dacă presupunem contrariul, atunci există două drepte diferite $a$ şi $b$ în planul $\pi$, care au în comun două puncte diferite. Fie acestea $A$ şi $B$. Astfel, $A \neq B$, $A, B \in a$, $A, B \in b$. Conform axiomei (A1) punctele $A$ şi $B$ determină o dreaptă unică, adică $a = AB$, $b = AB$ implică $a = b$. Fals deoarece ipoteza menţionează $a \neq b$.

Rezultatul anterior stabileşte poziţiile relative a două dreptele situate într-un plan (dreptele coplanare), astfel:

- *drepte identice* sau *confundate* sunt două drepte care au două puncte comune, deci au toate punctele comune. Notaţie: $a = b$.
- *drepte concurente* dacă au un singur punct comun iar acesta se va numi *punct de intersecţie*. Notaţie: $a \cap b \neq \emptyset$.
- *drepte paralele* sunt două drepte conţinute în acelaşi plan care nu au niciun punct comun. Notaţie pentru drepte paralele: $a \parallel b$.




**Confundate** **Concurente** **Paralele**

FIGURA 4. Poziţii relative a dreptelor în plan

Fiecărei perechi de puncte din plan i se poate asocia un unic număr real, pozitiv. În felul acesta, se obţine *funcţia distanţă*. Aceasta se defineşte astfel:

**Definiţia** 1.1. *Se consideră $\pi$ un plan şi $d : \pi \times \pi \to \mathbf{R}$. Funcţia $d$ se numeşte* funcţia distanţă, *dacă verifică următoarele condiţii:*

1) $\forall A \in \pi$, $d(A, A) = 0$,
2) *Dacă* $d(A, B) = 0$, *atunci* $A = B$,
3) $\forall A, B \in \pi$, *are loc* $d(A, B) = d(B, A)$,

4) $\forall A, B, C \in \pi$, *are loc* $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

Distanţa $d(A, B)$ dintre două puncte se mai notează şi cu $AB$.

Între mulţimea punctelor de pe o dreaptă şi mulţimea numerelor reale există o corespondenă bijectivă dată de "axioma riglei".

*Axioma riglei*: "Se consideră o dreaptă oarecare $\mathrm{a}$ şi $A, B \in \mathrm{a}$, două puncte distincte situate pe această dreaptă. Oricare ar fi un punct $M$ al dreptei $\mathrm{a}$, acestuia îi corespunde un unic număr real notat $x_M$, aşa încât următoarele condiţii sunt verificate:

1) $\forall n \in \mathbf{R}$, există şi este unic $N \in \mathrm{a}$, cu $x_N = n$,
2) $x_A = 0, x_B > 0$,
3) $\forall M, N \in \mathrm{a}$, $d(M, N) = |x_N - x_M|$".

**Definiţia** 1.2. *Se consideră* $\mathrm{a}$ *o dreaptă. Funcţia determinată în mod unic de condiţiile "axiomei riglei", notată* $f : \mathrm{a} \to \mathbf{R}$ *şi definită prin* $f(M) = x_M$, $\forall M \in \mathrm{a}$, *se numeşte* sistem de coordonate *cu originea în* $A$, *pentru dreapta* $\mathrm{a}$. *Numărul* $x_M$ *se numeşte* abscisa *punctului* $M$.

Cu ajutorul funcţiei distanţă şi a sistemului de coordonate se poate spune ce înseamnă ca un punct să se afle între alte două puncte pe o dreaptă, şi mai mult, putem defini noţiunile de segment, semidreaptă, unghi.

**Definiţia** 1.3. *Se consideră trei puncte distincte* $A, B, C$. *Se spune că* $B$ *este* între $A$ *şi* $C$ *sau că* $B$ separă $A$ *şi* $C$, *dacă există o dreaptă căreia îi aparţin cele trei puncte şi*

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

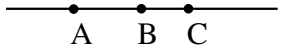



FIGURA 5. Relaţia "între"

**Definiţia** 1.4. *Se numeşte* segment deschis de capete $A$ şi $B$ *mulţimea punctelor situate între* $A$ şi $B$ şi *se notează* $(AB)$.

*Dacă la mulţimea* $(AB)$ *se iau în considerare şi punctele* $A$ şi $B$, *adică* $(AB) \cup \{A, B\}$, *atunci se defineşte* segmentul închis *de capete* $A$ şi $B$. *Acesta din urmă se notează* $[AB]$.

Cu ajutorul sistemului de coordonate, printr-un calcul imediat, segmentele deschise, respectiv cele închise se caracterizează astfel:

Se consideră dreapta $AB$ pe care se alege un sistem de coordonate:

1) Dacă $x_A < x_B$ :
$(AB) = \{M \in AB / x_A < x_M < x_B\}$;
$[AB] = \{M \in AB / x_A \leq x_M \leq x_B\}$.
2) Dacă $x_B < x_A$ :
$(AB) = \{M \in AB / x_B < x_M < x_A\}$;
$[AB] = \{M \in AB / x_B \leq x_M \leq x_A\}$.

Aşadar, putem spune că punctul $M$ se află între punctele $A$ şi $B$ dacă şi numai dacă una dintre inegalităţile următoare este adevărată:

$$x_A < x_M < x_B (\Leftrightarrow M \in (AB))$$

sau

$$x_B < x_M < x_A (\Leftrightarrow M \in (BA)).$$

Cu ajutorul acestei proprietăţi putem demonstra următoarea proprietate de ordonare a punctelor pe o dreaptă:

**Propoziţia** 1.5. *Se consideră trei puncte diferite $A$, $B$, $C$ pe o dreaptă. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1) *Unul dintre ele le separă pe celelalte două.*
2) *Dacă $B \in (AC)$, atunci $A \notin (BC)$ şi $C \notin (AB)$.*
3) *Pentru punctele diferite $A$ şi $B$, segmentul $(AB)$ nu este vid şi există un punct $D$ pe dreapta $AB$ astfel încât $B \in (AD)$.*
4) *Dacă $M \in (AB)$ şi $M \in (BC)$, atunci $M \notin (AC)$.*
5) *Dacă $M \in (AB)$, $M \notin (BC)$, atunci $M \in (AC)$.*

DEMONSTRAŢIE.

1) Alegem un sistem de coordonate aşa încât $x_A = 0$ şi $x_B > 0$. Vor exista două cazuri:
   i) $x_C < 0$. Rezultă $x_C < 0 < x_B \Rightarrow A \in (CB)$
   ii) $x_C > 0$. Atunci avem următoarele situaţii:

$$0 < x_B < x_C \Rightarrow B \in (AC),$$
$$0 < x_C < x_B \Rightarrow C \in (AB).$$

2) $B \in (AC)$, rezultă $x_A < x_B < x_C$.
   Deoarece $x_B > x_A$ se obţine $A \notin (BC)$.
   Din $x_C > x_B$ rezultă $C \notin (AB)$.
3) Considerăm un sistem de coordonate aşa încât $x_A = 0$ şi $x_B > 0$. Alegem punctul $C$ pe dreapta $AB$ astfel încât abscisa lui să fie $x_C = \frac{x_B}{2}$. Rezultă $C \in (AB)$. Punctul $D$ îl alegem cu abscisa $x_D$ egală cu $2x_B$. Se obţine $B \in (AD)$.
4) Considerăm un sistem de coordonate aşa încât $x_M = 0$ şi $x_B > 0$. Din $M \in (AB)$ rezultă $x_A < 0$ şi din $M \in (BC)$ rezultă $x_C < 0$. Aşadar, $O \notin (AC)$.
5) Se consideră un sistem de coordonate aşa încât $x_M = 0$ şi $x_B > 0$.

$$M \in (AB) \Rightarrow x_A < 0; M \notin (BC) \Rightarrow x_C > 0.$$

   Se obţine: $x_A < 0 = x_M < x_C$.

Pentru o dreaptă şi un punct care aparţine ei, se pun în evidenţă două submulţimi ale dreptei, numite semidrepte.

**Definiţia** 1.6. *Se consideră două puncte $A$ şi $B$, distincte. Prin* semidreaptă închisă *$[AB$ se înţelege mulţimea punctelor $M$ cu proprietatea că $M \in [AB]$ sau $B \in (AM)$, iar prin* semidreaptă deschisă *$(AB$ se înţelege mulţimea $[AB \setminus \{A\}$. Punctul $A$ se numeşte* originea *semidreptei.*

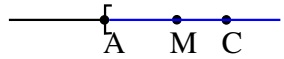


FIGURA 6. Semidreaptă închisă

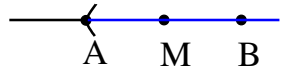


FIGURA 7. Semidreaptă deschisă

Şi în cazul semidreptelor se poate da o caracterizare a acestora cu ajutorul unui sistem de coordonare.

Se consideră dreapta determinată de punctele $A$ şi $B$ pe care se alege un sistem de coordonate:

1) Dacă $x_A < x_B$ :
$(AB = \{M \in AB / x_A < x_M\}$;
$[AB = \{M \in AB / x_A \leq x_M\}$.
2) Dacă $x_B < x_A$ :
$(AB = \{M \in AB / x_M < x_A\}$;
$[AB = \{M \in AB / x_M \leq x_A\}$.

Analog noţiunii de semidreaptă pentru o dreaptă, putem defini noţiunea de semiplan pentru un plan.

Se consideră un plan $\pi$, o dreaptă $d$ în plan şi două puncte distincte ale planului care nu aparţin dreptei $d$. Dacă $[AB] \cap d \neq \emptyset$, atunci se spune că $d$ *separă punctele* $A$ *şi* $B$. În caz contrar, $A$ *şi* $B$ *sunt de aceeaşi parte a dreptei.*

O proprietate ce stabileşte poziţia a trei puncte necoliniare faţă de o dreaptă este următoarea "axiomă de separare" care mai este cunoscută şi sub denumirea de axioma lui Pasch.

(AP) "Dacă o dreaptă separă punctele $A$ şi $B$ dar nu separă punctele $B$ şi $C$, atunci separă punctele $A$ şi $C$."

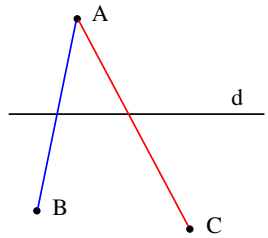



FIGURA 8. Axioma de separare

Cu ajutorul "axiomei de separare" se demonstrează un alt rezultat de separare:

**Propoziţia** 1.7. *Dacă se dau trei puncte distincte, necoliniare* $A, B, C$ *în plan şi o dreaptă* $d$ *care separă perechea de puncte* $A$ *şi* $B$ *şi perechea de puncte* $A$ *şi* $C$*, atunci dreapta nu separă perechea de puncte* $B$ *şi* $C$*.*

DEMONSTRAŢIE. Presupunem prin absurd că $d$ separă punctele $B$ şi $C$.

Din:

$d$ separă $A$ şi $B$, rezultă $d \cap AB = \{M\}$.
$d$ separă $A$ şi $C$, rezultă $d \cap AC = \{N\}$.
$d$ separă $B$ şi $C$, rezultă $d \cap BC = \{P\}$.

Din afirmaţiile anterioare, punctele $M$, $N$, $P$ sunt coliniare. Facem o alegere pentru ordinea punctelor coliniare şi presupunem că $M \in (NP)$.

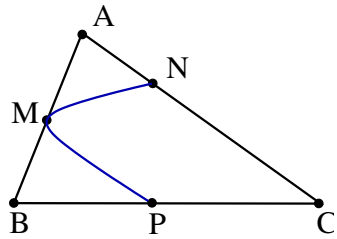


FIGURA 9. Separare

Deoarece $M \in (AB)$ şi $M \in (NP)$ rezultă că $AB$ separă $N$ şi $P$.

Cum $N \in (AC)$, rezultă că $A$ nu este între $N$ şi $C$, deci $AB$ nu separă $N$ şi $C$.

Folosind "axioma de separare" pentru: $AB$ separă $N$ şi $P$ şi $AB$ nu separă $N$ şi $C$, rezultă $AB$ separă $P$ şi $C$. Aşadar, $B \in (PC)$. Contradicţie cu $P \in (BC)$. Rămâne că $d$ nu separă punctele $B$ şi $C$.

Dacă se dau un triunghi şi o dreaptă pe care nu se găseşte niciunul dintre vârfurile triunghiului, atunci rezultatul anterior spune că dreapta, dacă intersectează o latură a triunghiului, va mai intersecta exact încă una.

**Definiţia** 1.8. *Se dau planul $\pi$, o dreaptă $d$ inclusă în plan şi un punct $A \in \pi$, $A \notin d$. Se numeşte* semiplan deschis *mulţimea punctelor din plan situate de aceeaşi parte a dreptei $d$ ca şi $A$.*

*Notaţie:* $(dA$.

*Dreapta $d$ se numeşte* frontiera *semiplanului.*

$$(dA = \{M \in \pi / [AM] \cap d = \emptyset\}$$

*Prin* semiplan închis*, se înţelege reuniunea dintre semiplanul deschis şi frontiera lui.*

$$[dA = (dA \cup d.$$

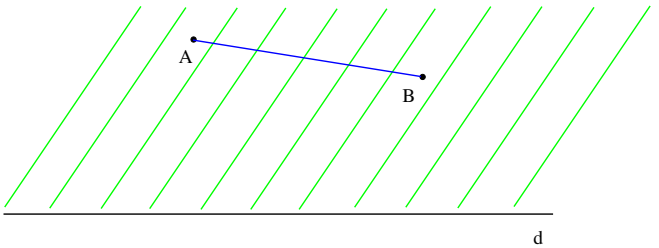



FIGURA 10. Semiplan

Un alt rezultat de separare este următoarea propoziţie:

**Propoziţia** 1.9. *Dacă se consideră un plan $\pi$ şi o dreaptă $d \subset \pi$, atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1) *Dreapta $d$ împarte planul în exact două semiplane $S_1$ şi $S_2$ care verifică condiţiile:*

$$\pi \setminus d = S_1 \cup S_2 \text{ şi } S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

2) *Dacă două puncte $A$ şi $B$ se găsesc în semiplanul $S_1$ sau în semiplanul $S_2$, atunci $d$ nu separă $A$ şi $B$. Dacă $A \in S_1$ şi $B \in S_2$, atunci dreapta $d$ intersectează segmentul $[AB]$.*

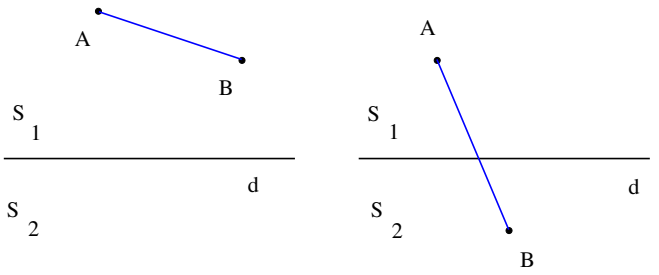



FIGURA 11. Separare

DEMONSTRAŢIE. Demonstraţia rezultă imediat folosind axioma de separare şi propoziţia (1.7).

**Definiţia** 1.10. *Se numeşte* unghi *figura geometrică obţinută prin reuniunea a două semidrepte închise cu aceeaşi origine.*

Notaţie: dacă semidreptele sunt $a = [AB$ şi $b = [AC$, atunci unghiul se notează $\widehat{BAC}$, $\sphericalangle BAC$ sau $\widehat{ab}$; punctul $A$ se numeşte vârful unghiului.

**Observaţia** 1.11. *Dacă $a = b$ atunci unghiul se numeşte* nul. *Dacă semidreptele $a$ şi $b$ sunt semidrepte opuse (semidreptele $(AB$ şi $(AC$ sunt opuse), atunci unghiul se numeşte* alungit. *Un unghi se numeşte* propriu *dacă nu este nici nul nici alungit.*

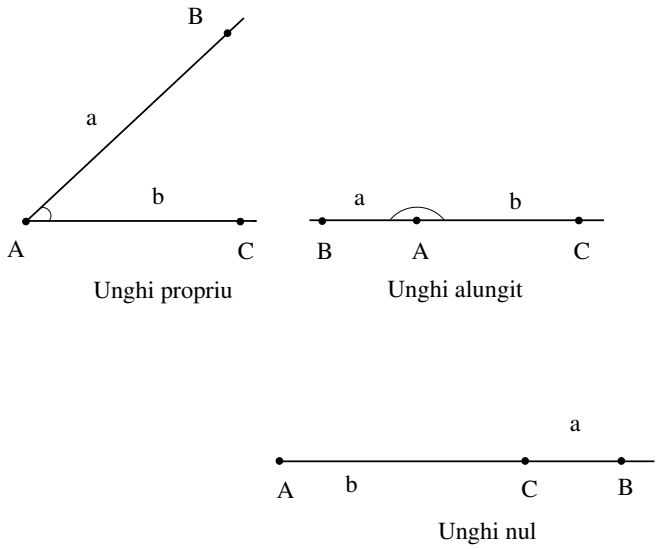



FIGURA 12. Reprezentarea unghiului

**Definiţia** 1.12. *Dacă se consideră unghiul $\sphericalangle BAC$, se numeşte* interiorul unghiului *mulţimea punctelor aflate la intersecţia semiplanelor deschise $(aC$ şi $(bB$, unde dreapta $AB$ a fost notată cu $\mathrm{a}$ şi dreapta $AC$ a fost notată cu $\mathrm{b}$.*

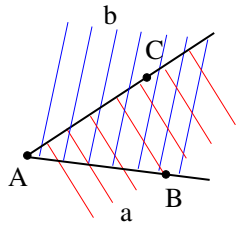



FIGURA 13. Interiorul unui unghi

**Definiţia** 1.13. *Două unghiuri care au acelaşi vârf, o latură comună şi interioare disjuncte, se numesc unghiuri* adiacente. *Dacă în plus, celelalte două semidrepte ale unghiurilor sunt opuse, unghiurile se numesc* suplementare.

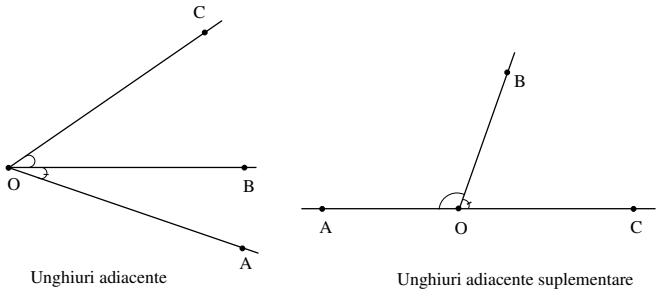



FIGURA 14. Unghiuri adiacente

Fiecărui unghi i se asociază un număr real. În felul acesta se obţine o funcţie definită pe mulţimea unghiurilor cu valori în intervalul $[0, \pi]$. Această funcţie se numeşte *"funcţia măsură a unghiului"*, se notează cu $m$ şi satisface următoarele axiome:

M1) "Pentru orice unghi $\sphericalangle AOB$, $m(\sphericalangle AOB) = 0^\circ$ (se citeşte măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ este egală cu zero grade) dacă şi numai dacă $\sphericalangle AOB$ este un unghi nul."

M2) "Pentru orice unghi $\sphericalangle AOB$, $m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ$ (se citeşte măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ este egală cu $180^\circ$) dacă şi numai dacă $\sphericalangle AOB$ este un unghi alungit."

M3) "Axioma de construcţie a unghiurilor: În plan se consideră o dreaptă $OA$ şi $S$ unul dintre semiplanele delimitate de dreapta $OA$. Pe dreapta $OA$ se alege semidreapta $(OA$. Atunci $\forall \varphi \in (0°, 180°)$, există o semidreaptă unică $(OB \subset S$, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = \varphi$."

M4) "Axioma adunării unghiurilor": Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$, $(OB \subset Int \sphericalangle AOC$.

Atunci, are loc relaţia:

$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = m(\sphericalangle AOC)$.

Cu ajutorul axiomei adunării unghiurilor, se definesc unghiurile suplementare.

**Definiţia** 1.14. *Dacă se dau două unghiuri pentru care suma măsurilor lor este* $180°$*, atunci acestea se numesc* unghiuri suplementare*. Două unghiuri se numesc* opuse la vârf *dacă au acelaşi vârf şi laturile lor sunt două câte două semidrepte opuse.*

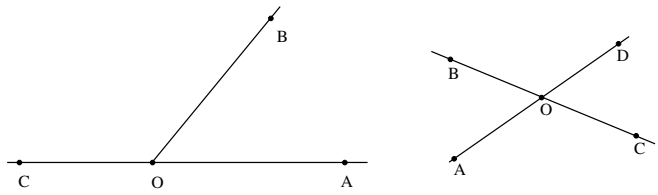



FIGURA 15. Unghiuri suplementare; unghiuri opuse la vârf

**Definiţia** 1.15. *Un unghi propriu cu măsură mai mică decât* $90°$ *se numeşte* unghi ascuţit*. Dacă măsura unghiului este mai mare decât* $90°$*, unghiul se numeşte* obtuz*. Dacă măsura unghiului este exact* $90°$*, atunci unghiul se numeşte* drept*.*

**Definiţia** 1.16. *Două segmente* $[AB]$ *şi* $[CD]$ *se spune că sunt* congruente*, dacă* $d(A, B) = d(C, D)$.

Congruenţa se notează cu "$\equiv$".

Folosind notaţia echivalentă pentru distanţă, se poate scrie

$$[AB] \equiv [CD] \Leftrightarrow AB = CD.$$

**Definiţia** 1.17. *Dacă se consideră un segment* $[AB]$*, prin* mijlocul segmentului *se înţelege acel punct* $C \in [AB]$ *cu proprietatea că este adevărată relaţia:* $[AC] \equiv [CB]$.

**Definiţia** 1.18. *Două unghiuri* $\sphericalangle AOB$ *şi* $\sphericalangle EFG$ *se numesc* congruente*, dacă măsurile lor sunt egale,* $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle EFG)$.

**Definiţia** 1.19. *Două drepte concurente se numesc* perpendiculare*, dacă formează un unghi cu măsura de* $90^\circ$.

**Propoziţia** 1.20. *Într-un punct* $A$ *al unei drepte* $d$ *se poate construi o singură perpendiculară.*

DEMONSTRAŢIE. Existenţa şi unicitatea perpendicularei este asigurată de axioma (M3).

**Observaţia** 1.21. *Dacă se dă o dreaptă* $d$ *şi un punct* $A$ *care nu aparţine dreptei, atunci se poate construi o unică perpendiculară pe dreapta* $d$ *care trece prin punctul* $A$*. Justificarea acestei afirmaţii este evidentă dacă se ştie proprietatea referitoare la suma măsurilor unghiurilor unui triunghi (a se vedea (2.13)).*

CAPITOLUL 2

# Triunghi

**Definiţia** 2.1. *Se consideră în plan trei puncte necoliniare $A$, $B$, $C$. Aceste puncte determină două câte două trei segmente:* $[AB], [AC], [BC]$. *Se numeşte* triunghi *figura geometrică obţinută prin reuniunea*

$$[AB] \cup [AC] \cup [BC].$$

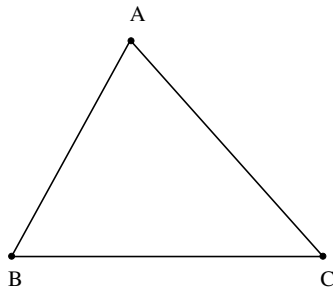



FIGURA 1. Triunghi

Notaţia pentru triunghi: $\Delta ABC$.

**Elementele triunghiului**:

- segmentele $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$ se numesc *laturile* triunghiului;
- punctele $A$, $B$, $C$ se numesc *vârfurile* triunghiului;
- unghiurile $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ se numesc *unghiurile* triunghiului;
- un punct care aparţine interiorului fiecărui unghi al triunghiului se spune că este în interiorul triunghiului;
- un punct se spune că se găseşte în exteriorul triunghiului dacă nu se găseşte în interior şi nici pe laturile lui.

**Clasificarea triunghiurilor**:

- un triunghi cu toate unghiurile ascuţite se numeşte *triunghi ascuţitunghic*;
- un triunghi cu un unghi drept se numeşte *triunghi dreptunghic*;
- un triunghi care are un unghi obtuz se numeşte *triunghi obtuzunghic*;
- un triunghi cu laturi de lungimi diferite se numeşte *triunghi oarecare*;
- un triunghi cu două laturi congruente se numeşte *triunghi isoscel*; latura necongruentă a triunghiului se numeşte *bază*;
- un triunghi cu toate laturile congruente se numeşte *triunghi echilateral*.

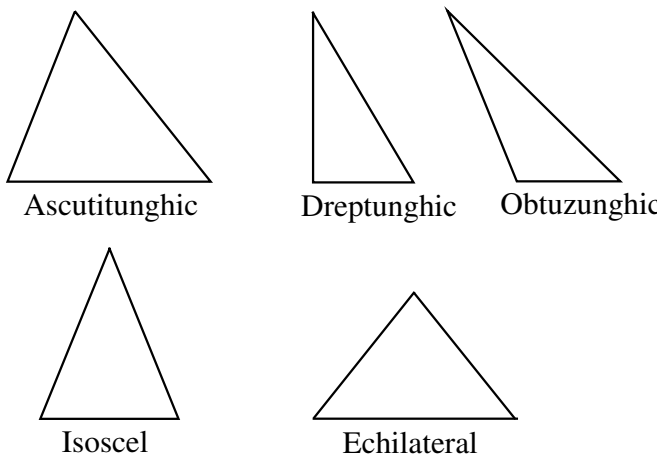



FIGURA 2. Clasificarea triunghiurilor

**Drepte importante în triunghi**

*Mediana.* Se consideră latura $[BC]$ a triunghiului $\Delta ABC$ şi punctul $A'$ mijlocul segmentului $[BC]$. Dreapta $AA'$ se numeşte *mediana* corespunzătoare laturii $[BC]$. În cazul în care considerăm doar segmentul $[AA']$, putem vorbi de lungimea medianei ca fiind lungimea segmentului $[AA']$.

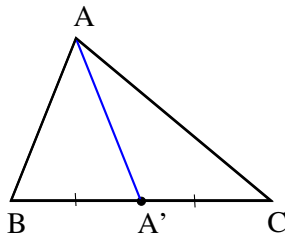


FIGURA 3. Mediana

Existenţa şi unicitatea medianei corespunzătoare unei laturi a triunghiului este asigurată de existenţa şi unicitatea mijlocului laturii considerate. Un triunghi are trei mediane.

*Bisectoarea.* În $\Delta ABC$ se consideră unul dintre unghiurile triunghiului. Fie acesta, de exemplu, $\sphericalangle ABC$. Se numeşte *bisectoarea* unghiului propriu $\sphericalangle ABC$ acea semidreaptă $[BO$, cu originea în $B$, situată în interiorul unghiului $\sphericalangle ABC$, care îndeplineşte condiţia ca:

$$m(\sphericalangle ABO) = m(\sphericalangle OBC).$$

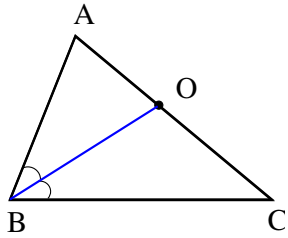


FIGURA 4. Bisectoarea

Dacă vom considera lungimea segmentului $[BO]$, unde punctul $O$ se găseşte ca $[BO \cap [AC] = \{O\}$, atunci putem vorbi de lungimea bisectoarei.

Într-un triunghi există trei bisectoare interioare corespunzătoare celor trei unghiuri ale triunghiului, iar unicitatea fiecareia în parte este asigurată de axioma (M3).

*Mediatoarea.* În $\Delta ABC$ se consideră una dintre laturile triunghiului. Fie de exemplu, latura $[BC]$. Dacă notăm cu $A'$ mijlocul segmentului $[BC]$ şi construim prin $A'$ dreapta $d_a$ perpendiculară pe $[BC]$, obţinem *mediatoarea* laturii $[BC]$.

Un triunghi are trei mediatoare corespunzătoare celor trei laturi ale sale. Existenţa şi unicitatea mediatoarei este asigurată de existenţa şi unicitatea mijlocului unui segment şi de existenţa şi unicitatea perpendicularei printr-un punct al unei drepte.

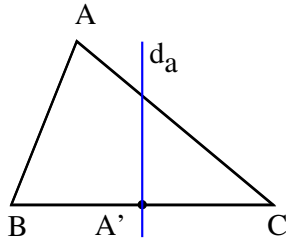



FIGURA 5. Mediatoarea

*Înălţimea.* Dreapta perpendiculară, dusă dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă, se numeşte *înălţime*.

Dacă în triunghiul $\Delta ABC$ considerăm, de exemplu, înălţimea construită din vârful $A$ pe latura $[BC]$ şi notăm cu $A'$ intersecţia ei cu $[BC]$, putem privi înălţimea ca segmentul $[AA']$ şi are sens să vorbim de lungimea ei.

Existenţa şi unicitatea perpendicularei dintr-un punct exterior unei drepte pe o dreaptă ne asigură că într-un triunghi există trei perpendiculare unice corespunzătoare fiecărui vârf al triunghiului.

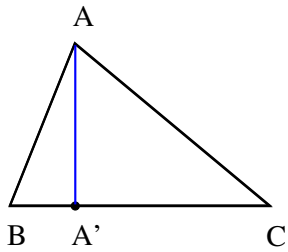


FIGURA 6. Înălţimea

## 1. Cazuri de congruenţă în triunghi

**Definiţia** 2.2. *Se consideră* $\Delta ABC$ *şi* $\Delta A'B'C'$ *două triunghiuri oarecare. Vom spune că cele două triunghiuri sunt* congruente *şi vom nota congruenţa prin*

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C',$$

*dacă au loc în acelaşi timp:*

$$[AB] \equiv [A'B'], [BC] \equiv [B'C'], [CA] \equiv [C'A'];$$

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'; \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'; \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'.$$

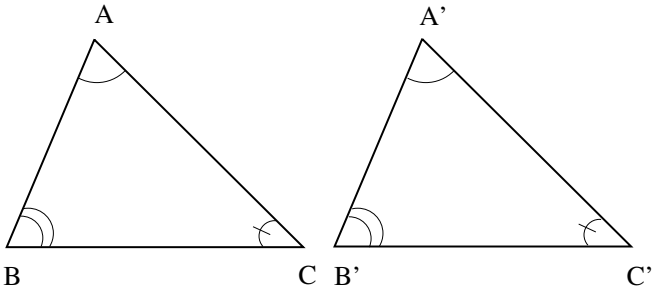


FIGURA 7. Congruenţa triunghiurilor

**Cazuri de congruenţă pentru două triunghiuri oarecare** $\Delta ABC$ şi $\Delta A'B'C'$

- Cazul 1: **LUL**

$$[AB] \equiv [A'B'], \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', [BC] \equiv [B'C']$$

- Cazul 2: **ULU**

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', [BC] \equiv [B'C'], \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

- Cazul 3: **LLL**

$$[AB] \equiv [A'B'], [BC] \equiv [B'C'], [AC] \equiv [A'C']$$

**Observaţia** 2.3. *Dintre cele trei cazuri de congruenţă menţionate anterior, cazul unu este "axioma de congruenţă L.U.L" iar celelalte două cazuri se deduc folosindu-se axioma de congruenţă. Demonstraţiile se pot găsi în* [7].

**Cazuri de congruenţă pentru două triunghiuri dreptunghice**
Fie triunghiurile $\Delta ABC$ şi $\Delta A'B'C'$,

$$m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle B'A'C') = 90^\circ.$$

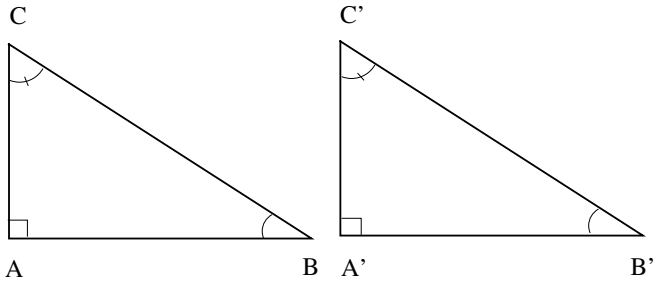



FIGURA 8. Congruenţa triunghiurilor dreptunghice

- Cazul 1: **CC** - Catete congruente

$$[AB] \equiv [A'B'], [AC] \equiv [A'C']$$

(provine din cazul LUL)

- Cazul 2: **CU** - Catetă şi unghiul alăturat ascuţit, congruente

$$[AC] \equiv [A'C'], \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

(provine din cazul ULU)

- Cazul 3: **IU** - Ipotenuza şi un unghi ascuţit, congruente

$$[BC] \equiv [B'C'], \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

- Cazul 4: **IC** - Ipotenuza şi o catetă, congruente

$$[BC] \equiv [B'C'], [AB] \equiv [A'B']$$

**Observaţia** 2.4. *În cazul triunghiurilor dreptunghice, cazurile trei şi patru reprezintă rezultate ce se demonstrează folosind primele două cazuri de congruenţă. Pentru demonstraţie a se vedea* [7].

## 2. Triunghi isoscel

*Construcţie:* Un triunghi isoscel se poate desena având la dispoziţie o riglă şi un compas.

Paşii urmaţi în realizarea construcţiei, sunt:

- se desenează un segment oarecare $[BC]$ care va fi baza triunghiului;
- se determină, prin măsurare cu ajutorul riglei, mijlocul segmentului;
- cu o deschidere a compasului, mai mare decât jumătatea lungimii segmentului $[BC]$, se trasează două arce de cerc, poziţionând compasul cu acul în $B$ şi apoi în $C$;
- cele două arce de cerc se vor intersecta în două puncte, notate, de exemplu cu $A$ şi $A'$. Dreapta determinată de punctele $A$ şi $A'$ va separa capetele segmentului $[BC]$;
- triunghiurile formate: $\Delta ABC$ şi $\Delta A'BC$ sunt ambele isoscele deoarece

$$[AB] \equiv [AC] \text{ şi } [A'B] \equiv [A'C]$$

(deschiderea compasului nemodificându-se)

În continuare vor fi reamintite o parte dintre proprietăţile importante ale triunghiurilor isoscele.

**Propoziţia** 2.5. *Într-un triunghi isoscel unghiurile opuse laturilor congruente sunt congruente. Reciproc, dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci laturile opuse unghiurilor congruente sunt congruente, adică triunghiul este isoscel.*

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$ " Dacă $\Delta ABC$ este isoscel, presupunem că $[AB] \equiv [AC]$. Fie $[AD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$. Rezultă egalitatea măsurilor unghiurilor $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle DAC)$. Atunci, se

obţine congruenţa triunghiurilor $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ (cazul L.U.L) ($[AB] \equiv [AC]$, $[AD] \equiv [AD]$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$.) Congruenţa triunghiurilor implică $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$.

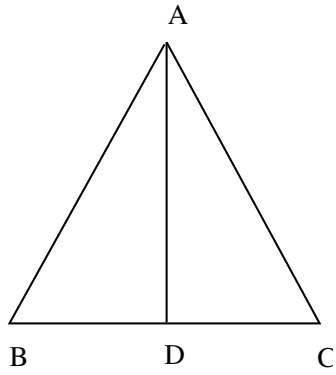



FIGURA 9. Triunghi isoscel

"$\Leftarrow$" Comparăm triunghiurile $\Delta ABC$ şi $\Delta ACB$ (acelaşi triunghi cu vârfurile citite în ordine diferită).

Avem $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$ (U.L.U) deoarece:
$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, $[BC] \equiv [CB]$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABC$.
Rezultă $AB = AC, AC = AB, \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CAB$.
Concluzia: $[AB] \equiv [AC]$.

O altă proprietate importantă a liniilor importante în triunghiul isoscel este că acestea coincid dacă pornesc din vârful comun laturilor congruente în triunghi.

**Propoziţia** 2.6. *Se consideră triunghiul isoscel $\Delta ABC$ ($[AB] \equiv [AC]$). Se construieşte semidreapta $[AD$, $D \in [BC]$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate.*

1) *Dacă $[AD]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, atunci este mediana laturii $[BC]$, înălţimea din vârful $A$ şi mediatoarea segmentului $[BC]$.*
2) *Dacă $[AD]$ este mediana laturii $[BC]$, atunci este înălţimea din vârful $A$, mediatoarea segmentului $[BC]$ şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.*

3) *Dacă* $[AD]$ *este mediatoarea laturii* $[BC]$*, atunci este înălţimea din vârful* $A$*, mediana segmentului* $[BC]$ *şi bisectoarea unghiului* $\sphericalangle BAC$*.*
4) *Dacă* $[AD]$ *este înălţimea din vârful* $A$*, atunci este mediatoarea segmentului* $[BC]$*, mediana laturii* $[BC]$ *şi bisectoarea unghiului* $\sphericalangle BAC$*.*

DEMONSTRAŢIE. Se foloseşte figura (9).

1) Deoarece $[AD]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, atunci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$. $\Delta BAD \equiv \Delta CAD$ (L.U.L) ($[AB] \equiv [AC]$, $[AD] \equiv [AD]$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$).

   Din congruenţa triunghiurilor rezultă, pe de o parte: $[BD] \equiv [DC]$ ce implică $[AD]$ mediană, dar şi congruenţa: $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$.

   Deoarece

$$m(\sphericalangle ADB) + m(\sphericalangle ADC) = 180^\circ,$$

   se obţine $AD \perp BC$, adică $[AD]$ înălţime. Cum $AD$ este perpendiculară pe $BC$ şi $D$ mijlocul segmentului $[BC]$, rezultă $[AD]$ mediatoare.
2) Se foloseşte congruenţa a triunghiurilor $\Delta BAD \equiv \Delta CAD$, unde $[AD]$ este mediana laturii $[BC]$. Raţionamentul este similar celui folosit la punctul anterior.
3) Se consideră $[AD]$ mediatoarea segmentului $[BC]$. Deoarece $D$ este mijlocul segmentului $[BC]$, $[AD]$ este mediană în triunghi. Conform punctului (2), $[AD]$ este şi înălţime în triunghi, deci $AD \perp BC$. Dacă mediatoarea ar fi diferită de înălţimea $[AD]$, ar însemna că în punctul $D$, pe latura $[BC]$, se pot construi două perpendiculare diferite. Fals! Aşadar, mediatoarea coincide cu mediana $[AD]$. Mai departe se aplică punctul (2).
4) Raţionament similar celui de la punctul (1).

### 3. Triunghi echilateral

*Construcţie:* Pentru a desena un triunghi echilateral este nevoie doar de o riglă şi un compas.

- se desenează un segment oarecare $[AB]$, numit bază a triunghiului;
- cu o deschidere a compasului egală cu lungimea segmentului $[AB]$, se trasează două arce de cerc, poziţionând compasul cu acul în $B$ şi apoi în $A$;
- notăm punctele de intersecţie ale celor două arce, de exemplu cu $C$ şi $C'$; Aceste puncte se vor afla de o parte şi alta a dreptei $AB$.
- deoarece deschiderea compasului a rămas aceeaşi pentru trasarea celor două cercuri, rezultă $AC = AB$ şi $BA = BC$. Astfel $AC = AB = BC$, ceea ce implică $\Delta ABC$ echilateral.

*Proprietăţi:*

**Propoziţia** 2.7. *Un triunghi este echilateral dacă şi numai dacă unghiurile sunt congruente.*

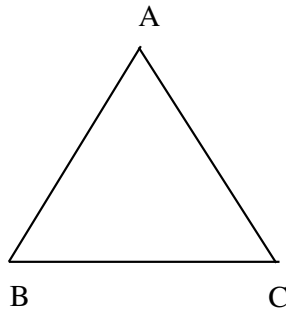


FIGURA 10. Triunghi echilateral

DEMONSTRAŢIE. Fie triunghiul $\Delta ABC$ echilateral. Dacă vom considera doar $[AB] \equiv [AC]$, atunci putem spune că $\Delta ABC$ este isoscel cu $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$. Dacă folosim $[CB] \equiv [AC]$, atunci putem spune că $\Delta ABC$ este isoscel cu $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$. Aşadar,

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C.$$

Reciproc, dacă toate unghiurile sunt congruente, vom considera, pe rând, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, de unde se obţin relaţiile: $[CB] \equiv [AC]$, $[AB] \equiv [AC]$.

**Observaţia** 2.8. *Se consideră un triunghi echilateral. Raportându-ne la fiecare vârf al triunghiului, acesta poate fi considerat de trei ori un triunghi isoscel. Conform propoziţiei (2.6), liniile importante în triunghiul isoscel, ce pornesc din vârful corespunzător laturilor congruente, coincid. Aşadar, într-un triunghi echilateral liniile importante coincid, indiferent de vârful triunghiului.*

### 4. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă

Se dau în plan două drepte distincte $a$ şi $b$ intersectate de o a treia dreaptă $c$. Dreapta $c$ se numeşte *secantă* sau *transversală*.

$a \cap c = \{M\}; b \cap c = \{N\}$

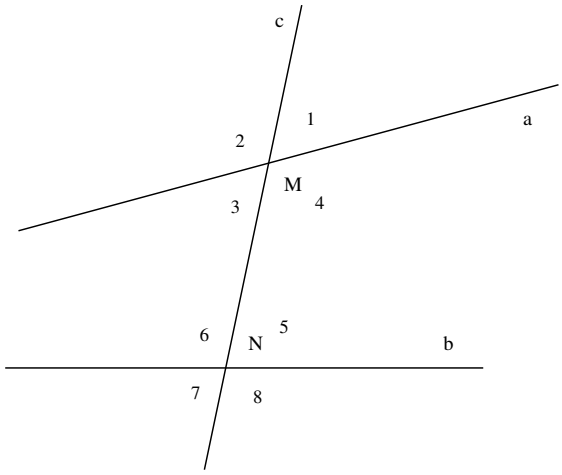



FIGURA 11. Secanta

În jurul punctelor de intersecţie $M$ şi $N$ se formează opt unghiuri numerotate în desen cu: $\sphericalangle M_1$, $\sphericalangle M_2$, $\sphericalangle M_3$, $\sphericalangle M_4$ şi $\sphericalangle N_5$, $\sphericalangle N_6$, $\sphericalangle N_7$, $\sphericalangle N_8$ (vezi figura (11)).

Aceste unghiuri sunt numite astfel:

- unghiuri *alterne* dacă unghiurile se găsesc de o parte şi de alta a secantei $c$;
- unghiuri *de aceeaşi parte a secantei* dacă se găsesc de aceeaşi parte a secantei $c$;

- unghiuri *interne* dacă unghiurile se găsesc la intersecţia semiplanelor $[aN$ şi $[bM$;
- unghiuri *externe* dacă se găsesc în afara intersecţiei semiplanelor $[aN$ şi $[bM$;

Astfel, în figura (11) avem unghiuri:

- alterne interne: $\sphericalangle M_3$, $\sphericalangle N_5$ şi $\sphericalangle M_4$, $\sphericalangle N_6$;
- alterne externe: $\sphericalangle M_1$, $\sphericalangle N_7$ şi $\sphericalangle M_2$, $\sphericalangle N_8$;
- interne şi de aceeasi parte a secantei: $\sphericalangle M_4$, $\sphericalangle N_5$ şi $\sphericalangle M_3$, $\sphericalangle N_6$;
- externe şi de aceeasi parte a secantei: $\sphericalangle M_1$, $\sphericalangle N_8$ şi $\sphericalangle M_2$, $\sphericalangle N_7$;
- unghiuri corespondente: $\sphericalangle M_1$, $\sphericalangle N_5$ şi $\sphericalangle M_2$, $\sphericalangle N_6$ şi $\sphericalangle M_3$, $\sphericalangle N_7$ şi $\sphericalangle M_4$, $\sphericalangle N_8$.

**Definiţia** 2.9. *Se consideră dreptele distincte $d_1$ şi $d_2$ conţinute în acelaşi plan. Se spune că dreptele sunt* paralele *dacă nu au niciun punct comun.*

Notaţie: $d_1 \parallel d_2$.

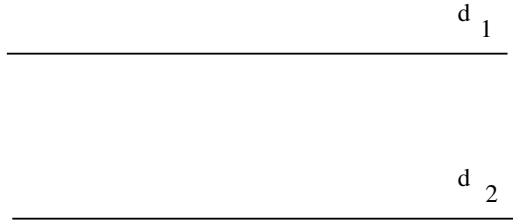



FIGURA 12. Drepte paralele

Cu ajutorul tipurilor de unghiuri formate de două drepte cu o secantă se obţine caracterizarea dreptelor paralele.

**Teorema** 2.10 ("Teorema de existenţă a dreptelor paralele"). *Fie dreptele distincte $d_1$ şi $d_2$. Dacă o secantă $d$ care le intersectează formează cu acestea o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.*

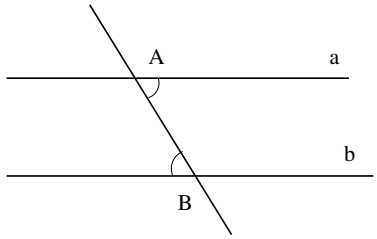



FIGURA 13. Teorema de existenţă a dreptelor paralele

DEMONSTRAŢIE. Fie $d \cap d_1 = \{A\}$, $d \cap d_2 = \{B\}$. Vom nota cu $(Ax$, respectiv $(By$ semidreptele delimitate pe punctele $A$, respectiv $B$ pe cele două drepte, situate de o parte şi alta a dreptei $AB$.

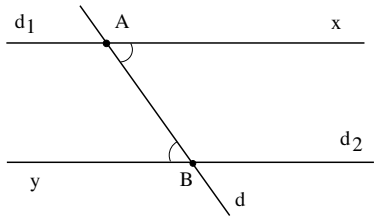



FIGURA 14. Existenţa dreptelor paralele

Presupunem prin absurd că $Ax \nparallel By$.

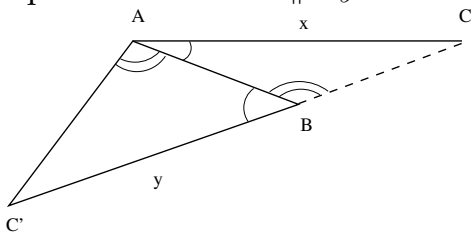



FIGURA 15. Existenţa dreptelor paralele

Atunci dreptele au un punct comun, $Ax \cap By = \{C\}$. Presupunem că $C \in (Ax$. Se consideră $C' \in (By$, aşa încât $[BC'] \equiv [AC]$. Rezultă $\Delta ABC' \equiv \Delta BAC$ (L.U.L) ($[AB]$ latură comună, $[BC'] \equiv [AC]$, $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ABC'$). Din congruenţă se obţine $\sphericalangle BAC' \equiv \sphericalangle ABC$ (se opun laturilor congruente). Se ştie că $m(\sphericalangle ABC') + m(\sphericalangle ABC) = 180°$.

Aşadar, obţinem $m(\sphericalangle C'AB) + m(\sphericalangle BAC) = 180^\circ$, de unde rezultă că $[AC$ şi $[AC'$ sunt opuse.

Cu alte cuvinte, prin punctele distincte $C$ şi $C'$ trec două drepte diferite $Ax$ şi $By$ (una care trece prin B şi una care trece prin A). Fals! Contrazice "Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă".

**Consecinţe ale teoremei de existenţă a dreptelor paralele**

1) Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele.
2) Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele.
3) Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri interne şi de aceeaşi parte a secantei, suplementare, atunci dreptele sunt paralele.
4) Dacă două drepte intersectate de o secantă formează o pereche de unghiuri externe şi de aceeaşi parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.
5) Două drepte distincte perpendiculare pe o a treia sunt paralele.

*"Axioma paralelelor":* "Printr-un punct dat, exterior unei drepte date, există o singură paralelă la dreapta dată."

**Consecinţe ale axiomei paralelelor:**

1) Două drepte paralele cu o a treia sunt paralele între ele.

   Într-adevăr, presupunem că avem trei drepte distincte $d_1$, $d_2$, $d_3$ cu $d_1 \parallel d_3$, respectiv $d_2 \parallel d_3$ şi $d_1 \cap d_2 = \{A\}$. Atunci există punctul $A \notin d_3$, prin care se duc două paralele distincte la $d_3$. Contrazice axioma paralelelor. Rămâne că $d_1 \parallel d_2$.
2) Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice dreaptă care se intersectează cu una din ele se va intersecta şi cu cealaltă.

   Într-adevăr, presupunem că avem trei drepte $d_1$, $d_2$, $d_3$ cu $d_1 \parallel d_2$, $d_3 \cap d_1 = \{A\}$ şi $d_3 \cap d_2 = \emptyset$, atunci ar însemna că

$d_3 \parallel d_2$ şi prin punctul $A$, exterior dreptei $d_2$, se duc două paralele distincte $d_1$ şi $d_3$, la $d_2$, ce trec prin punctul $A$. Fals! Contrazice axioma paralelelor.

**Teorema** 2.11. (Reciproca "teoremei de existenţă a dreptelor paralele") *Se consideră două drepte paralele $d_1$ şi $d_2$ şi o secantă $d$. Unghiurile alterne interne pe care dreptele le formează cu secanta sunt congruente două câte două.*

DEMONSTRAŢIE. Se consideră dreptele $d_1 \parallel d_2$, intersectate de secanta $d$, $d \cap d_1 = \{A\}$, $d \cap d_2 = \{B\}$.

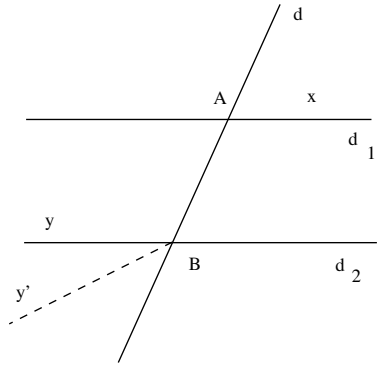



FIGURA 16. Reciproca teoremei de existenţă a dreptelor paralele

Fie semidreptele $(Ax$ şi $(By$ situate pe dreptele $d_1$, respectiv $d_2$, care se află de o parte şi alta a dreptei $AB$.

Presupunem prin absurd $m(\sphericalangle yBA) \neq m(\sphericalangle xAB)$. Rezultă că există o semidreaptă $(By'$ de aceeaşi parte a dreptei $AB$ ca semidreapta $(By$ astfel încât

$$\sphericalangle y'BA \equiv \sphericalangle xAB.$$

Conform teoremei directe, $[By' \parallel [Ax$. Deducem că, prin $B \notin d_1$ trec două paralele, $[By'$ şi $[By$, la dreapta $d_1$. Fals! Se contrazice "Axioma paralelelor".

**Consecinţe ale teoremei reciproce a dreptelor paralele**

1) Dacă două drepte paralele sunt intersectate de o a treia dreaptă, atunci unghiurile alterne externe care se formează sunt congruente două câte două.

2) Dacă două drepte paralele sunt intersectate de o a treia dreaptă, atunci unghiurile corespondente care se formează sunt congruente două câte două.
3) Dacă două drepte paralele sunt intersectate de o a treia dreaptă, atunci unghiurile interne şi de aceeaşi parte a secantei care se formează sunt suplementare.
4) Dacă două drepte paralele sunt intersectate de o a treia dreaptă, atunci unghiurile externe şi de aceeaşi parte a secantei care se formează sunt suplementare.

**Teorema** 2.12 ("Teorema paralelelor echidistante"). *Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe oricare secantă segmente congruente*

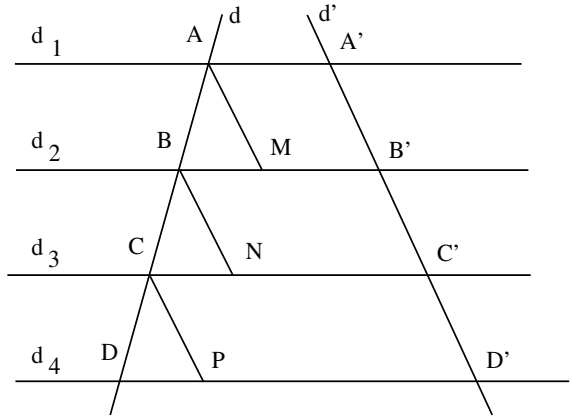



FIGURA 17. Paralele echidistante

DEMONSTRAŢIE. Fără a restrânge generalitatea, demonstraţia poate fi făcută doar pentru patru drepte paralele.

Dacă dreptele paralele $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ determină pe secanta $d$ segmentete congruente $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, unde

$$d_1 \cap d = \{A\}, d_2 \cap d = \{B\},$$

$$d_3 \cap d = \{C\}, d_4 \cap d = \{D\},$$

atunci determină pe orice secantă segmente congruente.

Considerăm secanta $d'$ care intersectează dreptele paralele $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ în $A'$, $B'$, $C'$, $D'$.

Demonstrăm că $[A'B'] \equiv [B'C'] \equiv [C'D']$.

Considerăm punctele $M$, $N$, $P$ aşa încât:

$AM \parallel d'$, $M \in d_2$, $BN \parallel d'$, $N \in d_3$, $CP \parallel d'$, $P \in d_4$. Atunci $AM \parallel BN \parallel CP$.

Din $AM \parallel BN$ şi secanta $d$ rezultă:

$\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CBN$.

Din $d_2 \parallel d_3$ şi secanta $d$ rezultă:

$\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle BCN$.

Folosind şi $[AB] \equiv [BC]$, se obţine congruenţa triunghiurilor $\Delta ABM \equiv \Delta NBC$ (U.L.U) din care rezultă $[AM] \equiv [BN]$.

Analog, congruenţa $\Delta BCN \equiv \Delta CDP$ implică $[BN] \equiv [CP]$.

Aşadar, am demonstrat că $[AM] \equiv [BN] \equiv [CP]$.

Vrem să arătăm că $[AM] \equiv [A'B']$. Se consideră triunghiurile $\Delta AMA'$ şi $\Delta MA'B'$. Considerând $AA' \parallel MB'$ şi secanta $MA'$, rezultă unghiurile alterne interne congruente:

$\sphericalangle AA'M \equiv \sphericalangle A'MB'$.

Din $AM \parallel d'$ şi secanta $MA'$ rezultă unghiurile alterne interne congruente:

$\sphericalangle AMA' \equiv \sphericalangle MA'B'$.

Aşadar, conform cazului de congruenţă (U.L.U),

$\Delta AMA' \equiv \Delta MA'B' \Rightarrow [AM] \equiv [A'B']$. (Altfel, această congruenţă rezultă din faptul că $AA'B'M$ este paralelogram)

În mod analog, se arată că

$$\Delta BNB' \equiv \Delta NB'C' \text{ şi } \Delta CPC' \equiv \Delta PC'D',$$

de unde se obţin congruenţele:

$[BN] \equiv [B'C']$, $[CP] \equiv [C'D']$

Astfel, $[AM] \equiv [BN] \equiv [CP]$ implică $[A'B'] \equiv [B'C'] \equiv [C'D']$.

Cu ajutorul teoremelor de caracterizare a dreptelor paralele se poate demonstra următorul rezultat.

**Teorema** 2.13. *Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de* $180^0$.

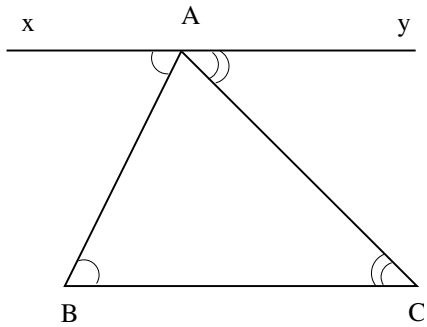


FIGURA 18. Suma unghiurilor unui triunghi

DEMONSTRAŢIE. Se construieşte prin vârful $A$ al triunghiului $\Delta ABC$ o dreaptă $d$ paralelă cu $BC$. Se notează cu $(Ax$, respectiv $(Ay$ cele două semidrepte delimitate de punctul $A$ pe dreapta $d$. Conform teoremei (2.11), se obţin unghiurile congruente:

$$\sphericalangle xAB \equiv \sphericalangle ABC \text{ şi } \sphericalangle yAC \equiv \sphericalangle ACB.$$

Deoarece $m(\sphericalangle xAB) + m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle yAC) = 180°$, rezultă concluzia teoremei.

**Observaţia** 2.14.
1) *În triunghiul echilateral măsura fiecărui unghi este de* $60°$.
2) *Într-un triunghi dreptunghic* $\Delta ABC$ *(*$m(\sphericalangle A) = 90°$*), unghiurile* $\sphericalangle B$ *şi* $\sphericalangle C$ *sunt complementare şi ambele sunt unghiuri ascuţite. Unghiurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghic isoscel au măsura de* $45°$.
3) *Într-un triunghi isoscel, unghiurile de la bază sunt ascuţite.*
4) *Un triunghi isoscel, în care măsura unuia dintre unghiuri este de* $60°$*, este triunghi echilateral.*

## 5. Linia mijlocie în triunghi

**Definiţia** 2.15. *Într-un triunghi, segmentul ale cărui extremităţi sunt mijloacele a două laturi se numeşte* linie mijlocie.

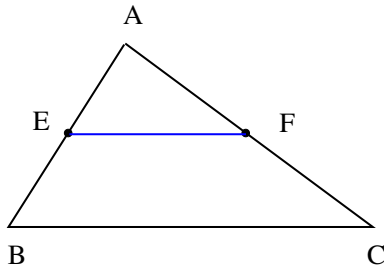


FIGURA 19. Linia mijlocie

**Teorema** 2.16. *Linia mijlocie într-un triunghi este paralelă cu cea de-a treia latură şi are ca lungime jumătate din lungimea acesteia.*

DEMONSTRAŢIE. Fie triunghiul $\Delta ABC$, $D$ mijlocul laturii $[AB]$ şi $E$ mijlocul laturii $[AC]$.

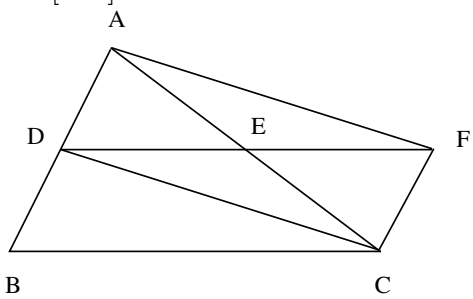


FIGURA 20. Linia mijlocie

Alegem pe semidreapta $[DE$ un punct $F$, astfel încât $E$ se află între $D$ şi $F$ şi $[EF] \equiv [DE]$.

Triunghiurile $\Delta ADE$ şi $\Delta ECF$ sunt congruente, caz de congruenţă (L.U.L) ($[AE] \equiv [EC]$, $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle FEC$, $[ED] \equiv [EF]$) şi rezultă: $[FC] \equiv [AD]$ şi $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle ECF$. Congruenţa unghiurilor implică $AD \parallel FC$.

Deoarece $[DB] \equiv [FC]$, $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle DCF$ ($AD \parallel FC$, $DC$ secantă), $[DC]$ comună, rezultă congruenţa $\Delta DBC \equiv \Delta DCF$. Din această congruenţă se obţine $\sphericalangle DCB \equiv \sphericalangle CDF$, ceea ce implică

$BC \parallel DF$. Tot din congruenţa ultimelor triunghiuri rezultă şi relaţia $[BC] \equiv [DF] \Rightarrow DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$.

**Observaţia** 2.17. *Dacă în triunghiul $\Delta ABC$ se consideră $D$ mijlocul laturii $[AB]$ şi $DE \parallel BC$, $E \in [AC]$, atunci $E$ este mijlocul laturii $[AC]$.*

Într-adevăr, dacă presupunem prin absurd că $E$ nu este mijlocul laturii $[AC]$, atunci fie acesta $F$. Rezultă că $[DF]$ este linie mijlocie, deci $DF \parallel BC$. Dar şi $DE \parallel BC$. Fals! Rămâne că $E = F$.

### 6. Proprietăţi ale dreptelor importante în triunghi

Se consideră triunghiul oarecare $\Delta ABC$.

Mediatoarea unui segment are următoarea proprietate:

**Teorema** 2.18. *Un punct $M$ se găseşte pe mediatoarea unui segment $[AB]$ dacă şi numai dacă distanţele de la el la capetele segmentului sunt egale, adică $[MA] \equiv [MB]$.*

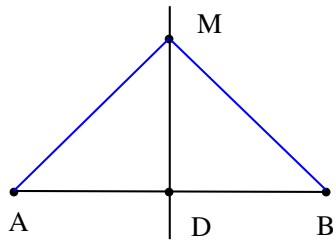



FIGURA 21. Proprietate a punctelor mediatoarei

DEMONSTRAŢIE. Se consideră $D$ mijlocul segmentului $[AB]$ şi se alege un punct $M$ pe mediatoarea segmentului. Deoarece mediatoarea este perpendiculară pe segment în punctul $D$, triunghiurile formate, $\Delta MAD$ şi $\Delta MDB$ sunt dreptunghice. Cele două triunghiuri au $[AD] \equiv [DB]$ şi $[MD]$ latură comună. Conform cazului de congruenţă (C.C), cele două triunghiuri sunt congruente. Din congruenţa lor rezultă $[MA] \equiv [MB]$.

Reciproc, se consideră $D$ mijlocul segmentului $[AB]$ şi $M \neq D$, $M \notin [AB]$, cu proprietatea că $[MA] \equiv [MB]$. Se formează triunghiurile $\Delta MAD$ şi $\Delta MDB$. Cele două triunghiuri au $[AD] \equiv [DB]$,

$[MA] \equiv [MB]$, $[MD]$ comună. Conform cazului de congruenţă (L.L.L), cele două triunghiuri sunt congruente şi din congruenţă rezultă $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle MDB$. Cum, în plus, aceste unghiuri sunt suplementare (suma măsurilor lor este de $180°$) rezultă că ele sunt drepte. Aşadar, dreapta $MD$ este perpendiculară pe segmentul $[AB]$ în mijlocul acestuia, deci este mediatoarea segmentului.

**Observaţia** 2.19. *Se mai spune că mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de capetele segmentului.*

**Teorema** 2.20. *Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.*

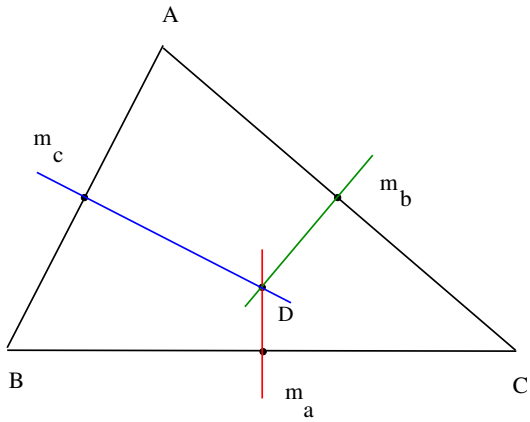



FIGURA 22. Intersecţia mediatoarelor

DEMONSTRAŢIE. Se consideră triunghiul $\Delta ABC$. Se notează cu $m_a$, $m_b$, $m_c$ mediatoarele corespunzătoare laturilor $[BC]$, $[AC]$, respectiv $[AB]$.

Vom demonstra pentru început că oricare două mediatoare sunt concurente. Să alegem, de exemplu, mediatoarele $m_a$ şi $m_b$.

Presupunem prin absurd că $m_a \cap m_b = \emptyset \Rightarrow m_a \parallel m_b$.

Deoarece $m_a \perp BC$ şi $m_a \parallel m_b$, rezultă $m_b \perp BC$. In plus, deoarece $m_b$ este mediatoarea segmentului $[AC]$, $m_b \perp AC$. Conform relaţiilor $m_b \perp BC$ şi $m_b \perp AC$ ar însemna că prin punctul $C$ să se

construiască două perpendiculare distincte pe $m_b$. FALS. Aşadar, $m_a \cap m_b \neq \emptyset$.

Rămâne de demonstrat că $m_a \cap m_b \cap m_c \neq \emptyset$. Fie $D$ punctul de intersecţie al mediatoarelor $m_a$ şi $m_b$.

$$\left.\begin{array}{rcl} D \in m_a & \Rightarrow & [DB] \equiv [DC] \\ D \in m_b & \Rightarrow & [DC] \equiv [DA] \end{array}\right\} \Rightarrow [DB] \equiv [DA] \Rightarrow D \in m_c.$$

Conform teoremei 2.18, cele trei mediatoare sunt concurente.

**Observaţia** 2.21. *Punctul de concurenţă al mediatoarelor este* **centrul cercului circumscris triunghiului** *(a se vedea în capitolul Cerc). Este un punct interior triunghiului dacă triunghiul este ascuţit unghic, este un punct situat pe cea mai mare dintre laturile lui dacă triunghiul este dreptunghic şi exterior triunghiului dacă este un triunghi obtuzunghic.*

Un alt loc geometric este bisectoarea unui unghi. În continuare, vor fi demonstrate două teoreme de caracterizare a bisectoarei unui unghi.

**Teorema** 2.22. *Se consideră în plan un unghi propriu $\sphericalangle ABC$ şi $[BO$ o semidreaptă interioară unghiului. Atunci $[BO$ este bisectoarea unghiului dacă şi numai dacă orice punct al semidreptei este egal depărtat de laturile unghiului.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă $[BO$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, atunci $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle OBC$.

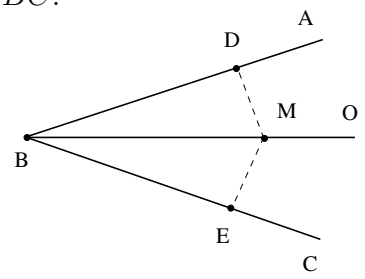



FIGURA 23. Proprietate a punctelor bisectoarei

Se consideră un punct oarecare $M$ pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ şi din el se construiesc perpendicularele $[MD]$ şi $[ME]$ pe laturile unghiului, $D \in [BA$, $E \in [BC$.

Se obţin două triunghiuri dreptunghice, $\Delta MDB$ şi $\Delta MEB$. Aceste două triunghiuri au latura $[BM]$ comună şi $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle OBC$. Conform cazului de congruenţă (I.U), cele două triunghiuri sunt congruente.

Din această congruenţă rezultă

$$[DM] \equiv [ME].$$

Reciproc, dacă se consideră semidreapta $[BO$ interioară unghiului $\sphericalangle ABC$ şi un punct $M$ pe această semidreaptă, se construiesc perpendicularele $[MD]$ şi $[ME]$ din $M$ pe laturile unghiului. Din ipoteză, se ştie că $[DM] \equiv [ME]$. Cele două triunghiuri formate, $\Delta MDB$ şi $\Delta MEB$ sunt triunghiuri dreptunghice, congruente conform cazului (C.I) ($[BM]$ comună, $[DM] \equiv [ME]$).

Din congruenţa triunghiurilor, rezultă congruenţa unghiurilor $\sphericalangle DBM \equiv \sphericalangle MBE$, adică $[BM$ este bisectoare.

**Teorema** 2.23. *Într-un triunghi, bisectoarele sunt drepte concurente.*

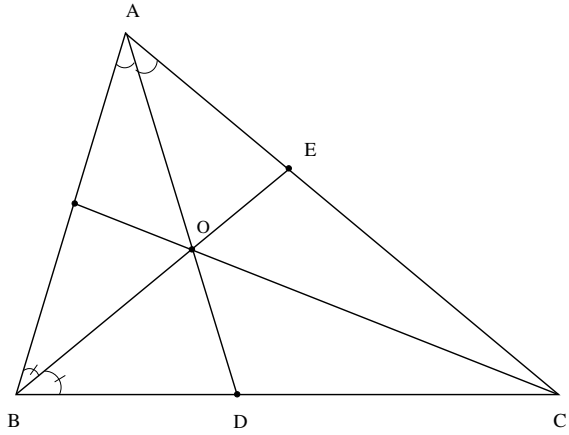



FIGURA 24. Intersecţia bisectoarelor

DEMONSTRAŢIE. Se consideră triunghiul $\Delta ABC$ şi bisectoarele $[AD](D \in BC)$ şi $[BE](E \in AC)$ ale unghiurilor $\sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle ABC$, respectiv. Cele două bisectoare se intersectează în punctul $O$. Deoarece $O$ este punct al bisectoarei $[AD]$, rezultă că distanţele de la el la laturile unghiului sunt egale,

$$d(O, AB) = d(O, AC).$$

Analog, cum $O$ se află şi pe bisectoarea $[BE]$,

$$d(O, AB) = d(O, BC).$$

Aşadar, $d(O, BC) = d(O, AB) = d(O, AC)$, adică $O$ aparţine şi bisectoarei unghiului $\sphericalangle ACB$.

**Observaţia** 2.24. *Punctul de intersecţie al bisectoarelor interioare ale unghiurilor unui triunghi este* **centrul cercului înscris** *în triunghi şi este un punct interior triunghiului.*

**Definiţia** 2.25. *Unghiul care este adiacent şi suplementar cu un unghi al unui triunghi se numeşte* unghi exterior *acelui triunghi.*

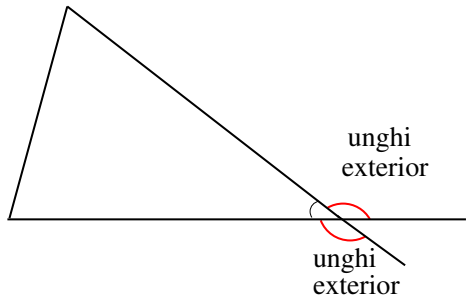


FIGURA 25. Unghi exterior

**Exemplul** 2.26. *Se consideră triunghiul $\Delta ABC$. În vârful $C$ al triunghiului, avem, de exemplu, unghiul exterior $\sphericalangle ACD$, unde $D \in BC$, $C$ se află între $B$ şi $D$.*

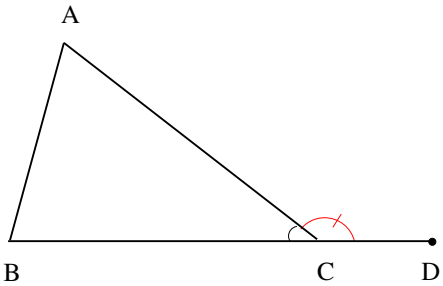


FIGURA 26. Exemplu de unghi exterior

**Definiţia** 2.27. *Bisectoarea unui unghi exterior al unui triunghi se numeşte* bisectoare exterioară *a triunghiului corespunzătoare unghiului respectiv.*

**Propoziţia** 2.28. *În triunghiul $\Delta ABC$, bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle ABC$ şi bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle ABD$ sunt perpendiculare.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $[BE]$, $E \in [AC]$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, respectiv $[BF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABD$, $D \in BC$, $B$ între $D$ şi $C$. Atunci,

$$180^\circ = m(\sphericalangle DBA) + m(\sphericalangle ABC) =$$
$$= 2m(\sphericalangle FBA) + 2m(\sphericalangle ABE).$$

Rezultă $m(\sphericalangle FBE) = 90^\circ$.

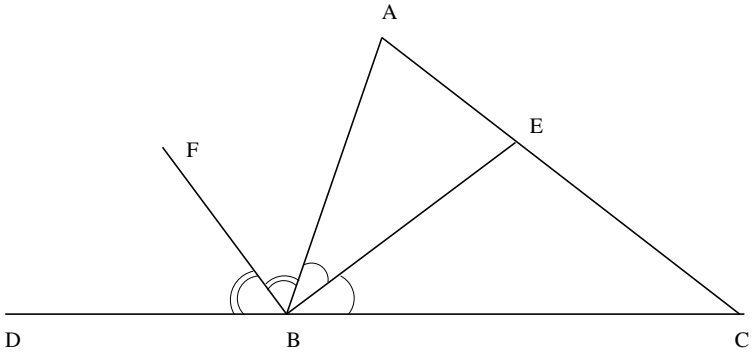


FIGURA 27. Perpendicularitatea bisectoarelor

Un triunghi are trei mediane, concurente în acelaşi punct numit **centrul de greutate** al triunghiului. Centrul de greutate este un punct interior triunghiului.

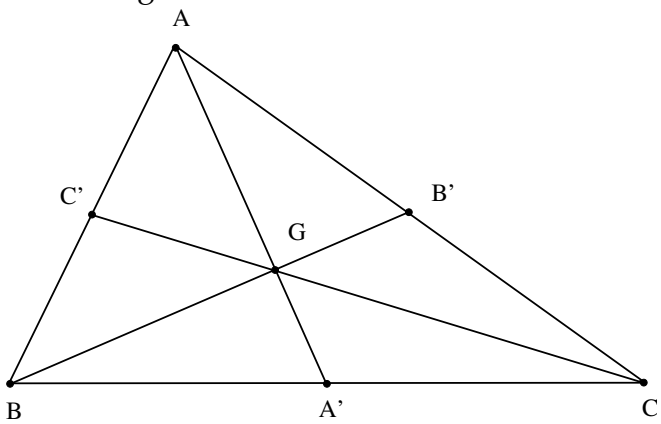



FIGURA 28. Centrul de greutate

**Propoziţia** 2.29. *Într-un triunghi medianele sunt concurente. Segmentele determinate de centrul de greutate şi mijlocul fiecărei laturi a triunghiului au lungimea egală cu o treime din lungimea medianei.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $\{G\} = AA' \cap BB'$.

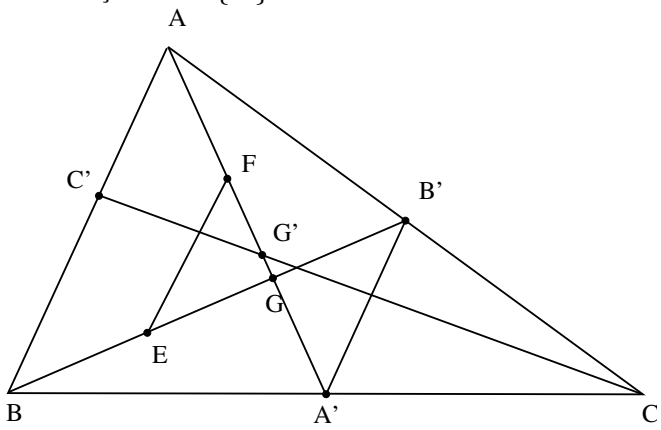



FIGURA 29. Concurenţa medianelor

Deoarece punctele $A'$ şi $B'$ sunt mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[AC]$, $[A'B']$ este linie mijlocie în triunghiul $\Delta ABC$, deci

$$A'B' \parallel AB, A'B' = \frac{1}{2}AB. \tag{1}$$

Se consideră $E$ şi $F$ mijloacele segmentelor $[GB]$ şi $[GA]$, respectiv. În triunghiul $\Delta AGB$, $[EF]$ este linie mijlocie, deci

$$EF \parallel AB, EF = \frac{1}{2}AB. \tag{2}$$

Folosind paralelismul dreptelor din relaţiile (1) şi (2), rezultă

$$\begin{array}{l} \sphericalangle EFG \equiv \sphericalangle GA'B' \\ \sphericalangle FEG \equiv \sphericalangle GB'A' \end{array} \tag{3}$$

Din (1), (2), (3) rezultă că $\Delta GA'B' \equiv \Delta GFE$ (cazul de congruenţă U.L.U).

Din congruenţa triunghiurilor se obţine:

$$[GA'] \equiv [GF], [GE] \equiv [GB']$$

şi

$$GA' = \frac{1}{3}AA', GB' = \frac{1}{3}BB'.$$

Presupunem că $\{G'\} = CC' \cap AA'$. Cu un raţionament analog, se demonstrează că:

$$G'A' = \frac{1}{3}AA', G'C' = \frac{1}{3}CC'.$$

Deoarece $GA' = \frac{1}{3}AA'$ şi $G'A' = \frac{1}{3}AA'$, rezultă că $G$ şi $G'$ coincid.

Un triunghi are trei înălţimi, concurente în acelaşi punct numit **ortocentrul** triunghiului.

**Propoziţia** 2.30. *Se consideră triunghiul $\Delta ABC$ şi cele trei înălţimi $AE$, $BF$, $CP$, unde punctele $E \in BC$, $F \in AC$, $P \in AB$. Atunci dreptele $AE$, $BF$, $CP$ sunt concurente.*

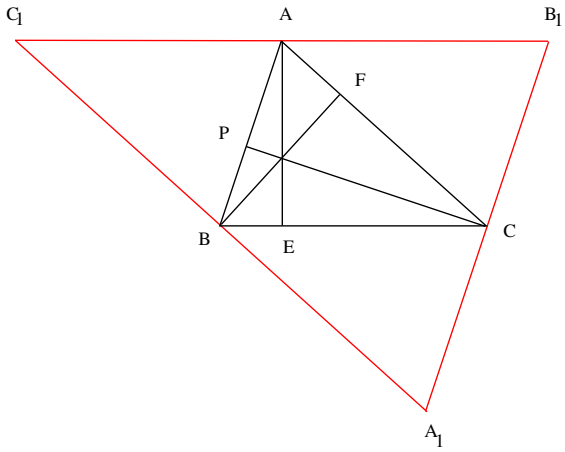



FIGURA 30. Intersecţia înălţimilor

DEMONSTRAŢIE. Prin vârfurile triunghiului se construiesc paralele la laturile acestuia. Paralela prin $A$ la $BC$ se intersectează cu paralela prin $C$ la $AB$ în punctul $B_1$ şi cu paralela prin $B$ la $AC$ în punctul $C_1$. Paralela prin $B$ la $AC$ se intersectează cu paralela prin $C$ la $AB$ în punctul $A_1$.

Paralelele $C_1B_1$ şi $BC$ tăiate de secanta $AB$ formează două perechi de unghiuri alterne interne congruente $\sphericalangle C_1AB \equiv \sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle C_1BA \equiv \sphericalangle BAC$. Rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta AC_1B$ (caz de congruenţă U.L.U). Din congruenţa triunghiurilor se obţine $[AC_1] \equiv [BC]$.

Paralelele $C_1B_1$ şi $BC$ tăiate de secanta $AC$ formează alte două perechi de unghiuri alterne interne congruente $\sphericalangle B_1AC \equiv \sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle B_1CA \equiv \sphericalangle BAC$. Rezultă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB_1$ (caz de congruenţă U.L.U). Din congruenţa triunghiurilor se obţine $[AB_1] \equiv [BC]$.

Din $[AC_1] \equiv [BC]$ şi $[AB_1] \equiv [BC]$ rezultă că punctul $A$ este mijlocul segmentului $[B_1C_1]$.

În mod analog se demonstrează că $B$ este mijlocul segmentului $[C_1A_1]$ iar $C$ este mijlocul segmentului $[A_1B_1]$.

Deoarece $AE \perp BC$, $BC \parallel B_1C_1$, se obţine perpendicularitatea dreptelor $AE \perp B_1C_1$. Cum $A$ este în plus şi mijlocul segmentului $[B_1C_1]$, rezultă că $AE$ este mediatoarea segmentului $[C_1B_1]$.

Analog, se demonstrează că $BF$ este mediatoarea segmentului $[A_1C_1]$ şi $CP$ este mediatoarea segmentului $[A_1B_1]$. Deoarece mediatoarele într-un triunghi sunt concurente, în acest caz fiind vorba de triunghiul
$\Delta A_1B_1C_1$, se obţine concurenţa înălţimilor $AE$, $BF$, $CP$ ale triunghiului $\Delta ABC$.

**Observaţia** 2.31. *Ortocentrul este un punct interior triunghiului dacă triunghiul este ascuţitunghic, coincide chiar cu vârful unghiului drept dacă este un triunghi dreptunghic şi este un punct exterior triunghiului dacă este un triunghi obtuzunghic.*

## 7. Asemănarea triunghiurilor

Când vom vorbi de segmente proporţionale vom întelege proporţionalitatea lungimilor lor, iar când vom vorbi de raportul a două segmente vom întelege raportul lungimilor lor.

**Teorema** 2.32 (Thales). *Se consideră $\Delta ABC$ şi punctele $D \in AB$ şi $E \in AC$, distincte şi diferite de $A$. Punctele $D$ şi $E$ se aleg astfel încât să se afle amândouă fie pe laturile unghiului $\sphericalangle BAC$, fie pe prelungirile acestora. Atunci*

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \tag{4}$$

*dacă şi numai dacă $DE||BC$.*

**Observaţia** 2.33. *Folosind proprietăţile rapoartelor proporţionale, egalitatea (4) se poate scrie echivalent:*

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ sau } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}. \tag{5}$$

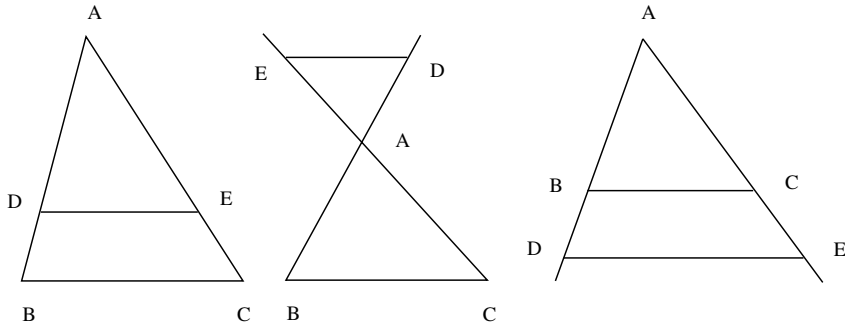


FIGURA 31. Thales

DEMONSTRAŢIE. **Caz 1**: $D \in (AB), E \in (AC)$.
" $\Rightarrow$ "

1a) Se consideră $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă: $\dfrac{AD}{a} = \dfrac{AB}{b} = k$, $k > 0$. Atunci, lungimile $AD$ şi $AB$ se pot exprima prin $AD = ka$ şi $AB = kb$. Se consideră pe segmentul $(AB)$, $b$ puncte distincte notate $B_i$, $\forall i = \overline{1, b}$, cu proprietatea:

$$AB_1 = k, AB_2 = 2k, \ldots, AB_{b-1} = (b-1)k \text{ şi } B = B_b.$$

Deoarece $AD = ka$, rezultă că punctul $D$ coincide cu punctul $B_a$ iar $a < b$.

Se construiesc prin punctele $B_i$, $\forall i = \overline{1, b-1}$, paralele la latura $[BC]$ care vor intersecta segmentul $(AC)$ în punctele $C_i$, $\forall i = \overline{1, b-1}$. Deoarece $D = B_a$, rezultă $E = C_a$.

Conform Teoremei (2.12),

$$[AC_1] \equiv [C_1C_2] \equiv [C_2C_3] \equiv \cdots \equiv [C_{b-1}C].$$

Deoarece $AE = aAC_1$, $AC = bAC_1$, se obţine $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{a}{b}$, adică $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB}$.

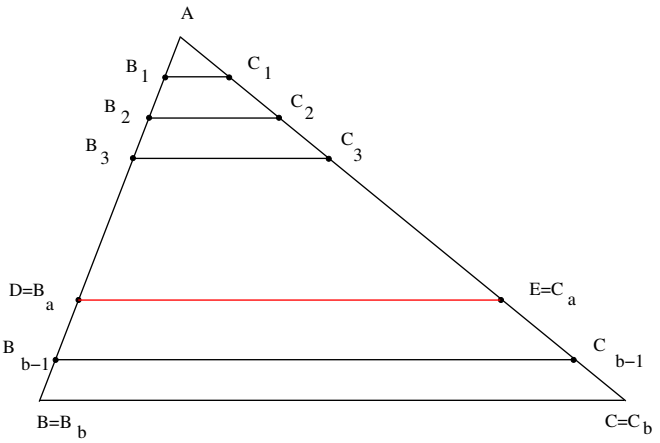



FIGURA 32. Thales-caz (1a)

1b) Se consideră $\frac{AD}{AB} = m \notin \mathbb{Q}$ şi presupunem că $\frac{AE}{AC} = n$, cu $m \neq n$.

Deoarece $E \in (AC)$, $AE < AC \Rightarrow n < 1$. Cum $m \neq n$, există un punct $F \in (AC)$, $F$ diferit de $E$, astfel încât $\frac{AF}{AC} = m$.

Distingem două situaţii pentru valorile diferite $m$ şi $n$:

i) $m < n \Rightarrow AF < AE$.

Există un număr natural $p$, nenul, astfel încât inegalitatea $AC < pFE$ este adevărată. Notăm $k = \frac{AC}{p}$.

Se împarte segmentul $(AC)$ în $p$ segmente de lungime $k$, alegând punctele $N_i$, $i = \overline{1, n-1}$ pe $(AC)$, cu proprietatea:

$AN_1 = k$, $AN_2 = 2k$, $\ldots$, $AN_{p-1} = (p-1)k$, $AC = pk$.

Deoarece lungimea segmentului $[FE]$ este mai mare decât $k$, atunci există cel puţin un punct $N_j \in (FE)$.

$AN_j = jk > AF \Rightarrow \frac{AN_j}{AC} > \frac{AF}{AC} \Rightarrow \frac{j}{p} > m$.

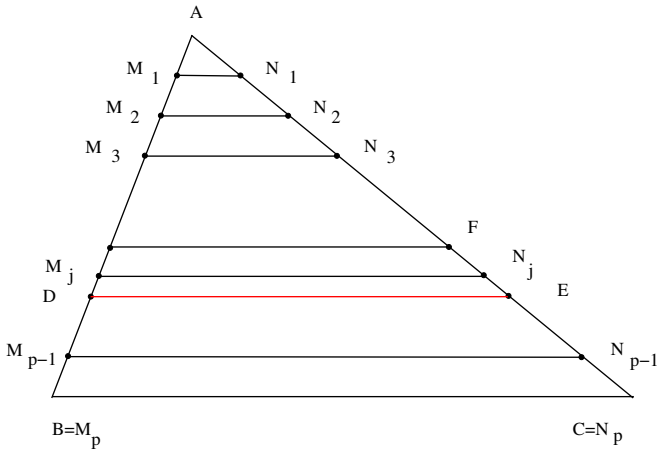



FIGURA 33. Thales-caz (1b)

Se construieşte o paralelă la $BC$, prin punctul $N_j$, care intersectează $AB$ în punctul $M_j$. Conform cazului (1a), se obţine

$$\frac{AM_j}{AB} = \frac{AN_j}{AC} = \frac{i}{p} > m. \tag{6}$$

Cum $M_jN_j \parallel DE$ şi $F \in (AN_j)$, rezultă: $AM_j < AD$, ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{AM_j}{AB} < \frac{AD}{AB} = m. \tag{7}$$

Din ecuaţiile (6) şi (7), se obţine

$$m < \frac{AM_j}{AB} < m.$$

FALS. Cazul $m < n$ nu se poate.

ii) $m > n \Rightarrow E \in (AF)$.

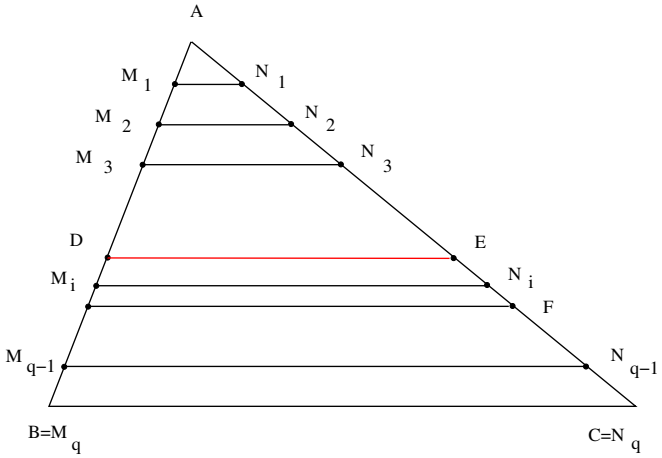



FIGURA 34. Thales-caz (1b)

Analog cazului (i), există un număr natural $q$, nenul, astfel încât $AC < qEF$ şi punctele $N_i$, $i = \overline{1, q-1}$, care împart segmentul $(AC)$ în $q$ segmente congruente de lungime egală cu $k$, $AC = kq$.
Deoarece $k < EF$, există $N_i \in (EF)$, $AN_i = ik < AF$.
Se obţine

$$\frac{AN_i}{AC} < \frac{AF}{AC} = m. \tag{8}$$

Construim $N_iM_i \parallel BC$, $M_i \in (AB)$ şi rezultă

$$\frac{AM_i}{AB} = \frac{AN_i}{AC} < m, \tag{9}$$

iar din paralelismul dreptelor $M_iN_i \parallel DE$, rezultă $AM_i > AD$ şi

$$\frac{AM_i}{AB} > \frac{AD}{AB} = m. \tag{10}$$

Din relaţiile (8) şi (9) se obţine contradicţia $m < m$.
Aşadar, singura posibilitate este $m = n$.

" $\Leftarrow$ " Presupunem prin absurd că $DE \nparallel BC$. Atunci există un punct $F \in (AC)$, $F \neq E$ şi $DF \parallel BC$. Rezultă din implicaţia directă

a teoremei

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}.$$

Folosind ipoteza, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, se obţine:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AF = AE.$$

**Caz 2:** $B \in (AD)$ şi $C \in (AE)$. Se aplică raţionamentul de la Cazul 1, triunghiului $\Delta ADE$ cu dreapta $BC$.

**Caz 3:** $A \in (DB)$ şi $A \in (EC)$. Se aleg punctele $M$ şi $N$ pe segmentele $(AB)$, respectiv $(AC)$, astfel încât $[AM] \equiv [AD]$ şi $[AN] \equiv [AE]$. Se obţin triunghiurile congruente $\Delta AMN \equiv \Delta AED$ (L.U.L). Din congruenţă rezultă $\sphericalangle EDA \equiv \sphericalangle AMN \Rightarrow ED \parallel MN$.

Se aplică raţionamentul folosit în Cazul 1, triunghiului $\Delta ABC$ şi dreptei $MN$.

### 7.1. Asemănarea

**Definiţia** 2.34. *Fie $A, B, C$ trei puncte necoliniare şi $A'$, $B'$, $C'$ alte trei puncte necoliniare. Spunem că triunghiurile $\Delta ABC$ şi $\Delta A'B'C'$ sunt* asemenea *şi notăm*

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

*dacă*

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'; \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'; \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

*şi*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{AC}.$$

**Teorema** 2.35 ("Teorema fundamentală a asemănării"). *O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte laturi un alt triunghi care are toate unghiurile respectiv congruente şi toate laturile respectiv proporţionale cu ale celui iniţial.*

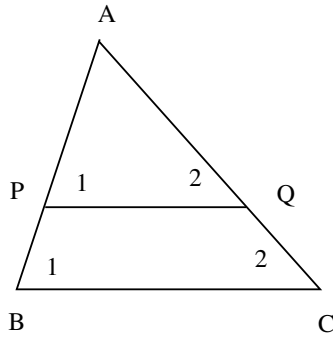


FIGURA 35. Teorema asemănării

DEMONSTRAŢIE. Fie $PQ \parallel BC$, $P \in AB$, $Q \in AC$.

Se disting trei cazuri:

*Caz 1:* $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$;

*Caz 2:* $B \in (AP)$, $C \in (AQ)$;

*Caz 3:* $A \in (BP)$, $A \in (CQ)$.

Vom demonstra primul caz. Celelalte vor rezulta din cazurile Teoremei lui Thales.

Deoarece $PQ \parallel BC$, rezultă congruenţa unghiurilor, ca unghiuri corespondente, $\sphericalangle(APQ) \equiv \sphericalangle(ABC)$ şi $\sphericalangle(AQP) \equiv \sphericalangle(ACB)$. În plus, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$.

Folosind Teorema lui Thales, se obţine $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC}$.

Se construieşte $QD \parallel AB$, $D \in [BC]$ şi rezultă, aplicând din nou Teorema lui Thales: $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AQ}{AC}$.

Triunghiurile $\Delta PBD$ şi $\Delta PDQ$ sunt congruente conform cazului (U.L.U)

$$\begin{cases} \sphericalangle BPD \equiv \sphericalangle PDQ \text{ (unghiuri alterne interne)} \\ \text{latura } [PD] \text{ comună} \\ \sphericalangle PDB \equiv \sphericalangle DPQ \end{cases}$$

Rezultă $PQ = BD$.

Se obţine astfel $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} = \dfrac{PQ}{BC}$.

Din congruenţa unghiurilor şi egalitatea rapoartelor între laturi, conform definiţiei triunghiurilor asemenea, rezultă

$$\Delta APQ \sim \Delta ABC.$$

### 7.2. Cazuri de asemănare

Se consideră triunghiurile $\Delta ABC$ şi $\Delta A'B'C'$. Cele două triunghiuri sunt asemenea dacă are loc unul dintre cazurile de mai jos:

Caz 1. un unghi congruent şi laturile ce-l formează proporţionale

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{C'A'}{AC};$$

Caz 2. două unghiuri congruente

$$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B';$$

Caz 3. cele trei laturi proporţionale

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{AC}.$$

**Observaţia** 2.36. *Cele trei cazuri de asemănare, menţionate anterior, reprezintă consecinţe ale* Teoremei fundamentale a asemănării *şi reprezintă condiţii necesare şi suficiente ca două triunghiuri să fie asemenea.*

*Într-adevăr: se consideră două triunghiuri $\Delta ABC$ şi $\Delta A'B'C'$, $AB > A'B'$ şi se alege $P \in (AB)$, astfel încât $[AP] \equiv [A'B']$.*

*Se construieşte paralela prin punctul $P$ la dreapta $BC$ care va intersecta $AC$ în punctul $Q$ ($PQ \parallel BC$).*

*Conform Teoremei (2.35),*

$$\Delta APQ \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}. \tag{11}$$

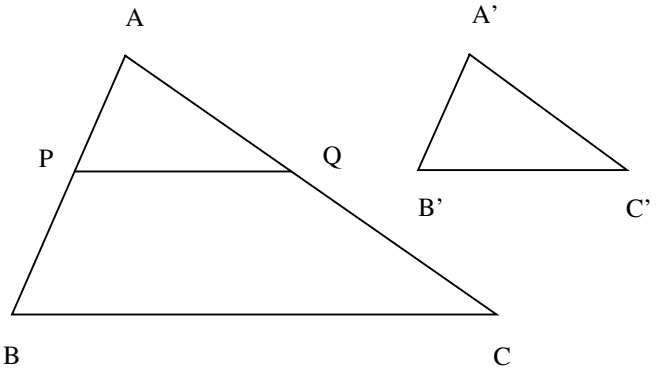



FIGURA 36. Cazuri de asemănare

Caz 1: *Se ştie că:* $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{C'A'}{AC}$.

*Din:*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} (\textit{ conform (3.14)}) \\ [AP] \equiv [A'B'] \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{C'A'}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow [AQ] \equiv [A'C'].$$

*Deoarece:*

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \\ [AQ] \equiv [A'C'] \\ [AP] \equiv [A'B'] \end{array}\right\} \overset{\text{L.U.L.}}{\Longrightarrow} \Delta APQ \equiv \Delta A'B'C'.$$

*Din asemănarea triunghiurilor* $\Delta APQ \sim \Delta ABC$ *şi congruenţa* $\Delta APQ \equiv \Delta A'B'C'$*, rezultă asemănarea triunghiurilor* $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Caz 2: *Se cunosc următoarele congruenţe:*

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$.

*Considerând paralelismul* $PQ \parallel BC$ *şi secanta* $AB$*, rezultă*

$$\sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle ABC.$$

*Deoarece:*

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \\ \sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B' \\ [AP] \equiv [A'B'] \end{array}\right\} \overset{U.L.U}{\Longrightarrow} \Delta APQ \equiv \Delta A'B'C'.$$

*Din asemănarea triunghiurilor* $\Delta APQ \sim \Delta ABC$ *şi congruenţa* $\Delta APQ \equiv \Delta A'B'C'$*, rezultă asemănarea triunghiurilor* $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Caz 3: *Se cunosc următoarele egalităţi de rapoarte:*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{AC}.$$

*Folosind relaţiile cunoscute, se obţin următoarele congruenţe:*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} \\ [AP] \equiv [A'B'] \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow [AQ] \equiv [A'C'].$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{PQ}{BC} \\ [AP] \equiv [A'B'] \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow [PQ] \equiv [B'C'].$$

*Deoarece:*

$$\left.\begin{array}{l} [AP] \equiv [A'B'] \\ [AQ] \equiv [A'C'] \\ [PQ] \equiv [C'B'] \end{array}\right\} \overset{L.L.L}{\Longrightarrow} \Delta APQ \equiv \Delta A'B'C'.$$

*Asemănarea triunghiurilor* $\Delta APQ \sim \Delta ABC$ *şi congruenţa* $\Delta APQ \equiv \Delta A'B'C'$*, implică asemănarea triunghiurilor*

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

## 8. Relaţii metrice în triunghi

**Definiţia** 2.37. *Se numeşte* perimetrul triunghiului $\Delta ABC$ *şi se notează cu* $\mathcal{P}_{\Delta ABC}$ *sau* $\mathcal{P}_{ABC}$, *suma lungimilor laturilor triunghiului*

$$\mathcal{P}_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$$

**Definiţia** 2.38. *Prin* aria *unui triunghi înţelegem jumătate din produsul dintre lungimea unei laturi a triunghiului şi lungimea înălţimii corespunzătoare acelei laturi.*

Justificarea formulei de calcul pentru aria triunghiului se găseşte în Capitolul 3, Subcapitolul *Poligoane*.

Dacă se alege $\Delta ABC$ şi se construieşte înălţimea $AD$, $D \in BC$, atunci notaţia uzuală pentru aria triunghiului este

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}.$$

Se mai foloseşte pentru arie şi simbolul $\mathcal{A}_{ABC}$.

Cu ajutorul asemănării a două triunghiuri se poate demonstra că aria unui triunghi nu depinde de alegerea înălţimii şi a laturii corespunzătoare acesteia.

**Teorema** 2.39. *Într-un triunghi, produsul dintre lungimea unei laturi şi lungimea înălţimii corespunzătoare ei este acelaşi pentru toate cele trei laturi.*

DEMONSTRAŢIE. Se construiesc înălţimile $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $D \in BC$, $E \in AC$. Atunci, din asemănarea $\Delta ACD \sim \Delta BCE$ (unghiul $\sphericalangle C$ comun, $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle ADC$), rezultă $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE}$.

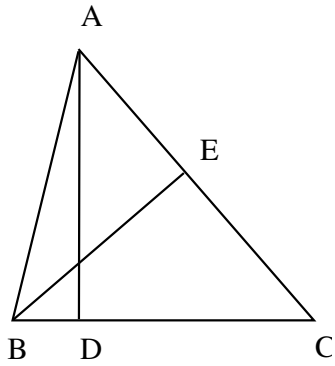


FIGURA 37. Proprietate a ariei unui triunghi

**Teorema** 2.40. *Se consideră triunghiul* $\Delta ABC$*. Dacă* $D \in [BC]$*, atunci*

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \mathcal{A}_{\Delta ABD} + \mathcal{A}_{\Delta ACD}.$$

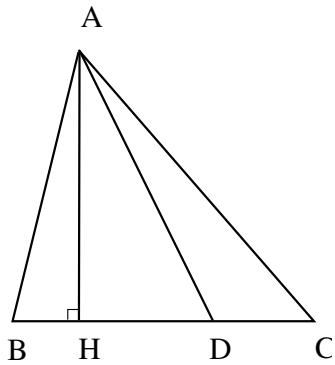


FIGURA 38. Descompunerea ariei unui triunghi

DEMONSTRAŢIE. Se consideră $AH \perp BC, H \in BC$.

$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}AH \cdot (BD + DC) = \frac{1}{2}AH \cdot BD + \frac{1}{2}AH \cdot DC = \mathcal{A}_{\Delta ABD} + \mathcal{A}_{\Delta ACD}$.

**Teorema** 2.41 (Teorema catetei). *Fie triunghiul* $\Delta ABC$*. Se construieşte* $AD \perp BC$*,* $D \in [BC]$*. Atunci, măsura unghiului* $A$ *este de* $90^\circ$ *dacă şi numai dacă*

$$AB^2 = BD \cdot BC$$

*sau*

$$AC^2 = DC \cdot BC$$

DEMONSTRAŢIE. Se foloseşte, în funcţie de relaţia pe care dorim să o demonstrăm, ori asemănarea dintre triunghiurile $\Delta ABC$ şi $\Delta DBA$, ori dintre $\Delta ABC$ şi $\Delta DAC$.

"$\Rightarrow$" Presupunem că $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ şi demonstrăm

$$AB^2 = BD \cdot BC.$$

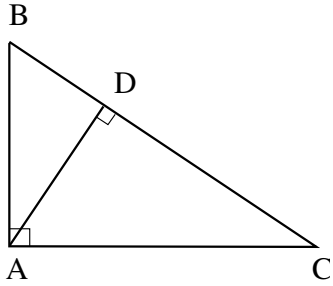



FIGURA 39. Teorema catetei

Deoarece triunghiurile $\Delta ABD$ ($m(\sphericalangle ADB) = 90^\circ$) şi $\Delta ABC$ ($m(\sphericalangle CAB) = 90^\circ$) sunt dreptunghice şi unghiul $\sphericalangle B$ este comun, rezultă că sunt asemenea triunghiurile $\Delta DBA \sim \Delta ABC$. Din asemănare se obţine: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BD}{AB}$, adică $AB^2 = BD \cdot BC$.

"$\Leftarrow$" Presupunem cunoscută relaţia $AB^2 = BD \cdot BC$ şi demonstrăm că $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$.

Relaţia $AB^2 = BD \cdot BC$ se mai scrie şi sub forma $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BD}{AB}$. Luând în considerare şi unghiul $\sphericalangle B$ ca unghi comun în $\Delta ABD$ şi $\Delta ABC$, rezultă $\Delta DBA \sim \Delta ABC$. Asemănarea implică congruenţa unghiurilor care se corespund în cele două triunghiuri, adică $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle BAC$. Aşadar, se obţine $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$.

Echivalenţa $AC^2 = DC \cdot BC \Leftrightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$, se demonstrează analog, folosind asemănarea triunghiurilor $\Delta ABC$ şi $\Delta DAC$.

**Teorema** 2.42 (Pitagora). *Într-un triunghi dreptunghic* $\Delta ABC$ *(*$m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$*) în care lungimile catetelor* $[AB]$*, respectiv* $[AC]$ *sunt*

*$a$, respectiv $b$, iar lungimea ipotenuzei $[BC]$ este $c$, are loc relaţia:*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

DEMONSTRAŢIE. În $\Delta ABC$ se construieşte înălţimea $AD \perp BC$, $D \in BC$. Se aplică Teorema (2.41) pentru ambele catete $AB$ şi $AC$:

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC = (BD + DC)BC = BC^2.$$

Geometric, teorema lui Pitagora spune că aria pătratului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe cele două catete ale triunghiului.

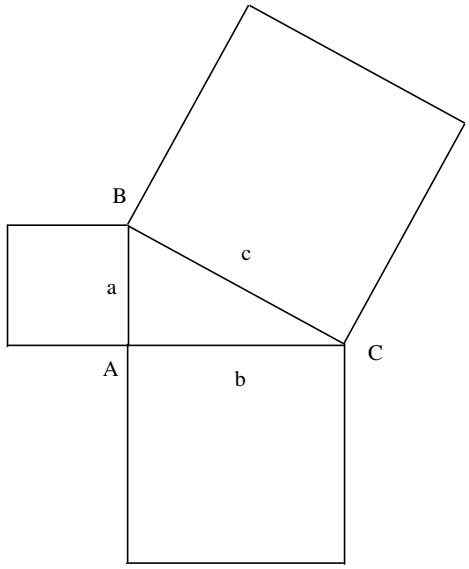



FIGURA 40. Teorema lui Pitagora

**Teorema** 2.43 (Teorema lui Pitagora generalizată). *Dacă triunghiul $\Delta ABC$ este un triunghi oarecare, atunci*

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot cos(\sphericalangle A)$$

Se ţine cont de: cosinusul unui unghi obtuz este egal cu cosinusul suplementului, cu semn schimbat.

DEMONSTRAŢIE. Demonstraţia se va face ţinând cont de măsura unghiului $\sphericalangle A$ al triunghiului.

Caz 1: $m(\sphericalangle A) < 90^\circ$.

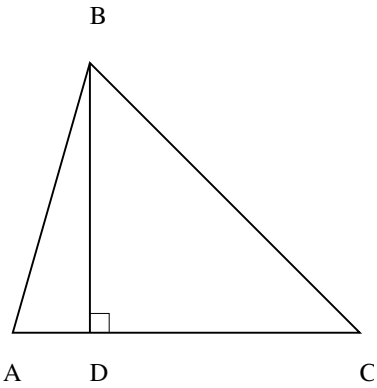



FIGURA 41. Teorema lui Pitagora generalizată (Caz 1)

Se construieşte înălţimea din $B$ pe $[AC]$, notată $[BD]$, $D \in [AC]$.

În $\Delta ABD$ avem:

$$\begin{aligned} BD &= AB \cdot sin(\sphericalangle A), \\ AD &= AB \cdot cos(\sphericalangle A), \\ DC &= AC - AD = AC - AB \cdot cos(\sphericalangle A). \end{aligned} \tag{12}$$

În $\Delta BDC$, ţinând seama de ecuaţiile (12), se aplică Teorema (2.42):

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + DC^2 = \\ &= AB^2 \cdot sin^2(\sphericalangle A) + AC^2 + \\ &\quad AB^2 \cdot cos^2(\sphericalangle A) - 2AB \cdot AC \cdot cos(\sphericalangle A) \end{aligned}$$

Rezultă: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot cos(\sphericalangle A)$.

Caz 2: $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$.

Se construieşte înălţimea din $C$ pe $AB$, notată $[CD]$, $D \notin [AB$.

În $\Delta ADC (m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ)$,

$$\begin{aligned} AD &= AC \cdot cos(\sphericalangle CAD), \\ CD &= AC \cdot sin(\sphericalangle CAD). \end{aligned} \tag{13}$$

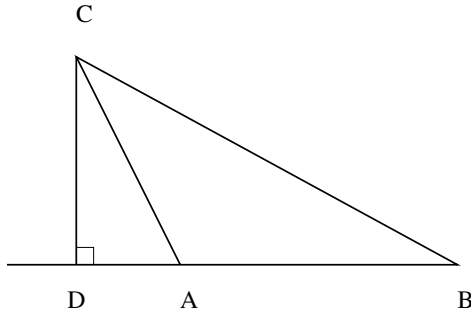


FIGURA 42. Teorema lui Pitagora generalizată (Caz 2)

În $\Delta CDB(m(\sphericalangle CDB) = 90^\circ)$, se folosesc ecuaţiile (13) şi se aplică Teorema (2.42):

$$BC^2 = CD^2 + DB^2 =$$

$$= AC^2 \cdot sin^2(\sphericalangle CAD) + (DA + AB)^2 =$$

$$= AC^2 \cdot sin^2(\sphericalangle CAD) + AB^2 +$$

$$+2AB \cdot AC \cdot cos(\sphericalangle CAD) + AC^2 \cdot cos^2(\sphericalangle CAD) =$$

$$= AC^2 + AB^2 + 2AB \cdot AC \cdot cos(\sphericalangle CAD) =$$

$$= AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot cos(\sphericalangle A).$$

**Teorema** 2.44 (O altă formulare a teoremei lui Pitagora generalizată). *Fie triunghiul $\Delta ABC$ un triunghi oarecare. Se construieşte $BD \perp AC$, $D \in AC$. Dacă:*

- *unghiul $A$ este ascuţitunghic, atunci*

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AD,$$

  *unde $AD = AB \cdot cos(\sphericalangle A)$*
- *unghiul $A$ este obtuzunghic, atunci*

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AB \cdot AD,$$

  *unde $AD = -AC \cdot cos(\sphericalangle A)$*

**Teorema** 2.45 (Reciproca Teoremei lui Pitagora). *Se consideră triunghiul $\Delta ABC$ în care este adevărată egalitatea:*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

*Atunci,* $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$.

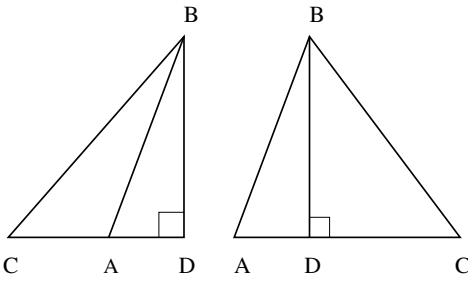


FIGURA 43. Reciproca teoremei Pitagora

DEMONSTRAŢIE. Se construieşte $BD \perp AC$, $D \in AC$. Presupunem prin absurd că $m(\sphericalangle BAC) \neq 90^\circ$. Atunci punctele $A$ şi $D$ sunt diferite şi $m(\sphericalangle BAC) < 90^\circ$ sau $m(\sphericalangle BAC) > 90^\circ$. Aplicând Teorema (2.44) şi ţinând cont şi de ipoteză, rezultă $AC \cdot AD = 0$ sau $AB \cdot AD = 0$. În ambele cazuri, $AB$ şi $AC$ sunt constante. Aşadar, rezultă $AD = 0$, adică punctele $A$ şi $D$ coincid. Fals. Rămâne că $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$.

**Teorema** 2.46 (Teorema bisectoarei interioare). *Fie triunghiul $\Delta ABC$ şi $D$ un punct pe segmentul $(BC)$. Atunci ($AD$ este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BAC$, dacă şi numai dacă* $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

DEMONSTRAŢIE. Se construieşte $BM \parallel AD$, $M \in AC$.

"$\Rightarrow$" Se ştie că ($AD$ este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BAC$. În $\Delta BCM$ se aplică Teorema (2.32) şi rezultă:

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AM}.$$

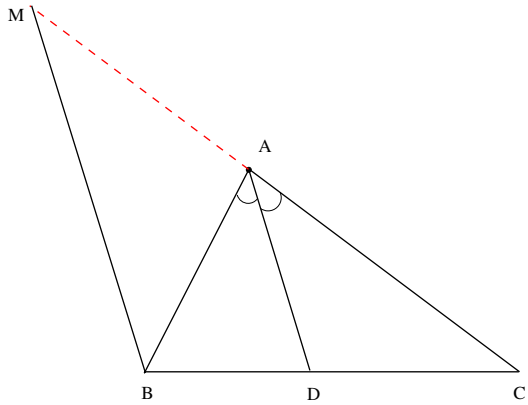


FIGURA 44. Teorema bisectoarei

Folosind $BM \parallel AD$ şi secantele $AC$ şi $AB$, respectiv se obţin unghiurile congruente: $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CMB$, $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABM$.

Deoarece $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle DAB$, ca unghiuri formate de bisectoarea $(AD$, se obţine $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle AMB$, adică $\Delta BAM$ este isoscel ($[AM] \equiv [AB]$). Rezultă:

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}.$$

"$\Leftarrow$" În $\Delta ABC$, $D \in (BC)$ se ştie relaţia: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Se aplică Teorema (2.32) în $\Delta BCM$ şi se obţine:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AM}{AC}.$$

Folosind şi relaţia din ipoteză: $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$, deducem congruenţa: $[AM] \equiv [AB]$, adică $\Delta AMB$ este isoscel.

Considerând dreptele paralele $BM \parallel AD$ şi secantele $AC$ şi $AB$, respectiv se obţin unghiurile congruente: $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CMB$; $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABM$. Aşadar, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$.

**Teorema** 2.47 (Teorema bisectoarei exterioare). *Se consideră triunghiul $\Delta ABC$, $AB \neq AC$, $E \in BC$. Atunci $(AE$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$ dacă şi numai dacă $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$.*

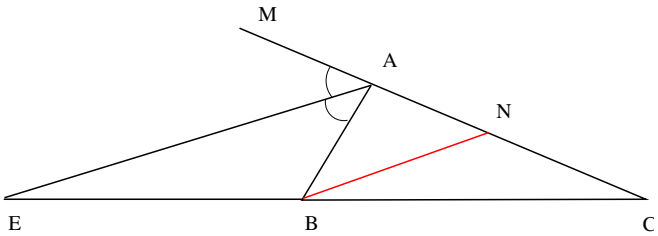


FIGURA 45. Teorema bisectoarei exterioare

DEMONSTRAŢIE. Se construieşte $BN \parallel AE$, $N \in AC$.

"$\Rightarrow$" Se consideră ($AE$ bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$.

În triunghiul $\Delta ACE$ aplicam Teorema (2.32):

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AN}{AC}.$$

Considerând $BN \parallel AE$ şi secantele $AB$ şi $AC$, respectiv rezultă: $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ABN$, $\sphericalangle BNA \equiv \sphericalangle EAM$.

Folosind în plus şi ipoteza: $\sphericalangle MAE \equiv \sphericalangle EAB$, se obţine congruenţa unghiurilor $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ANB$. Rezultă că triunghiul $\Delta ABN$ este isoscel ($[AB] \equiv [AN]$), ceea ce implică $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

"$\Leftarrow$" În triunghiul $\Delta ABC$, $E \in BC$, este adevărată relaţia: $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

Se aplică Teorema (2.32) în $\Delta AEC$ şi rezultă:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AN}{AC}.$$

Din această egalitate şi din $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$, rezultă $[AB] \equiv [AN]$, adică triunghiul $\Delta BAN$ este isoscel. Se foloseşte congruenţa unghiurilor: $\sphericalangle MAE \equiv \sphericalangle ANB$ (unghiuri formate de secanta $MC$ care intersectează paralelele $BN \parallel AE$) şi $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle ABN$ (unghiuri formate de secanta $AB$ care intersectează paralelele $BN$ şi $AE$), se ţine seama de $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ANB$ şi rezultă concluzia.

**Teorema** 2.48 (Teorema lui Stewart). *Se consideră triunghiul* $\Delta ABC$ *şi* $M \in [BC]$. *Atunci are loc relaţia lui Stewart:*

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot BM \cdot MC$$

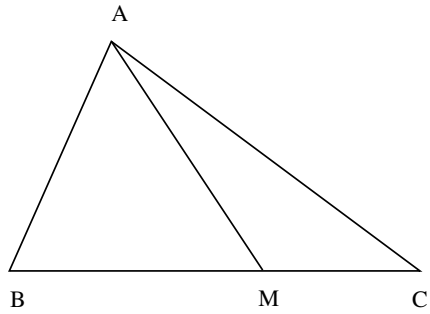



FIGURA 46. Teorema Stewart

DEMONSTRAŢIE. Se scrie teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile $\Delta ABM$ şi $\Delta ABC$:

$$AM^2 = BM^2 + BA^2 - 2AB \cdot BM \cdot cos(\sphericalangle B)$$

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC \cdot cos(\sphericalangle B)$$

Prima relaţie se înmulţeşte cu $BC$, a doua cu $BM$ şi se scad rezultând:

$$AM^2 \cdot BC = BM^2 \cdot BC + AB^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BM -$$

$$-BC^2 \cdot BM - AB^2 \cdot BM$$

sau

$$AM^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC - BC \cdot BM \cdot (BC - BM).$$

$$AM^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BM + AB^2 \cdot MC - BC \cdot BM \cdot MC.$$

Un caz particular al Teoremei lui Stewart este Teorema medianei.

**Teorema** 2.49 (Teorema medianei). *Dacă* $M$ *este mijlocul laturii* $[BC]$ *a triunghiului* $\Delta ABC$, *atunci lungimea medianei* $[AM]$ *se exprimă, în funcţie de lungimile laturilor triunghiului, astfel :*

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

**Teorema** 2.50 (Teorema înălţimii). *Se consideră triunghiul* $\Delta ABC$. *Se construieşte* $AD \perp BC$, $D \in [BC]$. *Măsura unghiului* $\sphericalangle A$ *este de* $90^\circ$, *dacă şi numai dacă*

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

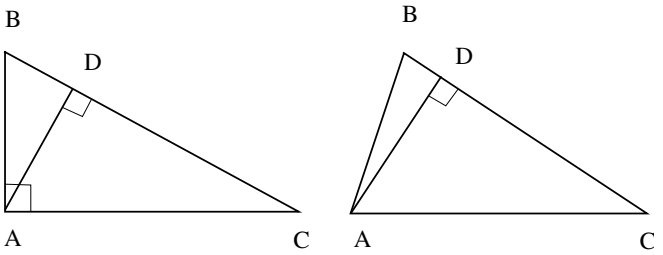



FIGURA 47. Teorema înălţimii

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" Presupunem că măsura unghiului este: $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$.

În triunghiurile dreptunghice $\Delta ADC$, $\Delta ADB$ şi $\Delta ABC$, stabilim următoarele congruenţe între unghiuri:

$$m(\sphericalangle ABC) \overset{\Delta ABC}{=} 90^\circ - m(\sphericalangle BCA) \overset{\Delta DAC}{=} m(\sphericalangle DAC),$$

$$m(\sphericalangle BAD) \overset{\Delta BAD}{=} 90^\circ - m(\sphericalangle ABD) \overset{\Delta ABC}{=} m(\sphericalangle ACB),$$

care justifică asemănarea $\Delta ADB \sim \Delta CDA$.

Rezultă

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD}$$

sau $AD^2 = BD \cdot DC$.

"$\Leftarrow$" În triunghiul $\Delta ABC$ se construieşte $AD \perp BC$ şi se ştie relaţia: $AD^2 = BD \cdot DC \Leftrightarrow \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{DC}{AD}$.

Din $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{DC}{AD}$ şi $\sphericalangle(ADB) = \sphericalangle(ADC)$ rezultă asemănarea triunghiurilor $\Delta ABD \sim \Delta CAD$. De aici se obţin următoarele congruenţe de unghiuri:

$$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$$

şi

$$\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$$

care, împreună cu relaţia:

$$m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle DAC) + m(\sphericalangle BAD) = 180^\circ,$$

conduc la concluzia: $m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle DAC) = 90^\circ$.

**Teorema** 2.51 (Teorema lui Menelaus). *Fie triunghiul $\Delta ABC$ şi punctele $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$. Presupunem că două dintre aceste puncte sunt situate pe două laturi ale triunghiului iar al treilea pe prelungirea unei laturi sau că toate punctele se află pe prelungirile laturilor triunghiului.*

*Atunci punctele $A'$, $B'$, $C'$ sunt coliniare dacă şi numai dacă are loc relaţia:*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

DEMONSTRAŢIE. " $\Rightarrow$ " Se presupune că punctele $A'$, $B'$, $C'$ sunt coliniare.

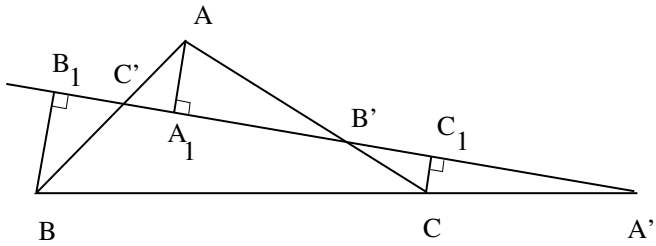



FIGURA 48. Teorema Menelaus

Se construiesc, din punctele $A$, $B$, respectiv $C$, perpendicularele $AA_1$, $BB_1$, respectiv $CC_1$, pe dreapta $A'C'$.

Folosind Teorema (2.35) pentru dreptele paralelele $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, se obţin următoarele triunghiuri asemenea:

$$\Delta A'BB_1 \sim \Delta A'CC_1, \Delta B'CC_1 \sim \Delta B'AA_1,$$

$$\Delta C'AA_1 \sim \Delta C'BB_1.$$

Din asemănare triunghiurilor se scriu următoarele perechi de rapoarte egale:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1}, \frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1}, \frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1}.$$

Înmulţind aceste rapoarte se obţine:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{BB_1}{CC_1} \cdot \frac{CC_1}{AA_1} \cdot \frac{AA_1}{BB_1} = 1.$$

" $\Leftarrow$ " În triunghiul $\Delta ABC$ este adevărată relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Presupunem că punctele $A'$, $B'$, $C'$ nu sunt coliniare ceea ce înseamnă că $A'B'$ intersectează $[AB]$ într-un punct $C''$. Folosind implicaţia directă a teoremei lui Menelaus pentru punctele $A', B', C''$, rezultă:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{AC''}{C''B} = 1.$$

Ultima egalitate obţinută şi relaţia din enunţ,

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

implică $\frac{AC''}{C''B} = \frac{C'A}{C'B}$. Deoarece un punct împarte un segment în mod unic într-un raport dat, rezultă $C' = C''$, adică $A'$, $B'$, $C'$ coliniare.

**Teorema** 2.52 (Teorema lui Ceva). *Fie triunghiul $\Delta ABC$ şi punctele $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$.*

*Dreptele $AA'$, $BB'$, $CC'$ sunt concurente dacă şi numai dacă*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$$

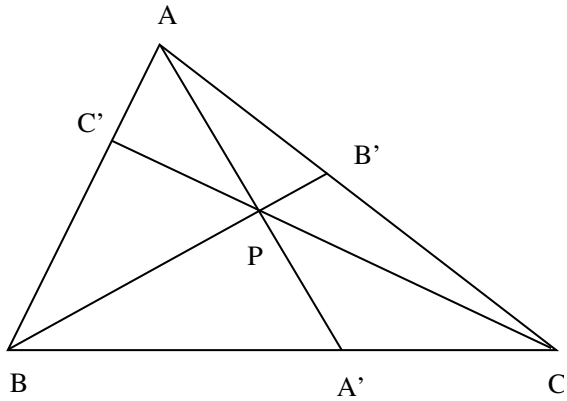


FIGURA 49. Teorema Ceva

DEMONSTRAŢIE. " $\Rightarrow$ " Presupunem că dreptele $AA'$, $BB'$, $CC'$ sunt concurente în $P$.

Scriem teorema lui Menelaus în triunghiurile: $\Delta AA'C$ cu secanta $BB'$ şi obţinem

$$\frac{A'B}{BC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{PA}{PA'} = 1 \tag{14}$$

şi $\Delta ABA'$ cu secanta $CC'$ şi obţinem

$$\frac{A'C}{BC} \cdot \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{PA}{A'P} = 1 \tag{15}$$

Înmulţim (14) cu (15) inversată şi rezultă concluzia.

" $\Leftarrow$ " În triunghiul $\Delta ABC$ se consideră adevărată relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Presupunem că $AA'$, $BB'$, $CC'$ nu sunt concurente. Atunci $BB' \cap CC' = \{P\}$ şi $AP \cap BC = \{A''\}$. Folosim implicaţia directă a teoremei lui Ceva pentru dreptele concurente $AA''$, $BB'$, $CC'$ şi rezultă:

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Din această relaţie şi din ipoteza $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, se obţine $\frac{A''B}{A''C} = \frac{A'B}{A'C}$. Deoarece un punct împarte un segment în mod unic într-un raport dat, rezultă că punctele $A'$ şi $A''$ coincid.

CAPITOLUL 3

# Patrulater

## 1. Poligon

Se consideră o mulţime de puncte $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, $n \geq 3$, din plan, date într-o anumită ordine.

**Definiţia** 3.1. *Se numeşte* linie poligonală închisă, *mulţimea de forma:* $[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \cdots \cup [A_{n-1}A_n] \cup [A_nA_{n+1}]$, *cu* $A_1 = A_{n+1}$.

*Punctele* $A_i$, $i = \overline{1,n}$, *se numesc* vârfurile liniei poligonale.

*Segmentele* $[A_iA_{i+1}]$, $i = \overline{1,n}$, *se numesc* laturile liniei poligonale.

**Definiţia** 3.2. *O linie poligonală se numeşte* simplu închisă *sau* poligon *dacă oricare două vârfuri nu coincid, oricare trei vârfuri nu sunt coliniare, oricare două laturi nevecine nu au niciun punct comun şi oricare două laturi vecine au dreptele suport care nu coincid.*

Diagonalele *unui poligon sunt segmentele* $[A_iA_j]$, *care nu sunt laturi.*

**Observaţia** 3.3. *Un poligon cu vârfuri* $A_i$, $i = \overline{1,n}$, *se va nota:* $A_1A_2 \ldots A_n$.

**Definiţia** 3.4. *Un poligon se numeşte* convex *dacă pentru oricare latură a sa* $[A_iA_{i+1}]$, $\forall i = \overline{1,n}$, *toate vârfurile, mai puţin* $A_i$ *şi* $A_{i+1}$ *se găsesc în acelaşi hiperplan deschis delimitat de dreapta suport a laturii* $[A_iA_{i+1}]$.

**Definiţia** 3.5. *Prin* unghi interior *al unui poligon* $A_1A_2 \ldots A_n$, *convex, se înţelege unghiul format de dreptele suport a două laturi consecutive şi este un număr ce ia valori în intervalul* $(0, \pi)$. *Un* unghi exterior *unui poligon este un unghi adiacent şi suplementar cu un unghi interior poligonului.*

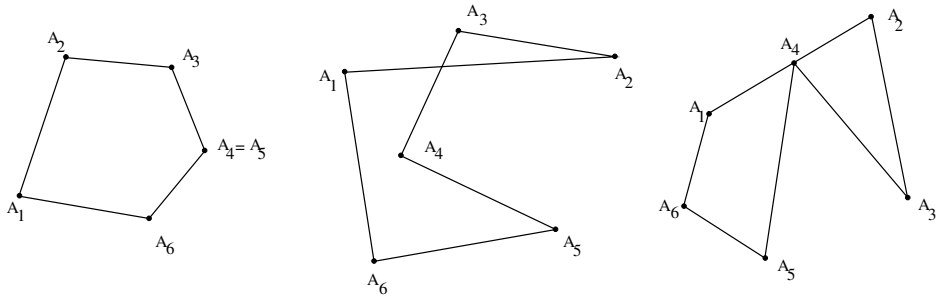



FIGURA 1. Exemple de figuri care nu sunt poligoane

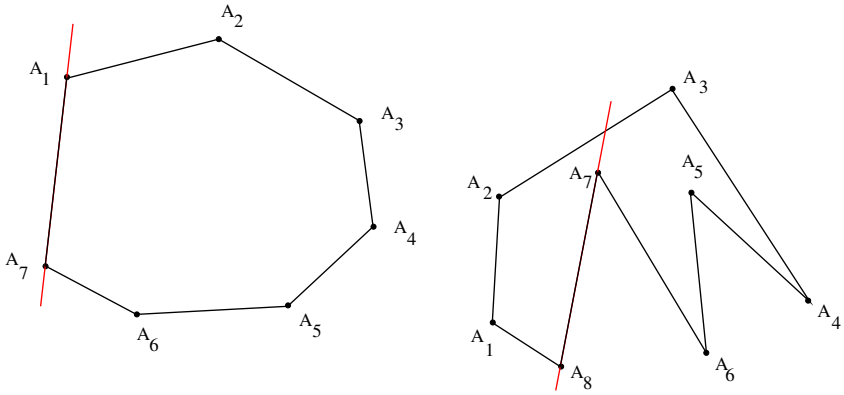



FIGURA 2. Exemple de poligoane

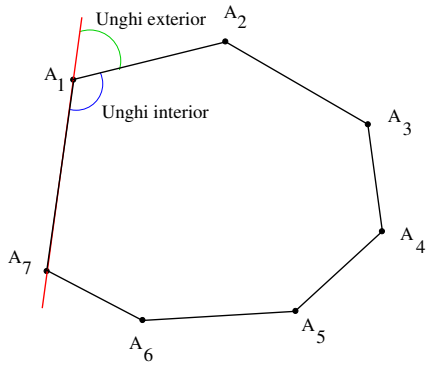



FIGURA 3. Unghiuri în poligoane

**Definiţia** 3.6. *În poligonul convex $A_1A_2\ldots A_n$, se notează cu $a_i$ dreapta suport a laturii $[A_iA_{i+1}]$ şi cu $(a_iA_{i+2}$ semiplanul deschis delimitat de dreapta $a_i$ care conţine vârful $A_{i+2}$, pentru $i=\overline{1,n-1}$ şi $A_{n+1}=A_1$.*

Interiorul poligonului *se defineşte ca:* $\bigcap_{i=1}^{n-1}(a_iA_{i+2}$ *şi se notează* Int $A_1A_2\ldots A_n$.

*Prin* suprafaţă poligonală *se înţelege reuniunea dintre un poligon şi interiorul său. Poligonul se mai numeşte şi* frontiera *suprafeţei poligonale. Suprafaţa poligonală determinată de poligonul $A_1A_2\ldots A_n$ se va nota $[A_1A_2\ldots A_n]$.*

**Observaţia** 3.7. *După numărul de laturi ale unui poligon convex $A_1A_2\ldots A_n$, acesta se numeşte:*

- triunghi *dacă* $n=3$,
- patrulater *dacă* $n=4$,
- pentagon *dacă* $n=5$,
- hexagon *dacă* $n=6$ *etc.*

*În mod analog se vor defini suprafeţele poligonale cu 3, 4, 5, 6, etc. laturi.*

*În categoria suprafeţelor poligonale cu $n=4$ laturi, distingem următoarele cazuri particulare:*

- paralelogramul=*laturi opuse paralele,*
- dreptunghiul=*paralelogram cu un unghi drept,*
- pătratul=*dreptunghi cu laturi egale,*
- rombul=*paralelogram cu laturi egale,*
- trapezul= *două laturi opuse, paralele.*

**Teorema** 3.8. *Dacă $[A_1A_2\ldots A_n]$ este o suprafaţă poligonală convexă cu $n>3$ laturi, atunci ea poate fi descompusă în $n-2$ suprafeţe triunghiulare.*

DEMONSTRAŢIE. În poligonul convex $A_1A_2\ldots A_n$ se construieşte dreapta $A_1A_3$. Această dreaptă, nefiind suportul niciunei laturi a poligonului, îl intersectează doar în punctele $A_1$ şi $A_3$, punctele $A_i$, $i=\overline{4,n}$ rămânând de aceeaşi parte a dreptei $A_1A_3$. Aceasta înseamnă că poligonul $A_4A_5\ldots A_n$ este convex. Dreapta $A_1A_3$ fiind

situată în interiorul unghiului $\sphericalangle A_n A_1 A_2$, separă punctele $A_n$ şi $A_2$. Mai mult, dreapta $A_1A_3$ separă punctele $A_4A_5 \ldots A_n$ de punctul $A_2$.

Rezultă că suprafaţa triunghiulară $[A_1A_2A_3]$ şi suprafaţa poligonală $[A_4A_5 \ldots A_n]$ sunt disjuncte. Aşadar,

$$[A_1A_2 \ldots A_n] = [A_1A_2A_3] \cup [A_4A_5 \ldots A_n].$$

Repetând raţionamentul pentru noul poligon convex obţinut, se obţine descompunerea suprafeţei poligonale $[A_1A_2 \ldots A_n]$ în două suprafeţe triunghiulare şi un o nouă suprafaţă poligonală. Descompunerea se va repeta până când ultima suprafaţă poligonală obţinută este o suprafaţă triunghiulară. În descompunerea făcută se folosesc $n-3$ drepte $A_1A_i$, $i = \overline{3, n-1}$ şi se obţin $n-2$ suprafeţe triunghiulare.

COROLARUL 3.9. *Suma măsurilor unghiurilor interioare în orice patrulater convex* $[A_1A_2 \ldots A_n]$ *este egală cu* $(n-2)\pi$.

**Definiţia** 3.10. *Un poligon convex cu toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente se numeşte* poligon regulat.

### 1.1. Aria suprafeţelor poligonale

Oricărei figuri plane din spaţiul euclidian i se poate asocia un număr real, pozitiv, care măsoară "întinderea" unei suprafeţe poligonale. Se defineşte astfel *funcţia arie* pentru o suprafaţă poligonală.

Se notează cu $\mathcal{P}$ mulţimea tuturor suprafeţelor poligonale din planul euclidian.

**Definiţia** 3.11. *Se defineşte funcţia* $\mathcal{A} : \mathcal{P} \to \mathbf{R}_+$, *numită* arie, *ce verifică următoarele condiţii:*

1) *Dacă se consideră două triunghiuri* $\Delta ABC$ *şi* $\Delta DEF$, *congruente, atunci ariile suprafeţelor triunghiulare* $[ABC]$ *şi* $[DEF]$ *sunt egale:*

$$\mathcal{A}([ABC]) = \mathcal{A}([DEF])$$

*("Axioma congruenţei").*

2) *Se consideră două suprafeţe poligonale* $[P_1] \in \mathcal{P}$ *şi* $[P_2] \in \mathcal{P}$. *Dacă cele două suprafeţe sunt disjuncte sau intersecţia lor este formată numai din muchii sau numai din vârfuri, atunci are loc relaţia:*

$$\mathcal{A}([P_1] \cup [P_2]) = \mathcal{A}([P_1]) + \mathcal{A}([P_2])$$

*("Axioma aditivităţii").*

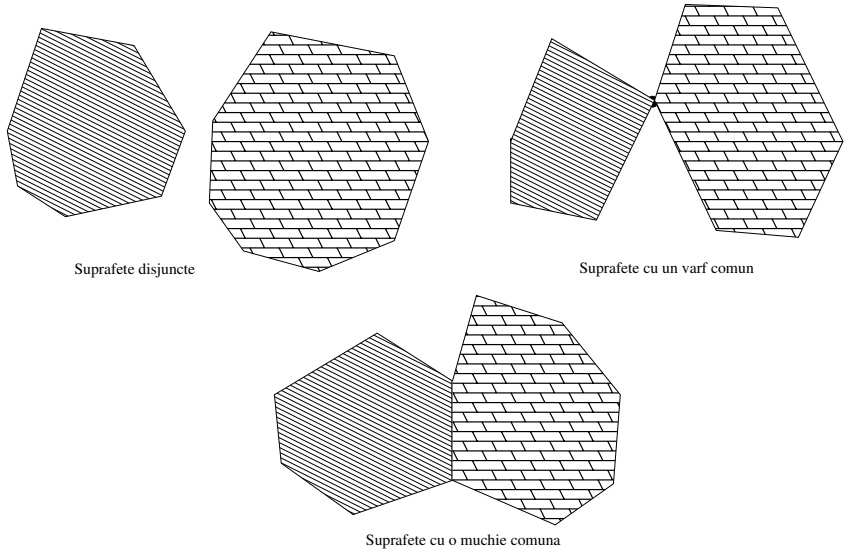



FIGURA 4. Suprafeţe poligonale

3) *Dacă se consideră o suprafaţă pătrată* $[ABCD]$ *cu latura de lungime* $a$, *atunci* $\mathcal{A}([ABCD]) = a^2$.

**Observaţia** 3.12. *Se demonstrează că funcţia arie, definită anterior, există şi este unică (vezi* [1]*).*

Folosind Definiţia (3.11) se obţin formulele de calcul pentru ariile triunghiurilor, patrulaterelor particulare (dreptunghi, pătrat, paralelogram).

**Teorema** 3.13. *Se consideră o suprafaţă dreptunghiulară* $[ABCD]$ *cu lungimile laturilor:* $AB = a$, $BC = b$. *Atunci* $\mathcal{A}([ABCD]) = a \cdot b$.

DEMONSTRAŢIE. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $a > b$. Se completează suprafaţa $[ABCD]$ la o suprafaţă pătrată $[AEGH]$ cu latura de lungime egală cu $a + b$. Completarea se va face cu suprafeţele pătrate $[BEFC]$, $[DCIH]$ şi suprafaţa dreptunghiulară $[CFGI]$.

Folosind condiţia (3) din Definiţia (3.11), avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}([AEGH]) &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \\ &= \mathcal{A}([DCIH] + 2ab + \mathcal{A}([BEFC]) \end{aligned} \tag{16}$$

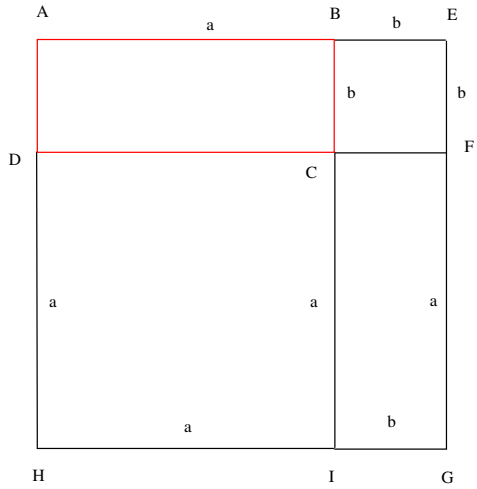



FIGURA 5. Aria suprafeţei dreptunghiulare

Suprafeţele dreptunghiulare $[ABCD]$ şi $[CFGI]$, având aceleaşi dimensiuni, sunt congruente. Din condiţia (2) a Definiţiei (3.11),

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}([AEGH]) = \\ &= \mathcal{A}([BEFC]) + \mathcal{A}([DCIH] + 2\mathcal{A}([ABCD]) \end{aligned} \tag{17}$$

Din ecuaţiile (16) şi (17) rezultă:

$$\mathcal{A}([ABCD]) = a \cdot b.$$

Ca o consecinţă acestui rezultat se obţine formula de calcul a ariei unei suprafeţe triunghiulare.

COROLARUL 3.14. *Se consideră o suprafaţă triunghiulară* $[ABC]$ *care are laturile* $[AB]$ *şi* $[AC]$ *perpendiculare şi de lungimi* $a$*, respectiv* $b$*. Atunci, aria suprafeţei este:*

$$\mathcal{A}([ABC]) = \frac{a \cdot b}{2}.$$

DEMONSTRAŢIE. Se completează suprafaţa triunghiulară $[ABC]$ până la o suprafaţă dreptunghiulară $[ABCD]$.

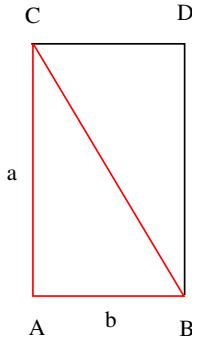



FIGURA 6. Aria suprafeţei triunghiulare

Conform condiţiilor (1) şi (2) din Definiţia (3.11), se obţine:

$$2\mathcal{A}([ABC]) = \mathcal{A}([ABCD]) = a \cdot b.$$

COROLARUL 3.15. *Dacă se consideră o suprafaţă triunghiulată* $[ABC]$ *determinată de triunghiul ascuţit unghic* $\Delta ABC$*, atunci aria ei este semiprodusul dintre lungimea unei laturi şi înălţimea corespunzătoare laturii.*

DEMONSTRAŢIE. Considerăm înălţimea din vârful $A$ pe latura $[BC]$, notată cu $[AD]$. Deoarece toate unghiurile triunghiului sunt ascuţite, $D \in [BC]$.

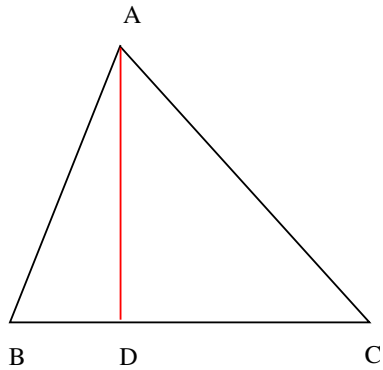


FIGURA 7. Aria suprafeţei triunghiulare

Folosind condiţia (2) din Definiţia (3.11) şi Corolarul (3.14), aria suprafeţei $[ABC]$ este:

$$\mathcal{A}([ABC]) = \mathcal{A}([ABD]) + \mathcal{A}([ADC]) =$$

$$= \frac{AD \cdot BD}{2} + \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{AD \cdot BC}{2}.$$

**Observaţia** 3.16. *Deoarece o suprafaţă poligonală $[P]$ cu $n$ laturi se descompune în $n-2$ suprafeţe triunghiulare $[T_i]$, $i = \overline{1, n-2}$ (vezi Teorema (3.8)), aria acesteia este:*

$$\mathcal{A}([P]) = \sum_{i=1}^{n-2} \mathcal{A}([T_i]).$$

COROLARUL 3.17. *Dacă se consideră un paralelogram $ABCD$, $[AE]$ perpendiculara din vârful $A$ pe $DC$, atunci aria suprafeţei delimitată de acesta este:*

$$\mathcal{A}([ABCD]) = AE \cdot DC.$$

DEMONSTRAŢIE. Dacă se consideră suprafaţa delimitată de paralelogramul $ABCD$, ea se descompune în două suprafeţe triunghiulare $[DAC]$ şi $[CAB]$ cu $\Delta DAC \equiv \Delta BCA$.

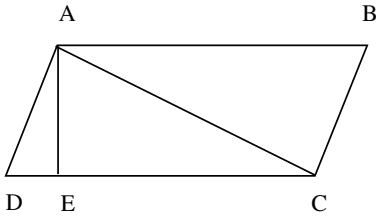


FIGURA 8. Aria suprafeţei delimitată de paralelogram

Atunci,
$$\mathcal{A}([ABCD]) = 2\mathcal{A}([ACD]) = 2 \cdot \frac{AE \cdot DC}{2} = AE \cdot DC.$$

COROLARUL 3.18. *Dacă se consideră un trapez $ABCD$ cu laturile $AB \parallel CD$, $AB < CD$ şi se construieşte înălţimea $[BE]$, $E \in DC$, atunci*
$$\mathcal{A}([ABCD]) = \frac{AB + CD}{2} \cdot BE.$$

DEMONSTRAŢIE. Se construieşte $BF \parallel AD$. Se descompune suprafaţa $[ABCD]$ în suprafaţa triunghiulară $[BFC]$ şi suprafaţa delimitată de paralelogramul $[ABFD]$.

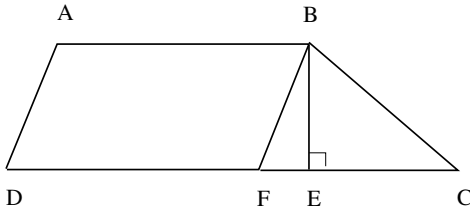


FIGURA 9. Aria suprafeţei delimitată de trapez

$$\begin{aligned}\mathcal{A}([ABCD]) &= \mathcal{A}([ABFD]) + \mathcal{A}([BFC]) = \\ &= BE \cdot DF + \frac{BE \cdot FC}{2} = \\ &= \frac{AB + CD}{2} \cdot BE.\end{aligned}$$

**Observaţia** 3.19. *Pentru simplitatea exprimării, când vom vorbi de aria unei suprafeţe poligonale vom spune* aria poligonului. *De exemplu, pentru aria unei suprafeţe triunghiulare $[ABC]$ vom spune aria triunghiului $ABC$ şi vom scrie $\mathcal{A}(ABC)$ sau $\mathcal{A}_{\Delta ABC}$, sau $\mathcal{A}_{ABC}$.*

În cele ce urmează vom studia proprietăţi ale patrulaterelor particulare: paralelogram, dreptunghi, pătrat, romb şi trapez.

**Observaţia** 3.20. *Aşa cum s-a văzut anterior, pentru a defini un patrulater avem nevoie de patru puncte distincte $A$, $B$, $C$, $D$, considerate în această ordine, ce îndeplinesc următoarele condiţii:*

- *oricare trei puncte sunt necoliniare;*
- *oricare două dintre segmentele: $[AB]$ şi $[CD]$ sau $[BC]$ şi $[DA]$ nu au niciun punct interior comun.*

**Definiţia** 3.21. *Figura care îndeplineşte condiţiile de mai sus, formată din reuniunea $[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$, este un* patrulater *şi se notează $ABCD$.*

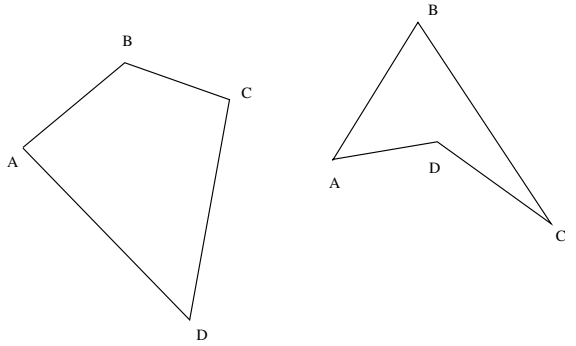



FIGURA 10. Patrulater

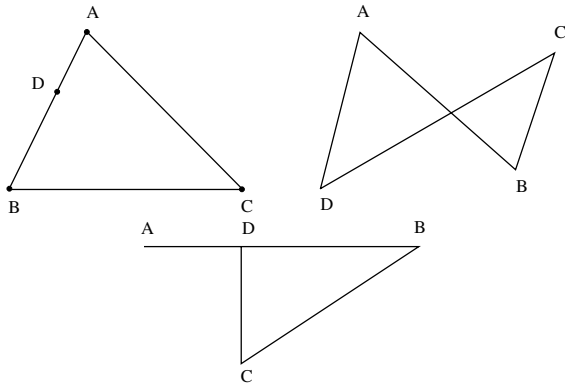



FIGURA 11. Figuri care nu sunt patrulatere

*Elementele patrulaterului:*

- punctele $A, B, C, D$ se numesc *vârfurile* patrulaterului;
- segmentele $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[DA]$ se numesc *laturile* patrulaterului;
- unghiurile $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle DAB$ se numesc *unghiurile* interioare ale patrulaterului;

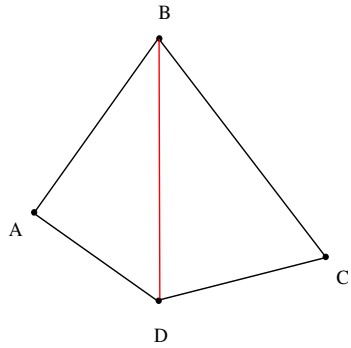



FIGURA 12. Elementele patrulaterului

- laturile $[AB]$ şi $[BC]$ (la fel $[BC]$ şi $[CD]$ etc.) se numesc *laturi consecutive*;
- două laturi care nu sunt consecutive se numesc *laturi opuse*;
- unghiurile $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle BCD$ ($\sphericalangle BCD$ şi $\sphericalangle CDA$ etc) se numesc *unghiuri consecutive*;
- segmentele $[AC]$ şi $[BD]$ se numesc *diagonalele patrulaterului*;
- suma lungimilor laturilor patrulaterului se numeşte *perimetrul patrulaterului*.

**Definiţia** 3.22. *Un patrulater se numeşte* convex *dacă, oricare ar fi o latură a sa, cele două vârfuri nesituate pe latura considerată se află de aceeaşi parte a dreptei suport a laturii respective.*

**Teorema** 3.23. *Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este* $360^\circ$.

DEMONSTRAŢIE. A se vedea Corolar (3.9).

## 2. Paralelogram

**Definiţia** 3.24. *Se numeşte* paralelogram *patrulaterul convex care are laturile opuse paralele.*




FIGURA 13. Paralelogram

### 2.1. Proprietăţi ale paralelogramului

**Propoziţia** 3.25. *Considerăm $ABCD$ un patrulater convex. Atunci $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă laturile opuse sunt congruente două câte două.*

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" Fie paralelogramul $ABCD$. Folosind definiţia paralelogramului, rezultă

$$AB \parallel CD, BC \parallel AD.$$

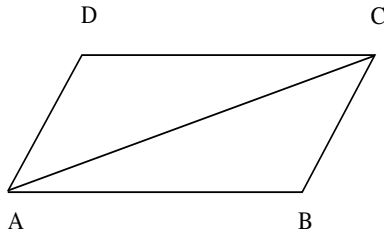



FIGURA 14. Proprietăţi ale paralelogramului

Se consideră secanta $AC$ care intersectează perechile de drepte paralele, menţionate anterior, în unghiuri alterne interne congruente:

$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD,$$

respectiv

$$\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle CAD.$$

Ţinând cont de aceste perechi de unghiuri congruente şi de latura $[AC]$, rezultă $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ (U.L.U). Din congruenţa triunghiurilor se obţine

$$[AB] \equiv [CD], [CB] \equiv [AD].$$

"$\Leftarrow$" Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu perechile de laturi opuse congruente, $[AB] \equiv [CD]$, $[CB] \equiv [AD]$. Construim diagonala $[AC]$ şi obţinem $\Delta ABC$ şi $\Delta CDA$. Deoarece $[AB] \equiv [CD]$, $[CB] \equiv [AD]$ şi $[AC]$ latură comună, rezultă, conform cazului de congruenţă (L.L.L), că $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$. Din congruenţa triunghiurilor, se obţine $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle CAD$ şi $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$, ceea ce implică $BC||AD$ şi $AB||CD$.

**Propoziţia** 3.26. *Dacă într-un patrulater convex două laturi opuse sunt congruente şi paralele, atunci patrulaterul este paralelogram.*

DEMONSTRAŢIE. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care se consideră $[AB] \equiv [CD]$ şi $AB||CD$. Construim diagonala $[AC]$ şi obţinem $\Delta ABC$ şi $\Delta ACD$.

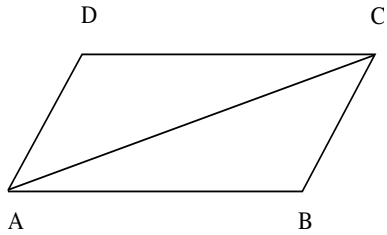


FIGURA 15. Proprietăţi ale paralelogramului

Din $AB||CD$ şi secanta $[AC]$ rezultă $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$. Deoarece $[AB] \equiv [CD]$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$, $[AC]$ latură comună, se obţine $\Delta ABC \equiv \Delta ACD$ (L.U.L). Congruenţa triunghiurilor implică $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle CAD$, ceea ce conduce la $AD||BC$.

**Propoziţia** 3.27. *Se consideră $ABCD$ un patrulater convex. Atunci $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă oricare două unghiuri opuse sunt congruente. În plus, patrulaterul convex $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă oricare două unghiuri consecutive sunt suplementare.*

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" Se construieşte diagonala $[AC]$ a paralelogramului $ABCD$. Se obţin două triunghiuri congruente $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$. Din congruenţa triunghiurilor, rezultă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$. Analog şi pentru cealaltă pereche de unghiuri.

Tot din $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ se obţin si următoarele perechi de unghiuri congruente: $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$.

În $\Delta ADC$, avem:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= m(\sphericalangle ADC) + m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle CAD) = \\ &= m(\sphericalangle ADC) + m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle ACB) = \\ &= m(\sphericalangle ADC) + m(\sphericalangle BCD). \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" În patrulaterul convex $ABCD$ avem:

$$m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = 360^\circ.$$

Folosind ipoteza: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$, obţinem

$2m(\sphericalangle A) + 2m(\sphericalangle D) = 360$ sau $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle D) = 180$.

Dar unghiurile $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle D$ sunt unghiuri interne şi de aceeaşi parte a secantei, unde dreptele sunt considerate $AB, CD$ iar secanta $AD$. Cum aceste unghiuri sunt suplementare, rezultă $AB||CD$. Analog şi pentru $AD||BC$.

Dacă în patrulaterul convex considerăm unghiurile alăturate suplementare, $m(\sphericalangle ADC) + m(\sphericalangle DCB) = 180^\circ$, conform consecinţelor "Teoremei de existenţă a dreptelor paralele", dreptele $AD$ şi $BC$ sunt paralele. Analog şi pentru $DC \parallel AB$.

**Propoziţia** 3.28. *Fie un patrulater convex $ABCD$. Atunci, $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă diagonalele se intersectează una pe alta în părţi congruente.*

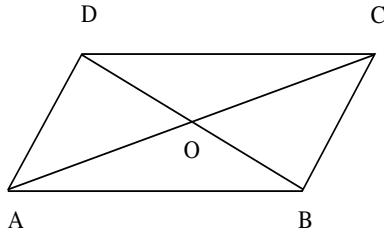



FIGURA 16. Proprietăţi ale paralelogramului

DEMONSTRAŢIE. Fie $ABCD$ un paralelogram în care intersecţia diagonalelor se notează cu $O$, $AC \cap BD = \{O\}$.

"$\Rightarrow$" Triunghiurile formate de diagonale sunt congruente, şi anume $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (U.L.U) ($\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle DCO$ - alterne interne formate de $AB||CD$ şi tăiate de secanta $AC$; $[AB] \equiv [CD]$; $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$ - alterne interne formate de $AB||CD$ şi tăiate de secanta $BD$). În aceste triunghiuri congruente, la unghiuri congruente se opun laturi congruente, adică $[AO] \equiv [OC], [BO] \equiv [OD]$.

"$\Leftarrow$" În patrulaterul convex $ABCD$ avem congruenţa de triunghiuri $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (L.U.L), ($[AO] \equiv [CO]$; $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$; $[BO] \equiv [DO]$). Rezultă că $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle CDO$. Aceste unghiuri sunt alterne interne formate de dreptele $AB$ şi $CD$, deci $AB||DC$.

Analog, congruenţa $\Delta AOD \equiv \Delta COB$ implică $AD||BC$.

Din $AB||DC$ şi $AD||BC$, rezultă $ABCD$ paralelogram.

## 3. Dreptunghiul

**Definiţia** 3.29. *Se numeşte* dreptunghi *un paralelogram care are un unghi drept.*

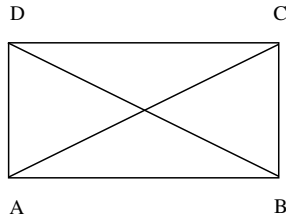



FIGURA 17. Dreptunghi

### 3.1. Proprietăţi ale dreptunghiului

Toate proprietăţile paralelogramului sunt adevărate şi pentru dreptunghi.

În plus, pentru că dreptunghiul este un paralelogram particular (are un unghi drept), mai are şi alte proprietăţi caracteristice numai lui.

**Propoziţia** 3.30. *Un patrulater convex este dreptunghi dacă şi numai dacă are toate unghiurile congruente şi deci toate sunt drepte.*

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" Fie dreptunghiul $ABCD$. Deoarece un dreptunghi este un paralelogram cu un unghi drept, unghiurile opuse sunt congruente şi cele alăturate sunt suplementare:

$$m(\sphericalangle ADC)+m(\sphericalangle DCB) = 180^\circ, \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC, m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ.$$

Rezultă că toate unghiurile dreptunghiului sunt drepte.

"$\Leftarrow$" Fie $ABCD$ un patrulater convex cu toate unghiurile congruente şi de măsură $90^\circ$. Atunci patrulaterul are două câte două unghiurile opuse congruente, deci este paralelogram. În plus, mai are şi unghiuri de măsură $90^\circ$, deci este dreptunghi.

**Propoziţia** 3.31. *Fie dreptunghiul $ABCD$. Atunci diagonalele $[AC]$ şi $[BD]$ sunt congruente.*

DEMONSTRAŢIE. Congruenţa diagonalelor rezultă din congruenţa triunghiurilor dreptunghice $\Delta ADC$ şi $\Delta DBC$, imediat.

**Propoziţia** 3.32. *Dacă diagonalele unui paralelogram $ABCD$ sunt congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.*

DEMONSTRAŢIE. Deoarece diagonalele paralelogramului sunt congruente, rezultă $\Delta ADC \equiv \Delta BCD$ (L.L.L). Această congruenţă implică :

$$\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle DCB.$$

Folosind egalitatea $m(\sphericalangle ADC) + m(\sphericalangle DCB) = 180^\circ$ şi congruenţa anterioară se obţine $m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ$.

## 4. Rombul

**Definiţia** 3.33. *Se numeşte* romb *un paralelogram care are două laturi consecutive congruente.*

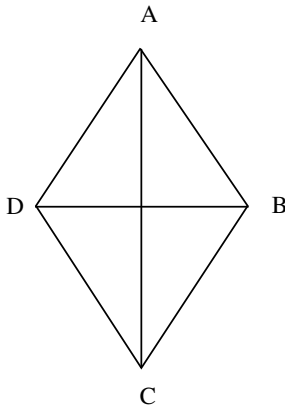


FIGURA 18. Romb

### 4.1. Proprietăţile rombului

Proprietăţile paralelogramului (teoremele directe) sunt adevărate şi în cazul rombului deoarece acest este un paralelogram. Acestea sunt:

- laturile opuse sunt congruente;
- unghiurile opuse sunt congruente;
- două unghiuri consecutive sunt suplementare;
- diagonalele au acelaşi mijloc.

Deoarece rombul este un paralelogram particular, are şi proprietăţi care îi sunt specifice.

**Propoziţia** 3.34. *Un patrulater convex $ABCD$ este romb dacă şi numai dacă toate laturile sunt congruente.*

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" $ABCD$ este romb, atunci este paralelogram cu două laturi consecutive congruente. Fie de exemplu, laturile consecutive congruente

$$[AB] \equiv [AD]. \tag{18}$$

Folosind Propoziţia (3.25), $ABCD$ paralelogram, implică

$$[AB] \equiv [BC], [AD] \equiv [BC]. \tag{19}$$

Din (18) şi (19), rezultă $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [AD]$.

"$\Leftarrow$" Dacă $ABCD$ este un patrulater cu toate laturile congruente, conform Propoziţiei (3.25), este paralelogram. Deoarece două laturi consecutive sunt congruente, atunci el este romb.

**Propoziţia** 3.35. *Într-un romb diagonalele sunt perpendiculare între ele şi sunt bisectoarele unghiurilor lui.*

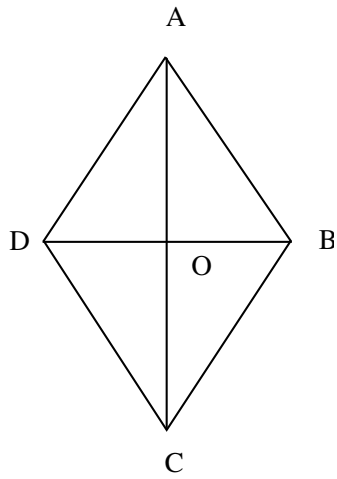



FIGURA 19. Proprietăţi ale rombului

DEMONSTRAŢIE. Se consideră rombul $ABCD$ cu diagonalele $[AC]$ şi $[BD]$ care se intersectează în punctul $O$. Deoarece toate laturile rombului sunt congruente, triunghiurile $\Delta ABD$ şi $\Delta DBC$ sunt isoscele. $ABCD$ este paralelogram, deci $O$ este mijlocul diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$. Aşadar, în triunghiul isoscel $\Delta ABD$, deoarece $[AO]$ este mediană, ea va fi şi bisectoare pentru unghiul $\sphericalangle DAB$, dar şi înălţime, adică $AO \perp DB$.

**Propoziţia** 3.36. *Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci el este romb.*

DEMONSTRAŢIE. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu diagonalele $AC \perp BD$. Se observă că triunghiurile dreptunghice

$\Delta AOB$ şi $\Delta BOC$ sunt congruente conform cazului (C.C) ($[BO]$ latură comună, $[AO] \equiv [OC]$). Din congruenţă, rezultă $[AB] \equiv [BC]$, adică $ABCD$ este romb.

**Propoziţia** 3.37. *Dacă într-un paralelogram $ABCD$ o diagonală este bisectoarea unui unghi, atunci paralelogramul este romb.*

DEMONSTRAŢIE. În paralelogramul $ABCD$, presupunem că diagonala $[AC]$ este bisectoare pentru unghiului $\sphericalangle BAD$. Vom demonstra că două laturi consecutive sunt congruente.

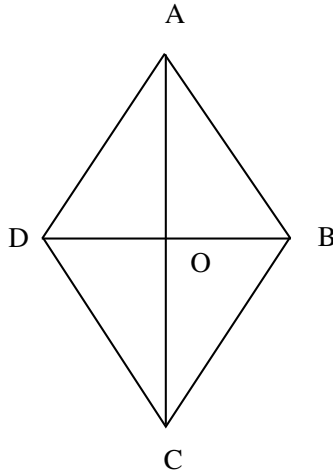



FIGURA 20. Proprietăţi ale rombului

Din paralelismul $AD \parallel BC$ şi secanta $AC$, se obţine congruenţa unghiurilor $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACB$. $[AC]$ fiind bisectoare unghiului $\sphericalangle DAB$, implică $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle CAB$. Aşadar, se obţine:

$$\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ACB,$$

adică triunghiul $\Delta ABC$ isoscel ($[AB] \equiv [BC]$).

## 5. Pătrat

**Definiţia** 3.38. *Se numeşte* pătrat *un dreptunghi care are două laturi consecutive congruente.*

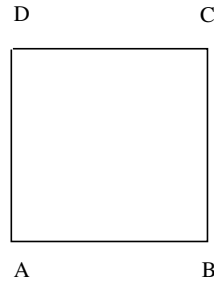


FIGURA 21. Pătrat

## 5.1. Proprietăţile pătratului

Pătratul, fiind romb şi dreptunghi, are toate proprietăţile dreptunghiului şi toate proprietăţile rombului (teoremele directe).

Aceste proprietăţi sunt:

- toate laturile sunt congruente;
- toate unghiurile sunt congruente ceea ce implică, toate unghiurile sunt drepte;
- diagonalele au acelaşi mijloc;
- diagonalele sunt congruente;
- diagonalele sunt perpendiculare între ele;
- diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor lui.

În plus, pătratul admite patru axe de simetrie şi anume: două sunt mediatoarele laturilor lui şi două sunt dreptele care includ diagonalele lui.

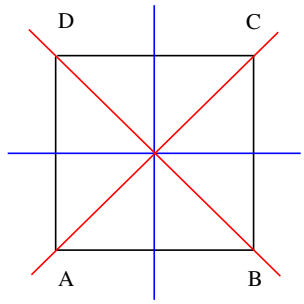


FIGURA 22. Axele de simetrie ale pătratului

## 6. Trapez

**Definiţia** 3.39. *Se numeşte* trapez *un patrulater cu două laturi paralele şi celelalte două laturi neparalele.*

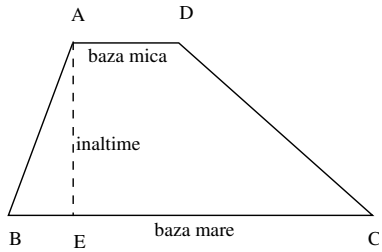



FIGURA 23. Trapez ($BC \parallel AD$)

*Cazuri particulare de trapez*

**Definiţia** 3.40. *Se numeşte*

- trapez dreptunghic *un trapez cu una dintre laturile neparalele perpendiculară pe baze;*
- trapez isoscel *un trapez cu laturile neparalele congruente.*

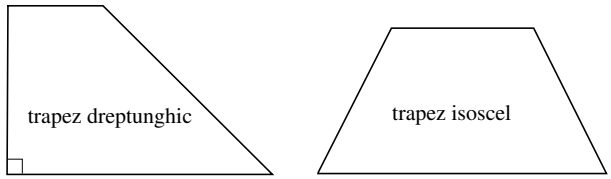



FIGURA 24. Cazuri particulare de trapez

### 6.1. Proprietăţi ale trapezului isoscel

**Propoziţia** 3.41. *Un trapez este isoscel dacă şi numai dacă unghiurile alăturate unei baze sunt congruente.*

DEMONSTRAŢIE. " $\Rightarrow$ " Se consideră $ABCD$ un trapez isoscel ($AD \parallel BC$, $[AB] \equiv [DC]$). Se construieşte $DE \parallel AB$, $E \in (BC)$.

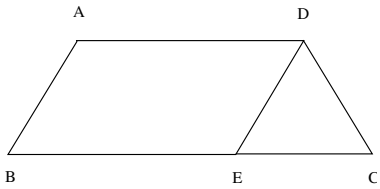


FIGURA 25. Trapez isoscel

Patrulaterul $ABED$ este paralelogram ($DE||AB$ şi $AD||BE$), deci $[DE] \equiv [AB]$. Folosind şi ipoteza $[AB] \equiv [DC]$, rezultă congruenţa $[DC] \equiv [DE]$. Aşadar, $\Delta EDC$ este isoscel ($\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle DEC$). Considerând paralelele $AB||DE$ tăiate de secanta $BC$, se obţine $\sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle ABC$ şi, mai mult, $\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle ABC$. Unghiurile alăturate bazei mici sunt suplementare unghiurilor alăturate bazei mari, deci sunt şi ele congruente.

" $\Leftarrow$ " Fie $ABCD$ un trapez ($AD||BC$), pentru care este adevărtă congruenţa $\sphericalangle DCB \equiv \sphericalangle ABC$. Construim $DE||AB$, $E \in (BC)$. Avem $\sphericalangle DEC \equiv \sphericalangle ABC$ (corespondente). Din relaţiile anterioare, rezultă $\sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle DEC$, adică triunghiul $\Delta DEC$ este isoscel, cu $[DE] \equiv [DC]$. Deoarece $ABED$ este paralelogram, se obţine $[AB] \equiv [DE]$. Aşadar, laturile neparalele în trapez sunt congruente, $[AB] \equiv [DC]$, deci trapezul este isoscel.

**Propoziţia** 3.42. *Un trapez este isoscel dacă şi numai dacă diagonalele sunt congruente.*

DEMONSTRAŢIE. " $\Rightarrow$ " Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AD \parallel BC$, $[AB] \equiv [DC]$.

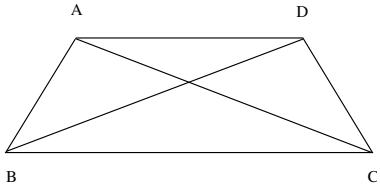


FIGURA 26. Proprietăţi ale trapezului isoscel (directa)

Se construiesc diagonalele trapezului şi se consideră $\Delta ABC$ şi $\Delta DCB$ în care: $[AB] \equiv [DC]$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$, $[BC]$ comună.

Rezultă congruenţa $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$ (L.U.L) din care se obţine $[AC] \equiv [BD]$.

" $\Leftarrow$ " Se consideră $ABCD$ un trapez cu diagonale congruente ($[AC] \equiv [DB]$).

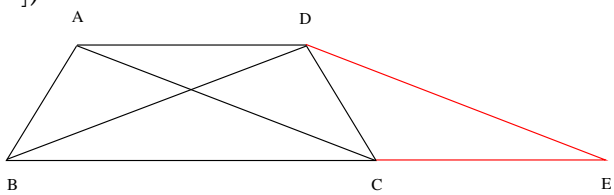



FIGURA 27. Proprietăţi ale trapezului isoscel (reciproca)

Se construieşte $DE \parallel AC$, $E \in BC$. Folosind şi paralelismul $AD \parallel BC$, se obţine paralelogramul $ACED$. Din proprietăţile paralelogramului, rezultă $[DE] \equiv [AC]$. Folosind în plus şi ipoteza $[AC] \equiv [DB]$, se obţine $[DE] \equiv [DB]$, adică $\Delta DBE$ este isoscel ($\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DEB$). Dacă se consideră dreptele paralele $DE \parallel AC$ şi secanta $BE$, se formează unghiurile corespondente congruente $\sphericalangle DEB \equiv \sphericalangle ACB$. Se obţine astfel că $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ACB$. Atunci, $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$ (L.U.L) deoarece $[AC] \equiv [DB]$, $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ACB$, $[CB] \equiv [BC]$, ceea ce implică $[AB] \equiv [DC]$.

### 6.2. Linia mijlocie într-un trapez

**Definiţia** 3.43. *Segmentul care uneşte mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numeşte* linia mijlocie *a trapezului.*

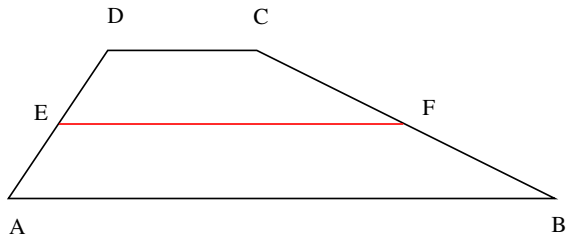



FIGURA 28. Linia mijlocie în trapez

**Teorema** 3.44. *Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele şi are ca lungime jumătate din suma lungimilor bazelor.*

DEMONSTRAŢIE. Se construieşte dreapta $AF$, $AF \cap BC = \{G\}$.

Se formează două triunghiuri congruente, $\triangle ADF \equiv \triangle GCF$ (U.L.U), deoarece $\sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle FCG$, $[DF] \equiv [FC]$, $\sphericalangle DFA \equiv \sphericalangle CFG$.

Din congruenţa celor două triunghiuri rezultă $[AF] \equiv [FG]$ şi $[AD] \equiv [CG]$.

Aşadar, în triunghiul $\triangle ABG$, $EF$ este linie mijlocie. Folosind proprietăţile acesteia, se obţin:

$$EF \parallel BG, EF = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}(BC + CG) = \frac{1}{2}(BC + AD).$$

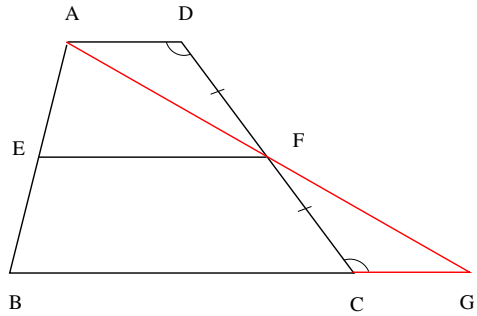



FIGURA 29. Proprietăţile liniei mijlocii în trapez

**Observaţia** 3.45. *Paralelogramul, dreptunghiul, pătratul, rombul, trapezul sunt poligoane cu patru laturi. Formulele de calcul pentru aria suprafeţelor delimitate de ele se găsesc în Secţiunea (1.1).*

## 7. Relaţii metrice în patrulater

**Teorema** 3.46 (Relaţia lui Euler). *Se consideră punctele arbitrar alese în plan, $A$, $B$, $C$, $D$. Se notează cu $E$ mijlocul segmentului $[AC]$ şi cu $F$ mijlocul segmentului $[BD]$. Atunci are loc egalitatea:*

$$4EF^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2.$$

DEMONSTRAŢIE. În triunghiurile $\Delta FAC$, $\Delta DAB$, $\Delta DBC$, cu medianele $[EF]$, $[AF]$, respectiv $[FC]$, se aplică Teorema (2.49) şi se obţin următoarele egalităţi:

$$4EF^2 = 2(FA^2 + FC^2) - AC^2, \tag{20}$$

(21) $$2AF^2 = AD^2 + AB^2 - \frac{1}{2}DB^2,$$

(22) $$2CF^2 = CD^2 + CB^2 - \frac{1}{2}DB^2.$$

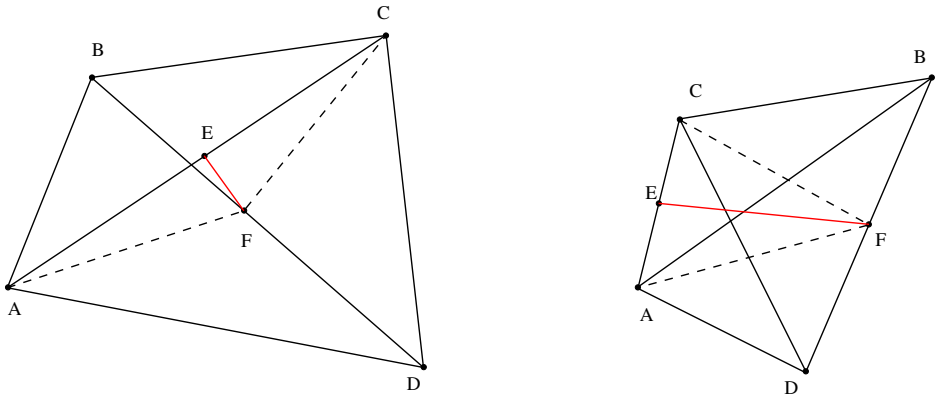



FIGURA 30. Relaţia Euler

Se înlocuiesc ecuaţiile (21) şi (22) în (20) şi se obţine relaţia din concluzie.

**Teorema** 3.47. *Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, $E$ mijlocul laturii $[AD]$ şi $F$ mijlocul laturii $[BC]$. Atunci are loc inegalitatea:*

$$EF \leq \frac{1}{2}(AB + CD).$$

*Egalitatea este adevărată dacă şi numai dacă $AB \parallel CD$.*

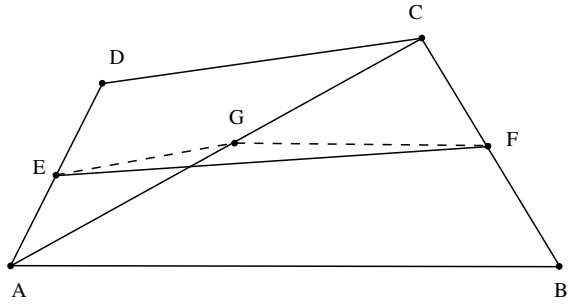



FIGURA 31. Relaţii metrice în trapez

DEMONSTRAŢIE. Se consideră punctul $G$, mijlocul diagonalei $[AC]$. În triunghiurile $\Delta DAC$ şi $\Delta ACB$, $[EG]$ şi $[GF]$ sunt linii mijlocii. Rezultă:

$$EG \parallel DC, EG = \frac{1}{2}DC, GF \parallel AB, GF = \frac{1}{2}AB.$$

Relaţia $EF \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$ devine

$$EF \leq EG + GF.$$

Această inegalitate este adevărată în orice triunghi.

Egalitatea

$$EF \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$$

este echivalentă cu egalitate în

$$EF \leq EG + GF$$

ceea ce înseamnă că $G$ aparţine dreptei $EF$. Apartenenţa $G \in EF$ este echivalentă, datorită paralelismului $EG \parallel DC$, $GF \parallel AB$, cu $ABCD$ este trapez.

**Teorema** 3.48. *Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Atunci, este adevărată inegalitatea:*

$$AC^2 + BD^2 \leq AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD.$$

*Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $ABCD$ este trapez.*

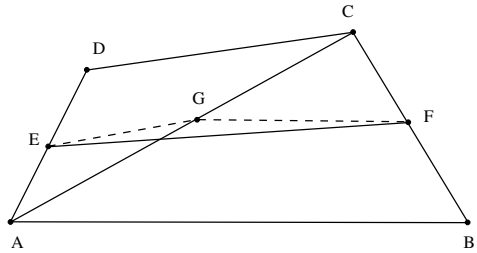



FIGURA 32. Relaţii metrice în trapez

DEMONSTRAŢIE. Se consideră $G$ mijlocul diagonalei $[AC]$, $E$ mijlocul laturii $[AD]$ şi $F$ mijlocul laturii $[BC]$. Conform Teoremei

(3.47), avem $EF \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$. Se ridică la pătrat această inegalitate şi termenul $4EF^2$ se va înlocui cu expresia lui obţinută aplicând Teorema (3.46). Se obţine:

$$AB^2 + BD^2 + DC^2 + CA^2 - AD^2 - BC^2 \leq$$
$$\leq AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD,$$

ceea ce conduce la inegalitatea din enunţul teoremei.

Egalitatea se va obţine dacă şi numai dacă se obţine egalitate în $EF \leq \frac{1}{2}(AB + CD)$, adică atunci când $ABCD$ este trapez.

CAPITOLUL 4

# Cerc

## 1. Definiţii, proprietăţi

**Definiţia** 4.1. *Se numeşte* cerc *mulţimea punctelor din plan egal depărtate de un punct fixat $O$, numit* centrul cercului. *Distanţa egală faţă de centrul cercului se numeşte* rază.

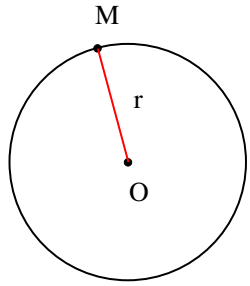



FIGURA 1. Cerc

**Notaţie**:
$\mathcal{C}(O, r) = \{M / d(O, M) = r\}$.
$r$ este raza cercului, $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$.

**Definiţia** 4.2. *Se consideră cercul de centru $O$ şi rază $r$, $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$.*
Interiorul cercului, *notat Int $\mathcal{C}(O, r)$, se defineşte ca fiind mulţimea punctelor $N$ din plan pentru care $d(O, N) < r$.*
Exteriorul cercului, *notat Ext $\mathcal{C}(O, r)$, se defineşte ca fiind mulţimea punctelor $P$ din plan pentru care $d(O, P) > r$.*

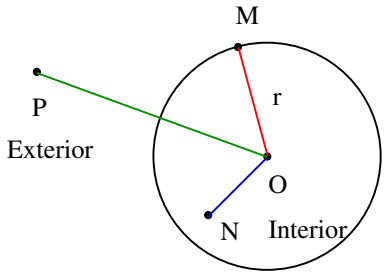



FIGURA 2. Interiorul/exteriorul unui cerc

**Propoziţia** 4.3. *Se consideră cercul de centru $O$ şi rază $r$, $\mathcal{C}(O,r)$ şi $A$ şi $B$ două puncte interioare cercului. Atunci, $[AB] \subset$ Int $\mathcal{C}(O,r)$. Altfel spus, interiorul unui cerc este mulţime convexă.*

DEMONSTRAŢIE. Se consideră două puncte situate în interiorul unui cerc, $A, B \in$ Int $\mathcal{C}(O,r)$, $d(O,A) < r$ şi $d(O,B) < r$.

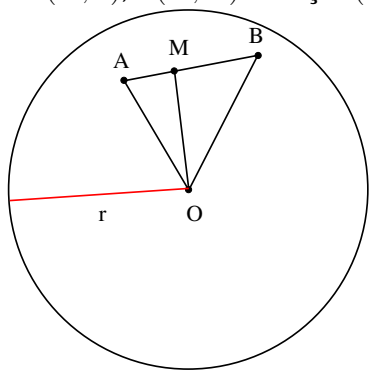



FIGURA 3. Interiorul unui cerc

Se consideră un punct arbitrar $M \in [AB]$. În triunghiul $\Delta ABO$, avem următoarele situaţii $OM < OA$ sau $OM < OB$. Deoarece ambele segmente $[OA]$ şi $[OB]$ au lungimi mai mici decât $r$, rezultă că $OM < r$, adică $M$ este punct interior cercului.

**Definiţia** 4.4. *Mulţimea $\mathcal{C}(O,r) \cup$ Int $\mathcal{C}(O,r)$ se numeşte* disc *de centru $O$ şi rază $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$.*

$$\mathcal{C}(O,r) \cup \text{ Int } \mathcal{C}(O,r) = \{M / d(M,O) \leq r\}.$$

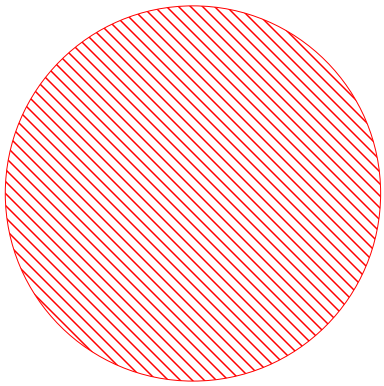


FIGURA 4. Disc

**Definiţia** 4.5. *Prin cercuri* congruente *se înţelege două cercuri ale căror raze sunt egale.*

**Definiţia** 4.6. Coarda *este segmentul cu capetele în două puncte ale cercului. Coarda care conţine centrul cercului se numeşte* diametru.

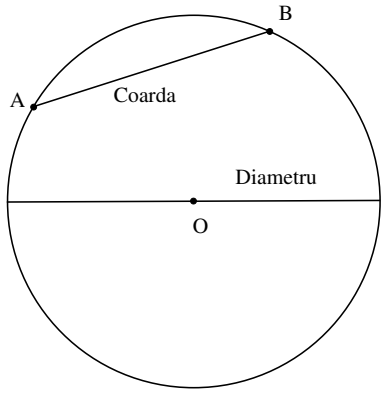



FIGURA 5. Coardă/Diametru

**Definiţia** 4.7. *Dacă se consideră $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc de centru $O$ şi rază $r$, atunci intersecţia dintre oricare dintre cele două semiplane delimitate de dreapta suport a diametrului şi cerc, se numeşte* semicerc.

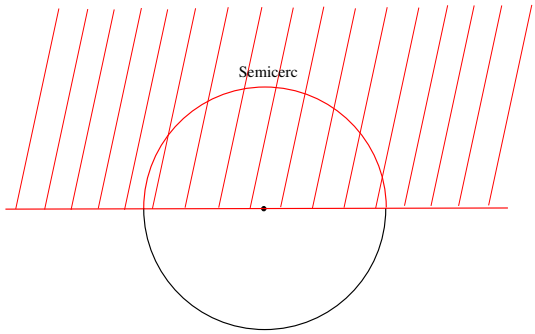



FIGURA 6. Semicerc

**Teorema** 4.8. *Dacă trei puncte sunt necoliniare, atunci ele determină un cerc şi numai unul.*

DEMONSTRAŢIE. Se consideră trei punctele necoliniare $A$, $B$, $C$. Se ştie că mediatoarele laturilor triunghiului $\Delta ABC$ sunt concurente. Fie punctul de concurenţă notat cu $O$. Conform proprietăţii punctelor de pe mediatoarea unui segment, $[OA] \equiv [OB] \equiv [OC]$. Altfel spus, punctul $O$ se găseşte la distanţă egală faţă de cele trei puncte, adică punctele se află pe un cerc cu centrul în $O$ şi rază $OA$.

**Propoziţia** 4.9. *Lungimea unei coarde care nu conţine centrul cercului este mai mică decât dublul razei. Într-un cerc diametrul este cea mai mare dintre coarde.*

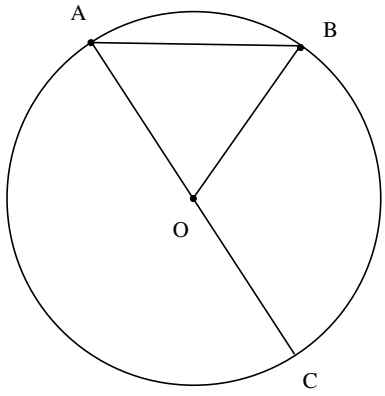



FIGURA 7. Compararea coardei cu diametrul

DEMONSTRAŢIE. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O,r)$, $[AB]$ o coardă în cerc, $A,B \in \mathcal{C}(O,r)$ şi $[AC]$ diametrul cercului, $C \in \mathcal{C}(O,r)$. În triunghiul $\Delta AOB$, avem $OA = OB = r$, $OC = r$, $AB < OA+OB = 2r$, $AB < AC$.

### 1.1. Poziţia unei drepte faţa de un cerc

Se consideră o dreaptă $h$ şi un cerc $\mathcal{C}(O,r)$.

Poziţia dreptei faţă de cerc poate fi în una din următoarele situaţii:

- Dreapta are cu cercul două puncte comune, dacă distanţa de la punctul $O$ la dreapta $h$ este mai mică decât $r$ ($d(O,h) < r$) şi atunci dreapta se numeşte *secantă*;

  Într-adevăr, dacă dreapta $h$ trece prin centrul cercului, atunci există câte un unic punct $A$, respectiv $B$ pe cele două semidrepte determinate de $O$ pe dreapta $h$, aşa încât $OA = OB = r$.

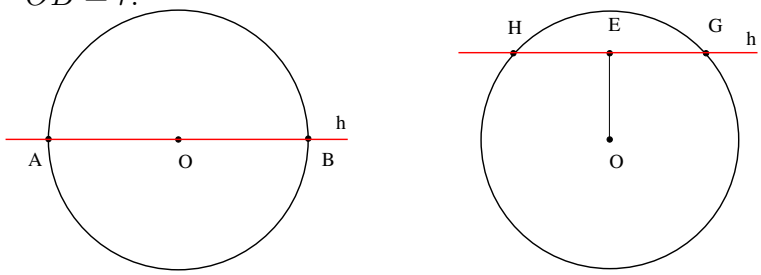



FIGURA 8. Secantă

Dacă $O \notin h$, se consideră $OE \perp h, E \in h$. Pe cele două semidrepte determinate pe $h$ de punctul $E$ se consideră acele puncte $G$ şi $H$ aflate la distanţa $\sqrt{r^2 - OE^2}$. Aceste două puncte sunt unic alese. Deoarece $OE \perp h$ se formează două triunghiuri dreptunghice $\Delta OEG$ şi $\Delta OEH$. Aplicând Teorema lui Pitagora în aceste triunghiuri, rezultă $OG^2 = OE^2 + EG^2 = OE^2 + r^2 - OE^2 = r^2$. Analog, $OH^2 = r^2$. Deci punctele $G$ şi $H$ sunt puncte ale cercului.

Considerăm un punct arbitrar $M \in h$, cu condiţia $M \neq G$, $M \neq H$. Atunci $EM < \sqrt{r^2 - OE^2}$ sau $EM > \sqrt{r^2 - OE^2}$.

În ambele cazuri, calculând $OM^2 = OE^2 + EM^2$ se obţine $OM^2 < r^2$ sau $OM^2 > r^2$, adică punctul $M$ este interior sau exterior cercului.

- Dreapta are un singur punct comun cu cercul, dacă distanţa de la punctul $O$ la dreapta $h$ este egală cu $r$ ($d(O, h) = r$) şi atunci dreapta se numeşte *tangentă*;

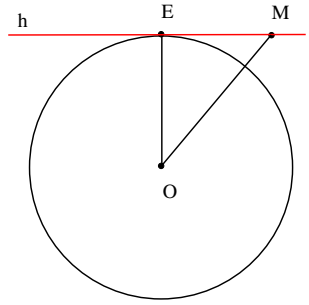



FIGURA 9. Tangenta

Într-adevăr, dacă $OE \perp h$, $E \in h$ şi $OE = r$, pentru orice punct $M \in h$, $M \neq E$, avem,

$$OM > OE = r.$$

Deci $M$ este punct exterior cercului.

- Dreapta nu are niciun punct comun cu cercul, dacă distanţa de la punctul $O$ la dreapta $h$ este mai mare decât $r$ ($d(O, h) > r$) şi atunci dreapta se numeşte *exterioară* cercului.

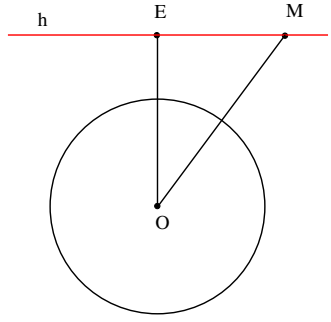



FIGURA 10. Dreaptă exterioară

Într-adevăr, dacă $OE \perp h$, $E \in h$ şi $OE > r$, considerând un punct arbitrar $M \in h$, se obţine inegalitatea $OM > OE > r$, adică $M$ este punct exterior cercului.

**Teorema** 4.10. *Tangenta la un cerc este perpendiculară pe rază în punctul de contact. Reciproc, dacă $T$ este un punct al unui cerc dat $\mathcal{C}(O, r)$ şi $ST$ tangenta sa în punctul $T$, atunci raza $OT$ este perpendiculară pe această tangentă.*

DEMONSTRAŢIE. "$\Rightarrow$" Fie $T \in \mathcal{C}(O, r)$, $OT = r$ rază. Construim o dreaptă $ST \perp OT$ şi arătăm că $ST$ este tangenta la cerc, adică are în comun cu cercul doar punctul $T$.

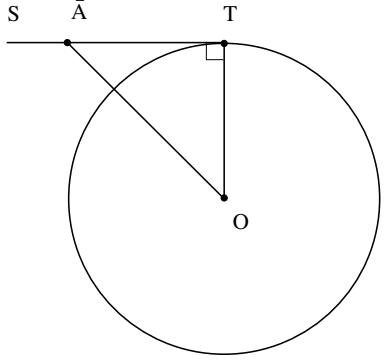



FIGURA 11. Tangenta la cerc (implicaţia directă)

Fie un punct arbitrar $A \in ST$, $A \neq T$. Triunghiul $\Delta AOT$ este dreptunghic în $T$, iar $[OA]$ este ipotenuză. Rezultă $OA > OT = r$, adică $A$ aparţine exteriorului cercului.

"$\Leftarrow$" Fie $T \in \mathcal{C}(O, r)$ şi construim $ST$ tangenta la cerc în punctul $T$. Vrem să demonstrăm că raza $OT$ este perpendiculată pe tangentă.

Presupunem prin absurd că $OT$ nu este perpendiculară pe $ST$. Atunci există un punct $P \in ST$, cu proprietatea că $OP \perp ST$.

Se alege un punct $Q \in (TP$, astfel încât $[QP] \equiv [PT]$. Se obţin două triunghiuri dreptunghice congruente $\Delta OPT \equiv \Delta OPQ$. Rezultă $[OT] \equiv [OQ]$, adică $OQ = r$. Aşadar, $Q \in \mathcal{C}(O, r)$ şi $Q \in ST$. Fals, deoarece tangenta şi cercul au un singur punct comun.

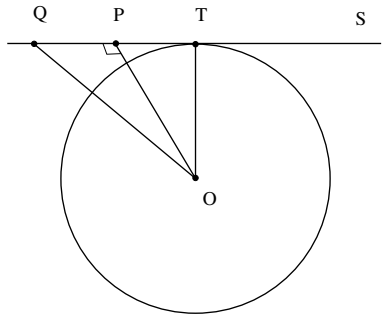



FIGURA 12. Tangenta la cerc (implicaţia reciprocă)

**Observaţia** 4.11. *Proprietăţi ale tangentei:*

- *Dintr-un punct exterior $A$ al unui cerc de centru $O$ se pot duce două tangente la acest cerc şi numai două, fie acestea notate $[AT]$ şi $[AT']$.*
- $[AT] \equiv [AT']$.
- $[OA]$ *bisectoarea unghiului* $\sphericalangle TAT'$.

## 2. Unghiuri şi arce în cerc

**Definiţia** 4.12. *Într-un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, se numeşte* unghi la centru *un unghi cu vârful în centrul cercului.*

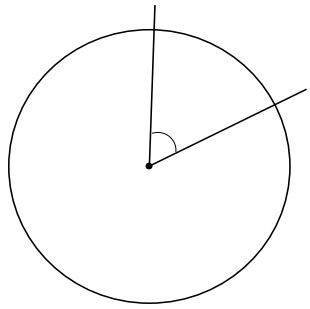


FIGURA 13. Unghi la centru

**Definiţia** 4.13. *Se consideră două puncte pe cerc care nu sunt diametral opuse, $A, B \in \mathcal{C}(O, r)$. Se numeşte* arcul mic $\overset{\frown}{AB}$, *mulţimea de*

*puncte obţinută din intersecţia* $\mathcal{C}(O,r) \cap Int\ (\sphericalangle AOB) \cup \{A,B\}$. *Se numeşte* arcul mare $\overset{\frown}{AXB}$, *mulţimea punctelor* $\mathcal{C}(O,r) \cap Ext\ (\sphericalangle AOB) \cup \{A,B\}$.

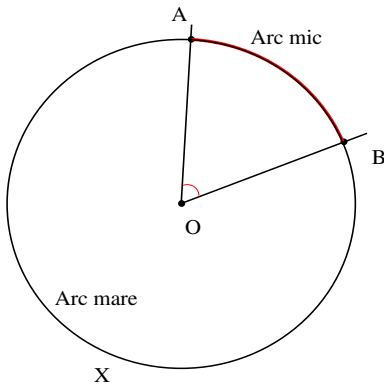


FIGURA 14. Arc de cerc

**Definiţia** 4.14. *Se consideră* $A, B \in \mathcal{C}(O,r)$.
*Dacă punctele* $A$ *şi* $B$ *nu sunt diametral opuse:*

Măsura arcului mic $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\sphericalangle AOB)$;
Măsura arcului mare $m(\overset{\frown}{AXB}) = 360^\circ - m(\sphericalangle AOB)$;

*Dacă punctele* $A$ *şi* $B$ *sunt diametral opuse:*

Măsura arcului $m(\overset{\frown}{AB}) = 180^\circ$.

**Definiţia** 4.15. *Două sau mai multe arce ale aceluiaşi cerc sau făcând parte din cercuri congruente se numesc* arce congruente *dacă au aceeaşi măsură.*

**Teorema** 4.16. *În acelaşi cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente şi reciproc, la coarde congruente corespund arce congruente.*

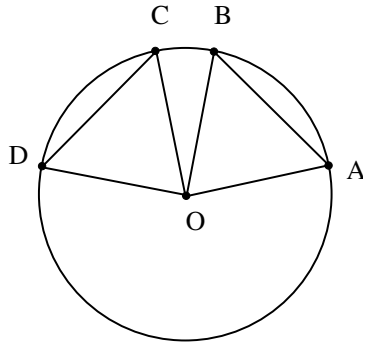



FIGURA 15. Arce congruente $\approx$ coarde congruente

DEMONSTRAŢIE. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune două coarde $[AB]$ şi $[CD]$ în cercul $\mathcal{C}(O,r)$.

"$\Rightarrow$" Se consideră că $[AB] \equiv [CD]$. Cele două coarde împreună cu centrul cercului, punctul $O$, determină două triunghiuri congruente

$$\Delta AOB \equiv \Delta COD \text{ (L.L.L)}$$

($[AO] \equiv [OC]$, $[BO] \equiv [OD]$, ca raze şi $[AB] \equiv [CD]$).

Congruenţa triunghiurilor implică $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$, adică $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$.

"$\Leftarrow$" Dacă $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$, atunci $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$. Congruenţa acestor unghiuri, împreună cu $[AO] \equiv [OC]$, $[BO] \equiv [OD]$, implică $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (L.U.L) . Rezultă astfel că $[AB] \equiv [CD]$.

**Teorema** 4.17. *Perpendiculara din centrul unui cerc pe o coardă a aceluiaşi cerc o înjumătăţeşte.*

*Dacă un diametru este perpendicular pe o coardă a aceluiaşi cerc atunci el determină, pe fiecare din arcele subîntinse de coardă, arce congruente.*

DEMONSTRAŢIE. Se consideră coarda $[AB]$ şi diametrul $[CD]$ în cercul $\mathcal{C}(O,r)$, cu proprietatea că $AB \perp CD$, $AB \cap CD = \{E\}$. Se formează două triunghiuri dreptunghice, congruente

$$\Delta AEO \equiv \Delta BEO \text{ (C.I)}$$

($[OE]$ comună, $[OA] \equiv [OB]$ raze în cerc), din care rezultă congruenţa $[AE] \equiv [EB]$.

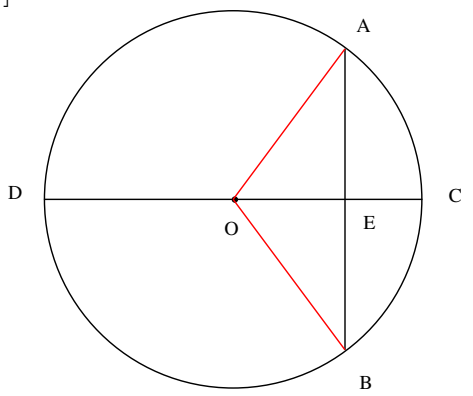



FIGURA 16. Proprietăţi ale coardelor în cerc

De asemenea, se obţine şi $\sphericalangle AOE \equiv \sphericalangle EOB$, adică arcele mici $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{CB}$ şi arcele mari $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{DB}$.

**Teorema** 4.18. *În acelaşi cerc sau în cercuri congruente, dacă două coarde sunt congruente atunci ele sunt egal depărtate de centru şi reciproc.*

*Toate punctele unei coarde, mai puţin capetele ei, sunt faţă de centru, la distanţe mai mici decât raza cercului.*

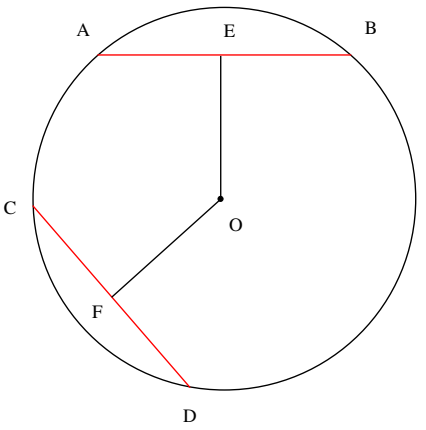



FIGURA 17. Proprietăţi ale coardelor în cerc

DEMONSTRAŢIE. În cercul $\mathcal{C}(O,r)$ se consideră coardele congruente $[AB]$ şi $[CD]$. Fie $OE \perp AB$, $E \in [AB]$ şi $OF \perp CD$, $F \in [CD]$. Deoarece triunghiurile formate de coarde cu centrul cercului, $\Delta AOB$ şi $\Delta COD$ sunt isoscele, $[OE]$ şi $[OF]$ sunt şi mediane. Din

$$AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = CF, [OA] \equiv [OC],$$

rezultă congruenţa $\Delta AEO \equiv \Delta COF$, (I.C.), de unde se obţine concluzia $[OE] \equiv [OF]$.

Pentru demonstraţia reciprocei se va folosi congruenţa triunghiurilor dreptunghice $\Delta AEO$ şi $\Delta COF$.

**Teorema** 4.19. *Fie cercul $\mathcal{C}(O,r)$, $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde paralele şi $[EF]$ un diametru al cercului perpendicular pe cele două coarde. Dacă punctele $A$ şi $C$ se află pe acelaşi semicerc delimitat de diametrul $[EF]$, atunci atât arcele mici $\widehat{AC}$ şi $\widehat{BD}$, cât şi coardele $[AC]$ şi $[BD]$ sunt congruente.*

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $EF \perp AB$ şi $EF \perp CD$, rezultă, din Teorema (4.17), $\widehat{AE} \equiv \widehat{EB}$ şi $\widehat{CF} \equiv \widehat{FD}$.

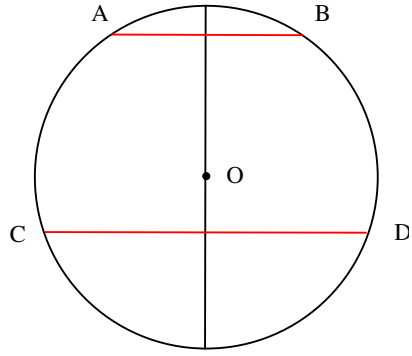



FIGURA 18. Proprietăţi ale arcelor şi coardelor în cerc

Prin calcul se obţine:

$$\begin{aligned} m(\widehat{AC}) &= 180^\circ - m(\widehat{AE}) - m(\widehat{FC}) = \\ &= 180^\circ - m(\widehat{BE}) - m(\widehat{FD}) = \\ &= m(\widehat{BD}). \end{aligned}$$

Din $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{DB}$, conform Teoremei (4.16), rezultă $[AC] \equiv [BD]$.

**Definiţia** 4.20. *Se numeşte* unghi înscris în cerc *un unghi cu vârful pe cerc şi laturile două coarde în cerc.*

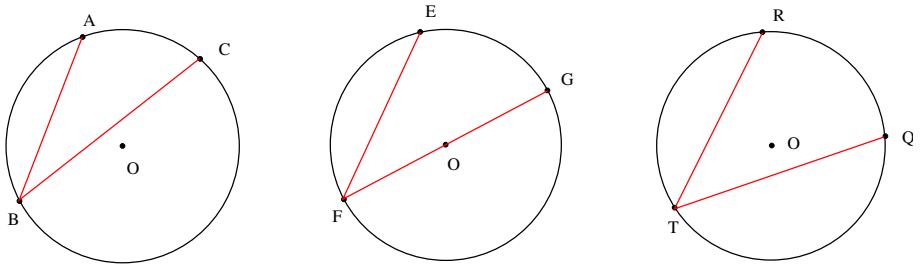



FIGURA 19. Unghi înscris

**Teorema** 4.21. *Măsura unui unghi cu vârful pe cerc care are una dintre laturi secantă iar cealaltă tangentă este jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.*

DEMONSTRAŢIE. Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră coarda $[AT]$ şi tangenta la cerc, $ST$. Vom demonstra că $m(\sphericalangle STA)$ este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

Caz 1. Dacă $m(\sphericalangle STA) < 90°$.

Se arată că $m(\sphericalangle STA) = \dfrac{1}{2} m(\overset{\frown}{APT})$.

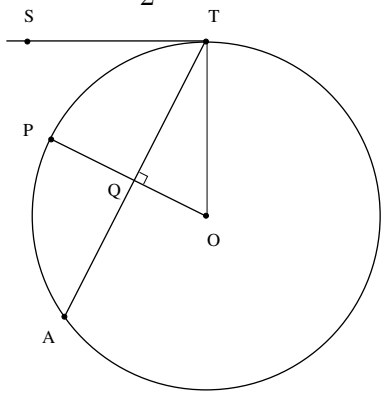



FIGURA 20. Măsura unui unghi cu vârful pe cerc (caz 1)

Se construieşte dreapta $OP \perp AT$, unde $OP \cap AT = \{Q\}$ şi $P \in \mathcal{C}(O, r)$.

În $\Delta AOT$ isoscel ($[AO] \equiv [OT]$ raze în cerc), înălţimea $[OQ]$ este şi bisectoare, deci $m(\sphericalangle POT) = m(\sphericalangle POA)$. Deoarece $\sphericalangle TOA$ este unghi cu vârful în centrul cercului, $m(\sphericalangle TOA) = m(\overset{\frown}{APT})$.

Unghiurile $\sphericalangle POT$ şi $\sphericalangle STA$ au laturile perpendiculare, deci sunt congruente. Rezultă egalitatea:

$$m(\sphericalangle STA) = m(\sphericalangle POT) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle TOA) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{APT}).$$

Caz 2. Dacă $m(\sphericalangle STA) > 90^\circ$.

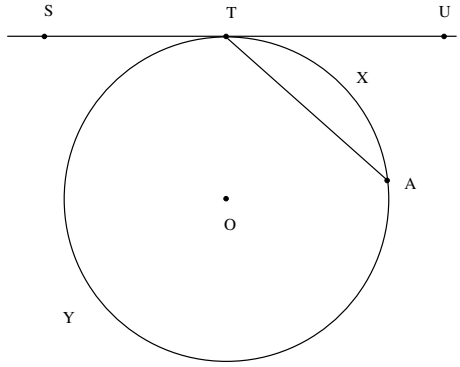



FIGURA 21. Măsura unui unghi cu vârful pe cerc (caz 2)

Se construieşte tangenta $ST$, $U \in ST$, punctul $T$ se găseşte între $S$ şi $U$.

Folosind cazul anterior, avem:

$$m(\sphericalangle STA) = 180^\circ - m(\sphericalangle UTA) = 180^\circ - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{TXA}) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - m(\overset{\frown}{TYA})) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{TYA}).$$

**Teorema** 4.22. *Măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.*

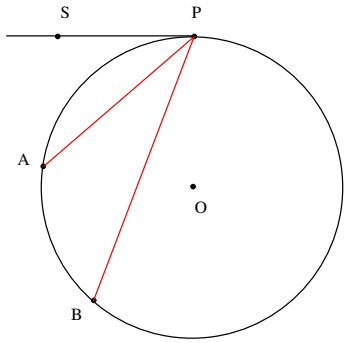



FIGURA 22. Măsura unghiului înscris în cerc

DEMONSTRAŢIE. Pe cercul $\mathcal{C}(O,r)$ se consideră unghiul cu vârful pe cerc $\sphericalangle APB$, unde $A$, $P$, $B \in \mathcal{C}(O,r)$.

Vom demonstra că $m(\sphericalangle APB) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$ (prin $\widehat{AB}$ se înţelege arcul mic al cercului cuprins între punctele $A$ şi $B$).

Se construieşte tangenta în $P$ la cerc. Conform Teoremei (4.21),

$$m(\sphericalangle APB) = m(\sphericalangle SPB) - m(\sphericalangle SPA) =$$
$$= \frac{1}{2} m(\widehat{PAB}) - \frac{1}{2} m(\widehat{AP}) = m(\widehat{AB}).$$

**Definiţia** 4.23. *Un* unghi cu vârful în interiorul cercului *este un unghi al cărui vârf este un punct interior cercului, altul decât centrul cercului, format la intersecţia a două coarde în cerc.*

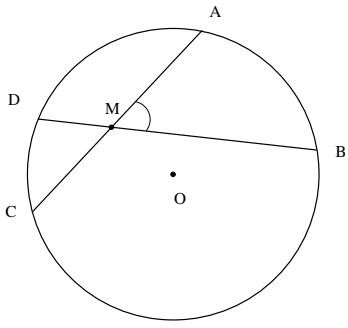



FIGURA 23. Unghi cu vârful în interiorul cercului

**Teorema** 4.24. *Un unghi cu vârful în interiorul cercului are măsura egală cu semisuma măsurilor arcelor cuprinse între laturile unghiului şi prelungirile lor.*

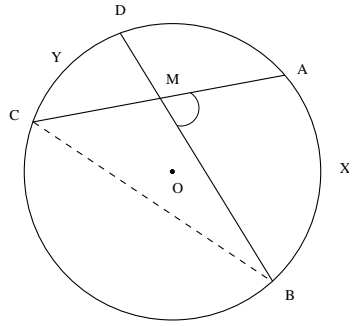



FIGURA 24. Măsura unui unghi cu vârful în interorul cercului

DEMONSTRAŢIE. Se consideră în cercul $\mathcal{C}(O,r)$ unghiul cu vârful în interiorul lui, $\sphericalangle AMB$.

Deoarece punctul $M$ este interior cercului, dreptele $AM$ şi $BM$ vor mai intersecta încă o dată cercul în punctele $C$, respectiv $D$ ($C \in \mathcal{C}(O,r)$, $D \in \mathcal{C}(O,r)$). Aşadar, punctul $M$ se află la intersecţia coardelor $[AC]$ şi $[BD]$. Unind punctele $C$ şi $B$ se obţine triunghiul $\Delta MCB$ pentru care $\sphericalangle AMB$ este unghi exterior. Aplicând proprietatea unghiului exterior unui triunghi de a avea măsura egală cu suma măsurilor unghiurilor triunghiului, neadiacente lui, rezultă:

$$m(\sphericalangle AMB) = m(\sphericalangle MCB) + m(\sphericalangle CBD).$$

Deoarece unghiurile $\sphericalangle MCB$ şi $\sphericalangle CBD$ sunt unghiuri cu vârful pe cerc, măsurile lor sunt egale cu jumătate din măsura arcului pe care îl subîntind, adică:

$$m(\sphericalangle MCB) = \frac{1}{2}m(\widehat{AxB}) \text{ şi } m(\sphericalangle CBD) = \frac{1}{2}m(\widehat{CyD}).$$

**Definiţia** 4.25. *Un unghi al cărui vârf se află într-un punct exterior cercului iar laturile lui sunt secante sau tangente se numeşte* unghi cu vârful în exteriorul cercului.

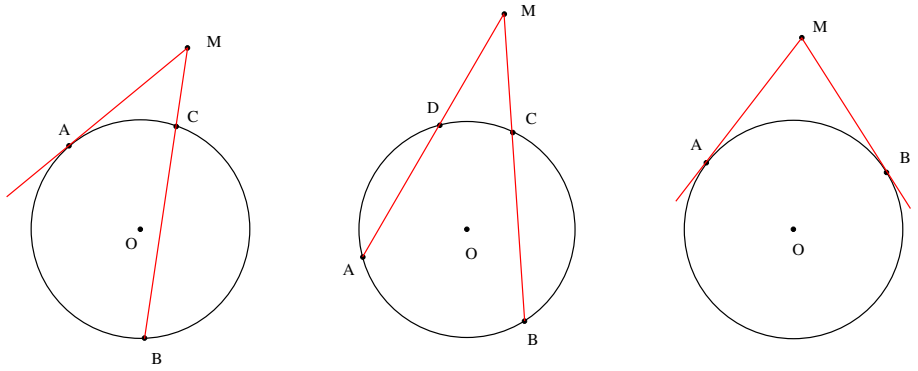



FIGURA 25. Unghi cu vârful în exteriorul cercului

**Teorema** 4.26. *Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul cercului este egală cu modulul semidiferenţei arcelor de cerc cuprinse între laturile unghiului.*

DEMONSTRAŢIE. Se consideră unghiul $\sphericalangle AMB$ cu vârful în exteriorul cercului $\mathcal{C}(O,r)$, $A \in \mathcal{C}(O,r)$, $B \in \mathcal{C}(O,r)$.

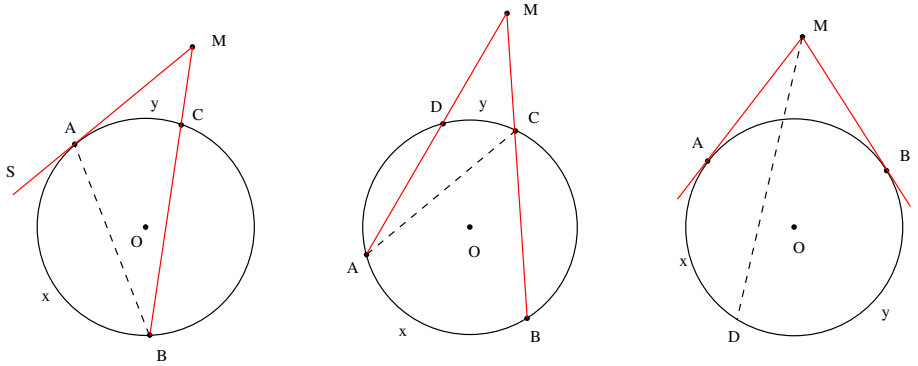



FIGURA 26. Măsura unghiului cu vârful în exteriorul cercului

Caz 1. ambele laturi ale unghiului sunt secante
Caz 2. o latură este secantă şi una tangentă
Caz 3. laturile sunt tangente.

Caz 1. Laturile unghiului $\sphericalangle AMB$ fiind secante, au câte două puncte comune cu cercul,

$$[MA] \cap \mathcal{C}(O,r) = \{D\}, [MB] \cap \mathcal{C}(O,r) = \{C\}.$$

Se unesc $A$ cu $C$ şi se obţine triunghiul $\Delta MAC$ pentru care $\sphericalangle ACB$ este unghi exterior. Atunci, conform Teoremei (4.22):

$$m(\sphericalangle AMC) = m(\sphericalangle ACB) - m(\sphericalangle MAC) =$$
$$= \frac{1}{2} m(\widehat{AxB}) - \frac{1}{2} m(\widehat{DyC}).$$

Caz 2. O latură a unghiului $\sphericalangle AMB$ este tangentă şi o latură este secantă, deci are două puncte comune cu cercul. Dreapta $MA$ este tangentă cercului şi $[MB] \cap \mathcal{C}(O,r) = \{C\}$. Fie $S$ un punct pe tangentă, aşa încât $A$ se găseşte între $S$ şi $M$. Se unesc punctele $A$ şi $B$ şi se obţine triunghiul $\Delta AMB$ pentru care $\sphericalangle SAB$ este unghi exterior. Folosind Teoremele (4.22) şi (4.21), se obţine:

$$m(\sphericalangle AMB) = m(\sphericalangle SAB) - m(\sphericalangle ABM) =$$
$$= \frac{1}{2} m(\widehat{AxB}) - \frac{1}{2} m(\widehat{AyC}).$$

Caz 3. Se consideră secanta $MD$, $D \in \mathcal{C}(O,r)$, $[MD$ semidreaptă înterioară unghiului. Se descompune unghiul $\sphericalangle AMB$ în două unghiuri $\sphericalangle AMD$ şi $\sphericalangle DMB$ cu o latură tangentă cercului şi o latură secantă. Se aplică Cazul 2.

### 3. Patrulater înscris şi circumscris

Aşa cum am văzut în Capitolul 3, un patrulater este un caz particular de poligon. Din acest motiv, vom prezenta poligoanele înscrise şi circumscrise şi vom demonstra câteva dintre proprietăţile acestora.

**Definiţia** 4.27. *Dacă un poligon are vârfurile puncte ale unui cerc, atunci poligonul se numeşte* poligon înscris *(sau* poligon inscriptibil*) în cerc iar cercul se numeşte* circumscris poligonului.

*Dacă laturile unui poligon sunt tangente unui cerc, atunci se numeşte* poligon circumscris *cercului iar cercul se numeşte* înscris în poligon.

Patrulaterul înscris în cerc este patrulater convex.

**Teorema** 4.28. *Fie poligonul convex notat $A_1A_2 \dots A_n$. Atunci, el poate fi înscris într-un cerc dacă şi numai dacă mediatoarele laturilor sale sunt concurente.*

DEMONSTRAŢIE. Se vor nota mediatoarele laturilor $[A_iA_j]$ cu $m_{ij}$.

Presupunem că poligonul este inscris în cercul de centru $O$ şi rază $r$, $\mathcal{C}(O,r)$. Atunci $[OA_i] \equiv [OA_j]$, pentru orice $i,j = \overline{1,n}$. Aceasta însemnă că pentru oricare latură $[A_iA_{i+1}]$ a poligonului, $[OA_i] \equiv [OA_{i+1}]$, adică $O$ se găseşte pe mediatoarea $m_{ii+1}$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, $A_{n+1} = A_1$. Altfel spus, $O$ este punct comun tuturor mediatoarelor laturilor poligonului, adică mediatoarele sunt concurente.

Reciproc, dacă mediatoarele poligonului convex sunt concurente într-un punct $O$, acesta are proprietatea că $[OA_i] \equiv [OA_{i+1}]$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, $A_{n+1} = A_1$. Deci, vârfurile poligonului aparţin unui cerc cu centrul în $O$ şi rază $[OA_i]$.

**Teorema** 4.29. *Fie poligonul convex, notat $A_1A_2 \dots A_n$. Atunci, el poate fi circumscris unui cerc dacă şi numai dacă bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente.*

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că poligonul este circumscris cercului $\mathcal{C}(O,r)$. Atunci,

$$d(O,A_1A_2) = d(O,A_2A_3) = \dots = d(O,A_nA_1),$$

deci punctul $O$ se găseşte pe bisectoarele unghiurilor poligonului.

Reciproc, presupunem că bisectoarele unghiurilor poligonului sunt concurente în punctul $O$. Atunci,

$$d(O,A_1A_2) = d(O,A_2A_3) = \dots = d(O,A_nA_1).$$

Aceasta înseamnă laturile poligonului sunt tangente cercului care are centrul în $O$ şi rază $d(O,A_1A_2)$.

**Teorema** 4.30. *Dacă $A_1A_2 \dots A_n$ este un poligon regulat, atunci el poate fi şi înscris într-un cerc şi poate fi şi circumscris unui cerc.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $A_1A_2 \dots A_n$ un poligon regulat, deci toate laturile şi toate unghiurile sunt congruente.

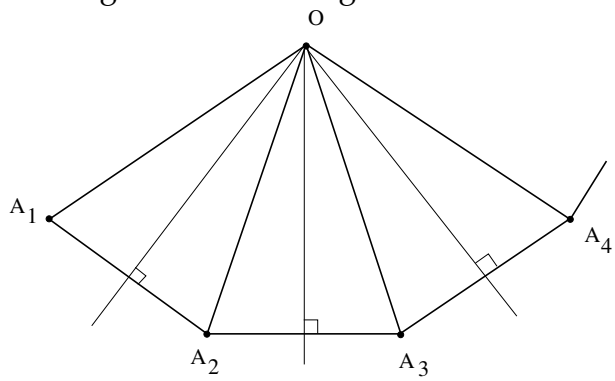



FIGURA 27. Poligon înscris şi circumscris

Se consideră mediatoarele laturilor $[A_1A_2]$ şi $[A_2A_3]$. Acestea sunt concurente în punctul $O$. Folosind proprietatea punctelor mediatoarei unui segment, rezultă $[OA_1] \equiv [OA_2] \equiv [OA_3]$. Deoarece avem şi congruenţa $[A_1A_2] \equiv [A_2A_3]$, rezultă, conform cazului (L.L.L), congruenţa triunghiurilor $\Delta A_1OA_2 \equiv \Delta A_2OA_3$. În plus, aceste triunghiuri sunt şi isoscele şi unghiurile de la bază sunt congruente $\sphericalangle OA_1A_2 \equiv \sphericalangle OA_2A_1 \equiv \sphericalangle OA_2A_3 \equiv \sphericalangle OA_3A_2$. Deoarece $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle A_3$, rezultă $\sphericalangle OA_3A_2 \equiv \sphericalangle OA_3A_4$. Se obţine astfel congruenţa $\Delta OA_2A_3 \equiv \Delta OA_3A_4$ (L.U.L), de unde rezultă $[OA_3] \equiv [OA_4]$, adică $O$ se află şi pe mediatoarea segmentului $[A_3A_4]$. În mod analog, se arată că $O$ se găseşte pe mediatoarele tuturor laturilor poligonului, ceea ce înseamnă că poligonul poate fi înscris în cerc, conform Teoremei (4.28).

Din congruenţa triunghiurilor isoscele

$$\Delta A_1OA_2 \equiv \Delta A_2OA_3 \equiv \dots \Delta A_{n-1}OA_n \equiv \Delta A_nOA_1,$$

rezultă că $OA_i$, $\forall i = \overline{1,n}$, sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_i$. Deci $O$ este şi punctul de concurentă al bisectoarelor unghiurilor poligonului. Conform Teoremei (4.29) poligonul poate fi circumscris unui cerc.

Particularizăm poligoanele la $n = 4$. Obţinem astfel patrulatere care pot fi înscrise în cerc, patrulatere care pot fi circumscrise unui cerc şi verifică proprietăţile menţionate anterior.

În plus, pentru patrulatere inscriptibile sunt adevărate şi următoarele rezultate.

**Teorema** 4.31. *Dacă un patrulater convex este înscris în cerc atunci diagonalele sale formează, cu două laturi opuse, unghiuri congruente.*

DEMONSTRAŢIE. Se observă că două unghiuri formate de diagonale şi laturile opuse subîntind acelaşi arc de cerc, deci sunt congruente (vezi figura (28)).

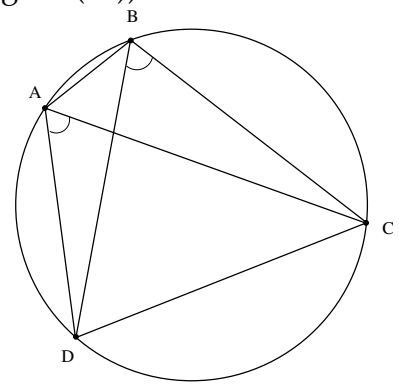



FIGURA 28. Proprietăţi ale patrulaterului convex înscriptibil

**Teorema** 4.32. *(Reciproc) Un patrulater în care unghiurile formate de diagonale cu două laturi opuse ale lui sunt congruente este un patrulater inscriptibil.*

DEMONSTRAŢIE. Se stie că trei puncte determină un cerc. Considerăm cercul determinat de punctele $A$, $D$, $C$, notat $\mathcal{C}$. Presupunem că $B$ nu se află pe cerc. Distingem două cazuri: $B$ în interiorul cercului, respectiv în exteriorul cercului. Ambele cazuri se demonstrează identic.

Presupunem că $B$ este exterior cercului. Atunci, cel puţin unul dintre segmentele $[BA]$ şi $[BC]$ intersectează a doua oară cercul. Presupunem că $BC \cap \mathcal{C} = \{E\}$. Cum $E \in \mathcal{C}$, rezultă $AECD$ inscriptibil.

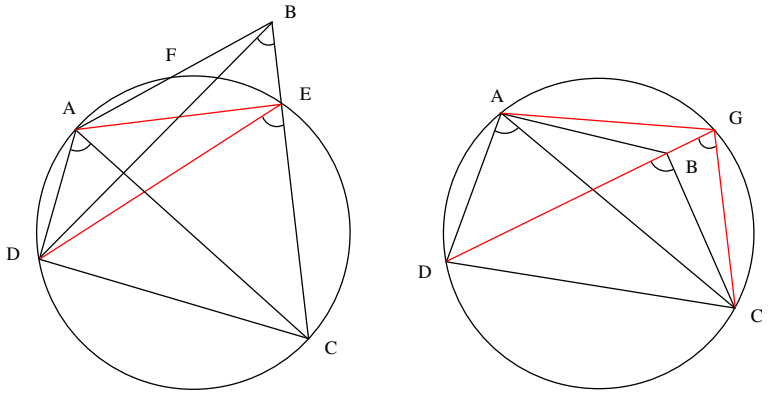


FIGURA 29. Proprietăţi ale patrulaterului convex înscriptibil

Conform Teoremei (4.31), $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DEC$. Dar, din ipoteză avem $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DBC$. Se obţine: $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DEC$. Deoarece unghiul $\sphericalangle DEC$ este exterior triunghiului $\triangle DEB$, rezultă

$$m(\sphericalangle DEC) = m(\sphericalangle DBE) + m(\sphericalangle BDE).$$

Aşadar, $m(\sphericalangle BDE) = 0$, adică $B = E$.

Dacă presupunem că punctul $B$ este interior cercului, se prelungeşte diagonala $BD$ până intersectează cercul, $DB \cap \mathcal{C} = \{G\}$. Raţionamentul este similar cazului anterior, considerându-se congruenţa unghiurilor:

$$\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DBC \text{ şi } \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DGC.$$

**Teorema** 4.33. *Un patrulater convex înscris într-un cerc are unghiurile opuse suplementare.*

DEMONSTRAŢIE. Se consideră $ABCD$ un patrulaterul convex, înscris în cercul $\mathcal{C}(O, r)$.

Folosind Teorema (4.22), se obţine:

$$m(\sphericalangle DAB) + m(\sphericalangle BCD) = \frac{m(\widehat{DCB}) + m(\widehat{DCB})}{2} = 180^\circ.$$

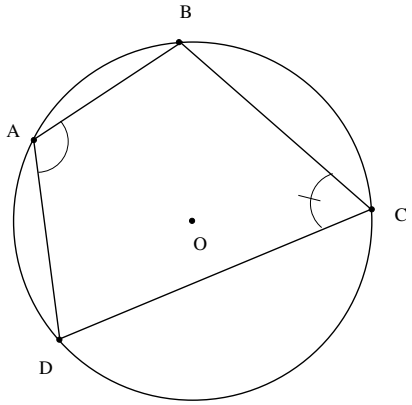



FIGURA 30. Proprietăţi ale patrulaterului convex înscriptibil

Particularizănd Teorema(4.28) şi Teorema (4.29) la cazul patrulaterelor, se obţin următoarele rezultate:

**Teorema** 4.34. *Un patrulater convex poate fi înscris într-un cerc dacă mediatoarele laturilor sale sunt concurente. Reciproc, dacă un patrulater convex este înscris într-un cerc, atunci mediatoarele laturilor sale sunt concurente.*

DEMONSTRAŢIE. Implicaţia directă: ştim că mediatoarele laturilor patrulaterului $ABCD$ sunt concurente în $O$.

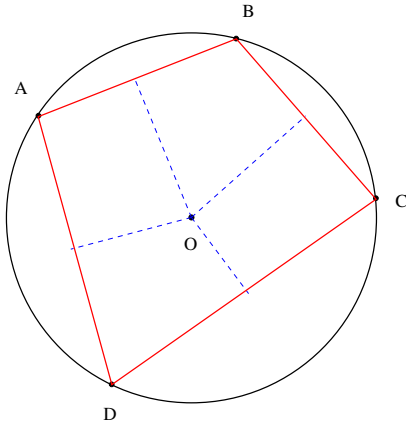



FIGURA 31. Proprietăţi ale patrulaterului convex înscriptibil

Atunci avem congruenţa $[OA] \equiv [OB] \equiv [OC] \equiv [OD]$. Deci vârfurile aparţin unui cerc de rază $r = OA$.

Implicaţia reciprocă: dacă patrulaterul are vârfurile pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, atunci $[OA] \equiv [OB] \equiv [OC] \equiv [OD]$. Deci $O$ se află pe mediatoarele laturilor patrulaterului, adică mediatoarele sunt concurente.

**Teorema** 4.35. *Un patrulater convex poate fi circumscris unui cerc dacă bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente. Reciproc, dacă un patrulater convex este circumscris unui cerc atunci bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente.*

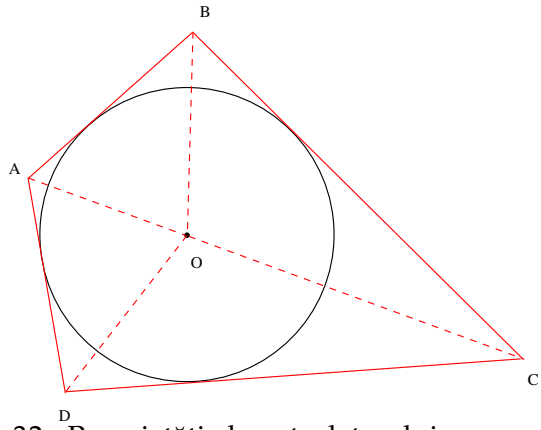



FIGURA 32. Proprietăţi ale patrulaterului convex circumscris unui cerc

DEMONSTRAŢIE. Implicaţia directă: presupunem că bisectoarele unghiurilor patrulaterului $ABCD$ sunt concurente în $O$. Dar, punctele de pe bisectoarea unui unghi sunt egal depărtate de laturile unghiului. Astfel avem:

$$d(O, AB) = d(O, BC) = d(O, DC) = d(O, AD) = r.$$

Cercul de centru $O$ şi rază $r$ este tangent fiecărei laturi a patrulaterului.

Implicaţia reciprocă: dacă patrulaterul $ABCD$ are laturile tangente cercului $\mathcal{C}(O, r)$, atunci

$$d(O, AB) = d(O, BC) = d(O, DC) = d(O, AD) = r.$$

Deci $O$ se află pe bisectoarele unghiurilor patrulaterului.

*Lungimea unui cerc* este acel număr real, pozitiv către care tinde perimetrul oricărui poligon înscris în cerc şi circumscris cercului, când lungimile laturilor poligoanelor tind toate către zero.

Lungimea cercului de rază $r$ este

$$L = 2\pi r.$$

Într-un cerc de rază $r$, lungimea unui arc de cerc de măsură $u^\circ$ este

$$l = \frac{\pi r u^\circ}{180^\circ}.$$

*Aria unui cerc de rază* $r$ este numărul real, pozitiv către care tinde aria oricărui poligon înscris în cerc şi circumscris cercului, când lungimile laturilor poligoanelor tind toate către zero.

Aria cercului de rază $r$ este

$$A = \pi r^2.$$

**Definiţia** 4.36. *Se numeşte* sector de cerc *o porţiune din interiorul unui cerc cuprinsă între două raze ale sale.*

Aria unui sector de cerc cu rază $r$ ce corespunde unui arc cu măsura $u^\circ$ este

$$S = \frac{\pi r^2 u^\circ}{360^\circ}.$$

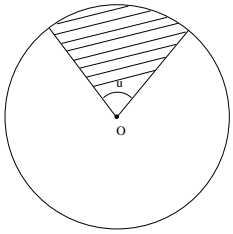



FIGURA 33. Sector de cerc

**Definiţia** 4.37. *Se numeşte* segment circular *o porţiune din interiorul unui cerc cuprinsă între un arc de cerc şi coarda care subîntinde acel arc de cerc.*

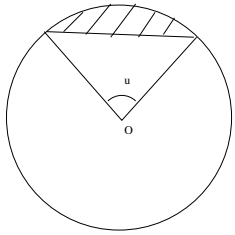



FIGURA 34. Segment circular

## 4. Puterea unui punct faţă de un cerc. Axa radicală

**Teorema** 4.38. *Dacă dintr-un punct fix $M$, nesituat pe un cerc dat, ducem o secantă ce taie cercul în $A, B$, atunci produsul $MA \cdot MB$ este aceeaşi pentru toate secantele ce trec prin $M$.*

DEMONSTRAŢIE. Punctul $M$ se poate găsi în una dintre cele două situaţii:

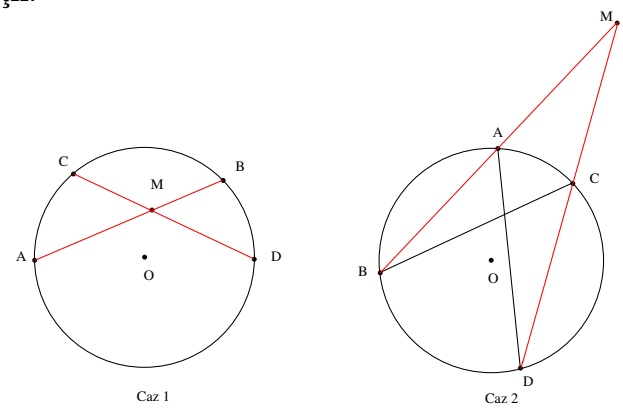



FIGURA 35. Puterea unui punct faţă de un cerc

Caz 1. $M$ este în interiorul cercului.

Caz 2. $M$ este în exteriorul cercului.

Ambele cazuri rezultă din asemănarea triunghiurilor: $\Delta MBC$ şi $\Delta MAD$.

Într-adevăr, în ambele cazuri, $\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle MDA$ (subîntind arcul $\overset{\frown}{AC}$), iar $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle DMA$. Rezultă următoarele rapoarte de

asemănare:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MA} \text{ sau } MB \cdot MA = MC \cdot MD.$$

**Definiţia** 4.39. *Fie $M$ un punct şi $\mathcal{C}(O, r)$ un cerc.*

1. *Dacă $M$ este în exteriorul cercului, numim* puterea lui $M$ faţă de cerc *valoarea $MA \cdot MB$, unde $A$ şi $B$ sunt intersecţiile unei drepte oarecare, ce trece prin $M$, cu cercul, luată cu semnul plus.*
2. *Dacă $M$ este pe cerc, spunem că* puterea lui $M$ faţă de cerc *este zero.*
3. *Dacă $M$ este în interiorul cercului, numim* puterea lui $M$ faţă de cerc *valoarea $MA \cdot MB$, unde $A$ şi $B$ sunt intersecţiile unei drepte oarecare, ce trece prin $M$, cu cercul, luată cu semnul minus.*

**Observaţia** 4.40. *Dacă se cunoaşte raza cercului $\mathcal{C}(O, r)$ şi distanţa de la punctul $M$ la centrul cercului se poate determina expresia puterii punctului $M$ faţă de cerc.*

*Dacă $M$ este interior cercului, se consideră diametrul $[EF]$ ce trece prin $M$, $M \in [OE]$:*

$$-ME \cdot MF = -(r - OM)(r + OM) = OM^2 - r^2.$$

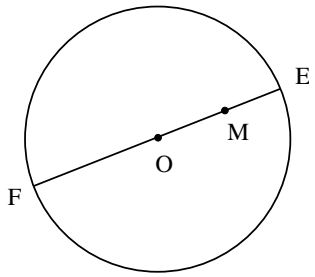



FIGURA 36. Caz: M interior cercului

*Dacă $M$ este exterior cercului, considerăm diametrul $[EF]$, astfel încât $E \in [MF]$:*

$$ME \cdot MF = (OM - r)(OM + r) = OM^2 - r^2.$$

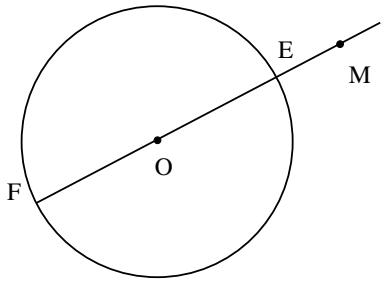



FIGURA 37. Caz: M exterior cercului

*Dacă $MT$ este tangentă la cerc, atunci*

$$MT^2 = OM^2 - r^2.$$

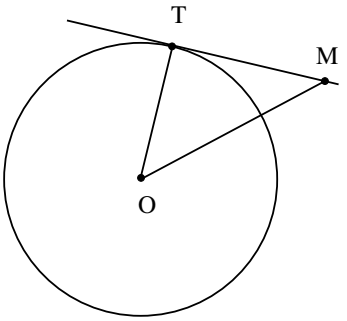



FIGURA 38. Caz: M aparţine tangentei cercului

*Puterea punctului se notează cu $\rho(M)$. Aşadar, oricare ar fi punctul $M$ din planul cercului, $\rho(M) = OM^2 - r^2$.*

**Observaţia** 4.41. *Se consideră două cercuri $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$, $O_1 \neq O_2$. Se pune problema determinării mulţimii de puncte din plan care au puteri egale faţă de cele două cercuri, adică:*

$$O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2.$$

*Presupunem că $r_1 > r_2$. Condiţia $O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2$ se mai scrie echivalent $O_1M^2 - O_2M^2 = r_1^2 - r_2^2$.*

*Deoarece $r_1$ şi $r_2$ sunt constante şi $r_1 > r_2$, se va nota constanta $r_1^2 - r_2^2 = k$, $k > 0$.*

*Aşadar, trebuie găsită mulţimea punctelor din plan pentru care diferenţa pătratelor distanţelor la două puncte fixe este constantă.*

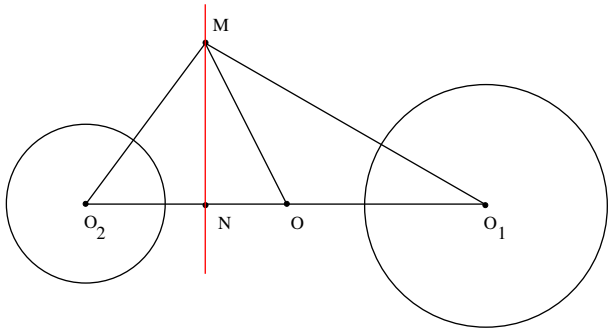



FIGURA 39. Axa radicală

*Se consideră $O$ mijlocul segmentului $[O_1O_2]$ şi $N$ proiecţia punctului $M$ pe dreapta $O_1O_2$. Deoarece $k > 0$, $k \in \mathbb{R}$ ,$O_1M > O_2M$, deci punctul $N \in (OO_2)$.*

*Se aplică teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile $\Delta MO_1O$ şi $\Delta MOO_2$. Se obţin relaţiile:*

$$MO_1^2 = MO^2 + OO_1^2 - 2MO \cdot OO_1 \cos(\sphericalangle MOO_1)$$

$$MO_2^2 = MO^2 + OO_2^2 - 2MO \cdot OO_2 \cos(\sphericalangle MOO_2)$$

*Se scade a doua relaţie din prima şi rezultă:*

$$\begin{aligned} MO_1^2 - MO_2^2 &= 2MO \cos(\sphericalangle MOO_2)(OO_1 + OO_2) = \\ &= 2ON \cdot O_1O_2. \end{aligned}$$

*Aşadar, lungimea segmentului $[ON]$ este egală cu $\dfrac{k}{2O_1O_2}$, deci este constantă.*

*Punctele $M$ ce verifică $ON = \dfrac{k}{2O_1O_2}$ se găsesc pe dreapta perpendiculară în $N$ pe $O_1O_2$.*

*Reciproc, dacă se consideră dreapta determinată de centrele celor două cercuri, $O_1O_2$ şi punctul $N \in O_1O_2$, cu $ON = \dfrac{k}{2O_1O_2}$ şi se construieşte dreapta $h \perp O_1O_2$, $N \in h$, se demonstrează că oricum am alege un punct $M \in h$, acesta verifică relaţia $O_1M^2 - O_2M^2 = k$.*

*Într-adevăr, dacă se consideră mijlocul $O$ al segmentului $[O_1O_2]$ şi se scrie teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile $\Delta MO_1O$ şi $\Delta MOO_2$, calculând diferenţa celor două relaţii obţinute şi folosind $ON = \dfrac{k}{2O_1O_2}$, se obţine $O_1M^2 - O_2M^2 = k$.*

Mulţimea punctelor găsită în observaţia anterioară se numeşte *axa radicală a cercurilor* şi este o dreaptă perpendiculară pe dreapta centrelor celor două cercuri.

CAPITOLUL 5

# Probleme. Triunghi

## 1. Congruenţa triunghiurilor. Cazuri de congruenţă

### 1.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 5.1. *([20]) Pe laturile unghiului $\sphericalangle AOB$ se consideră punctele $M$ şi $N$ astfel încât $OM = ON$, apoi punctele $P$ şi $Q$ astfel încât $OP = OQ$, $M, P \in OA, N, Q \in OB$. Arătaţi că $\sphericalangle MOT \equiv \sphericalangle NOT$, unde $MQ \cap NP = \{T\}$.*

*Soluţie:* Din informaţiile oferite în ipoteză (vezi figura (1)) se

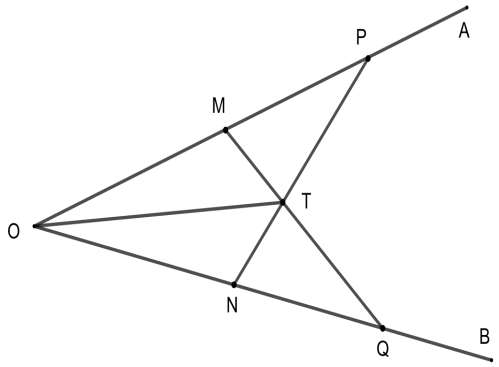



FIGURA 1. [24]

poate observa că:

$$\triangle MOQ \equiv \triangle NOP \begin{cases} [OM] \equiv [ON] \\ \sphericalangle MOQ \equiv \sphericalangle NOP \\ [OQ] \equiv [OP] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă $LUL$. Deducem că:

$$\begin{cases} \sphericalangle OPN \equiv \sphericalangle OQM \\ \sphericalangle ONP \equiv \sphericalangle OMQ \end{cases}$$

Avem şi:

$$\triangle NTQ \equiv \triangle MTP \begin{cases} [NQ] \equiv [MP] \\ \sphericalangle NTQ \equiv \sphericalangle MPT \\ \sphericalangle TNQ \equiv \sphericalangle TMP \end{cases}$$

Am utilizat în congruenţa de mai sus $[NQ] \equiv [MP]$ deoarece:

$$NQ = OQ - ON$$

$$MP = OP - OM$$

De asemenea, $\sphericalangle TNQ \equiv \sphericalangle TMP$ deoarece sunt suplementele unor unghiuri cu măsuri egale.

Astfel, obţinem că cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (U.L.U) . De aici:

$$[NT] \equiv [MT]$$

Dar,

$$\triangle ONT \equiv \triangle OMT \begin{cases} [ON] \equiv [OM] \\ [NT] \equiv [MT] \\ [OT] \equiv [OT] \end{cases}$$

Astfel, obţinem că cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.L.L). În concluzie, obţinem:

$$\sphericalangle NOT \equiv \sphericalangle MOT$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.2. *([21]) În triunghiul $\Delta ABC$ dreptunghic în care $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$, notăm cu $M$ mijlocul laturii $[AC]$. Perpendiculara în $M$ pe $AC$ intersectează pe $BC$ în $E$ şi perpendiculara în $C$ pe $BC$ în $F$. Perpendiculara în $E$ pe $AE$ intersectează pe $AB$ în punctul $P$. Arătaţi că: $CF = EP$.*

*Soluţie:* În figura (2), avem:

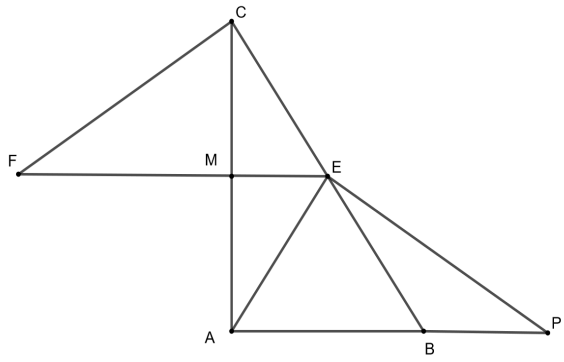



FIGURA 2. [24]

$$\Delta AEM \equiv \Delta CEM \begin{cases} [AM] \equiv [CM] \\ \sphericalangle AME \equiv \sphericalangle CME \\ [ME] \equiv [ME] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.U.L). Deducem astfel că:

$$\begin{cases} [AE] \equiv [CE] \\ \sphericalangle MAE \equiv \sphericalangle MCE \end{cases}$$

Din figura (2) observăm că:

$$m(\sphericalangle EAP) = 90^\circ - m(\sphericalangle MAE)$$

Dar, în triunghiul $\Delta MEC$ avem:

$$m(\sphericalangle MEC) = 90^\circ - m(\sphericalangle MCE)$$

Astfel, se obţine: $m(\sphericalangle EAP) = m(\sphericalangle CEF)$.

În final

$$\Delta AEP \equiv \Delta ECF \begin{cases} \sphericalangle AEP \equiv \sphericalangle ECP \\ [AE] \equiv [CE] \\ \sphericalangle EAP \equiv \sphericalangle ECF \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (U.L.U) şi rezultă că:

$$[EP] \equiv [CF]$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.3. *(G.M.-B nr.10/2016* [23]*) Fie $ABCD$ un pătrat, punctul $M$ simetricul lui $B$ faţă de punctul $A$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle AMN) = 15^\circ$. Arătaţi că $MN = AC$.*

*Soluţie:* Construim simetricul lui $D$ faţă de $A$, notat cu $P$ (vezi figura (3)).

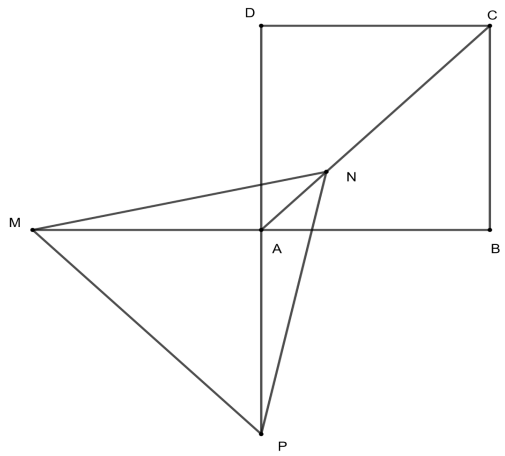



FIGURA 3. [24]

Avem egalitatea: $AD = AP$. Dar, din ipoteză ştim că punctul $M$ este simetricul lui $B$ faţă de $A$, deci $AB = AM$. Deducem că: $AM = AP$. Astfel, avem:

$$\Delta ANM \equiv \Delta ANP \begin{cases} [AM] \equiv [AP] \\ \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle PAN \\ [AN] \equiv [AN] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.U.L) şi obţinem :

$$\begin{cases} [MN] \equiv [PN] \\ \sphericalangle MNA \equiv \sphericalangle ENA \end{cases}$$

Avem şi congruenţa:

$$\Delta MAP \equiv \Delta ABC \begin{cases} [MA] \equiv [AB] \\ \sphericalangle MAP \equiv \sphericalangle ABC \\ [AP] \equiv [BC] \end{cases}$$

conform cazului de congruenţă (L.U.L) şi rezultă:

$$[MP] \equiv [AC]$$

Dar, din ipoteză cunoaştem $m(\sphericalangle AMN) = 15^\circ$, rezultă că:

$$m(\sphericalangle MNA) = 180^\circ - 15^\circ - 135^\circ = 30^\circ$$

Astfel, se obţine $m(\sphericalangle MNP) = 60^\circ$. În concluzie, $\triangle MNP$ este echilateral, deci

$$MP = MN \Rightarrow MN = AC.$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 1.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 5.4. *(*[15]*) Fie $xOy$ un unghi (figura (4)). Pe latura $Ox$ se ia un punct oarecare $A$ şi se construieşte un arc de cerc cu centrul în $A$ care intersectează latura $Oy$ în două puncte $B$ şi $C$. Triunghiurile $\Delta AOB$ şi $\Delta AOC$ au câte două laturi congruente şi un unghi congruent. Totuşi, ele nu sunt congruente. Este acest lucru în contradicţie cu cazul de congruenţă (L.U.L) ?*

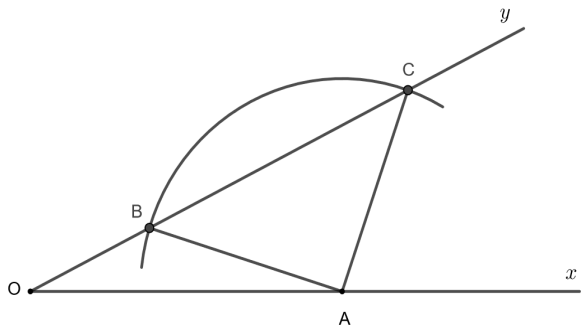



FIGURA 4. [24]

**Exerciţiul** 5.5. *(*[22]*) Fie $A'$ şi $B'$ simetricele punctelor $A$ şi $B$ în raport cu un punct $O$, adică $O$ este mijlocul segmentelor $[AA']$ şi $[BB']$. Să se arate că $[AA'] \equiv [BB']$.*

**Exerciţiul** 5.6. *(*[20]*) Pe laturile unghiului $\sphericalangle AOB$ se consideră punctele $M$ şi $N$ astfel încât $OM = ON$, punctele $P$ şi $Q$ astfel încât $OP = OQ$, unde $M, P \in OA$ şi $N, Q \in OB$. Dacă $MQ \cap NP = \{T\}$, arătaţi că $\sphericalangle MOT \equiv \sphericalangle NOT$.*

**Exerciţiul** 5.7. *(*[19]*) Pe laturile unui triunghi oarecare $\Delta ABC$ construim, în exterior, triunghiurile echilaterale $\Delta ACD$, $\Delta BCE$ şi $\Delta ABF$. Să se arate că:*

$$[AE] \equiv [BD] \equiv [CF] .$$

**Exerciţiul** 5.8. *([9]) În triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$, se cunosc $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $AC = 4cm$, $AB = 3cm$. Fie $M \in CA$ ($A$ între $C$ şi $M$) şi $N \in AB$ ($B$ între $A$ şi $N$), astfel încât $AM = 3cm$ şi $BN = 1cm$. Stabiliţi dacă:*

a) $[MN] \equiv [BC]$;
b) $\sphericalangle MNA \equiv \sphericalangle ABC$.

**Exerciţiul** 5.9. *([22]) În două triunghiuri $\Delta ABC$ şi $\Delta A'B'C'$ avem:*

$$[AB] \equiv [A'B'], \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', AC < A'C'$$

*Să se arate că: $m(\sphericalangle B) < m(\sphericalangle B')$.*

**Exerciţiul** 5.10. *(G.M.-B nr.3/2017 [23]) Pe latura $[BC]$ a triunghiului obtuzunghic isoscel $\Delta ABC$, $(AB = AC)$, se consideră punctul $M$ astfel încât $[BM] \equiv [AC]$, iar pe latura $[AB]$ se consideră punctul $N$ astfel încât $[BN] \equiv [MC]$. Dacă $m(\sphericalangle MOT) = 40^\circ$, aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului $\Delta ABC$.*

## 2. Drepte importante în triunghi

### 2.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 5.11. *([10]) În triunghiul $\Delta ABC$, se ştie că $BB'$ şi $CC'$ sunt înălţimi, iar $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$. Fie $H$ ortocentrul triunghiului. Dacă $T$ este simetricul lui $H$ faţă de $AC$ atunci, arătaţi că $\Delta HTC$ este echilateral.*

*Soluţie:* În triunghiul $\Delta AC'C$, figura (5), deoarece $CC'$ este

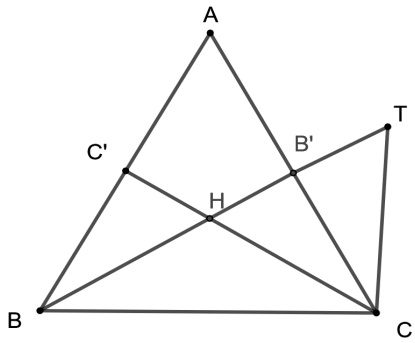



FIGURA 5. [24]

înălţime, se observă că: $m(\sphericalangle ACC') = 30^\circ$.

Din informaţiile oferite în ipoteză se poate demonstra:

$$\Delta HB'C \equiv \Delta TB'C \begin{cases} [HB'] \equiv [TB'] \\ \sphericalangle HB'C \equiv \sphericalangle TB'C \\ [B'C] \equiv [B'C] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.U.L). Deducem că:

$$\sphericalangle HCB' \equiv \sphericalangle TCB'$$

În triunghiul $\Delta B'HC$ se observă că:

$$m(\sphericalangle B'HC) = 60^\circ$$

De asemenea, $m(\sphericalangle HTC) = 60^\circ$.

Astfel, obţinem că $\triangle HTC$ este echilateral.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.12. *([21]) În triunghiul isoscel $\Delta ABC$ cu $AB = AC$, construim înălţimea $BD$, $D \in AC$ şi bisectoarea $BE$, $E \in AC$, a unghiului $\sphericalangle ABD$.*

*Arătaţi că $m(\sphericalangle EBC) = 45°$.*

*Soluţie:* În triunghiul $EBC$, din figura (6), avem:

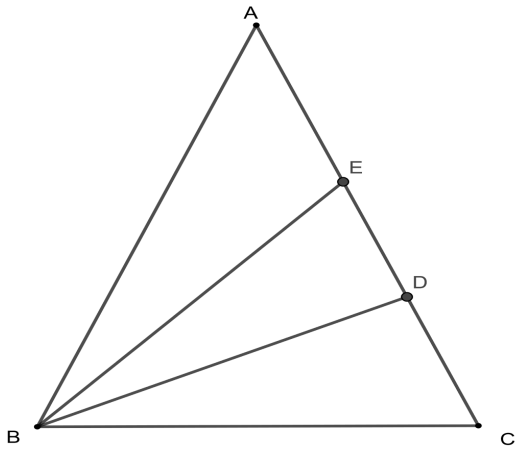



FIGURA 6. [24]

$$m(\sphericalangle EBC) = m(\sphericalangle EBD) + m(\sphericalangle DBC)$$

În triunghiul $\Delta ABD$, avem:

$$m(\sphericalangle ABD) = 90° - m(\sphericalangle BAD),$$

ceea ce implică:

$$m(\sphericalangle EBD) = \frac{90° - m(\sphericalangle BAD)}{2} = 45° - \frac{m(\sphericalangle BAD)}{2}$$

În triunghiul $\Delta DBC$, avem:

$$m(\sphericalangle DBC) = 90° - m(\sphericalangle BCD)$$

În triunghiul $\Delta ABC$, avem:

$$m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ - \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2}$$

Astfel, se obţine:

$$m(\sphericalangle DBC) = \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2}$$

În concluzie:

$$m(\sphericalangle EBC) = 45^\circ$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.13. *(G.M.-B nr.11/2017* [23]*) În triunghiul $\Delta ABC$, cu $m(\sphericalangle B) = 70^\circ$ şi $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$ construim înălţimea $AD$ şi bisectoarea $AE$ a unghiului $\sphericalangle A$, cu $D, E \in (BC)$. Arătaţi că punctul $D$ este mijlocul segmentului $BE$.*

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $m(\sphericalangle B) = 70^\circ$ şi $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$ (vezi figura (7)).

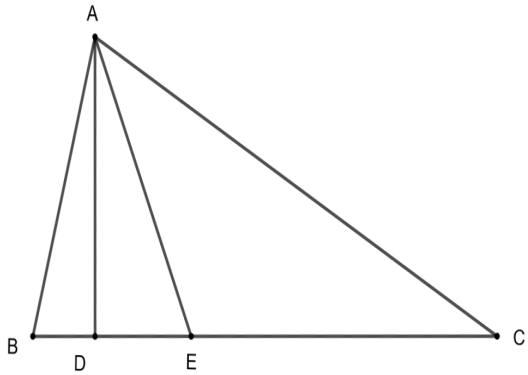



FIGURA 7. [24]

Astfel, avem:

$$m(\sphericalangle A) = 180^\circ - m(\sphericalangle B) - m(\sphericalangle C),$$

de unde rezultă $m(\sphericalangle A) = 80^\circ$.

Deoarece, dreapta $AE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, rezultă că $m(\sphericalangle EAC) = 40^\circ$. Unghiul $\sphericalangle AEB$ este unghi exterior pentru triunghiul $\Delta AEC$. Astfel, avem:

$$m(\sphericalangle AEB) = 70^\circ$$

Deducem că:

$$\Delta ADB \equiv \Delta ADE \begin{cases} \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADE \\ [AD] \equiv [AD] \\ \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle EAD \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (U.L.U). Obţinem astfel că :

$$[BD] \equiv [DE]$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 2.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 5.14. *(*[15]*) Într-un triunghi* $\Delta ABC$, $AB = 5cm$ *şi* $AC = 9cm$. *Fie* $xy$ *mediatoarea laturii* $[BC]$ *şi* $xy \cap AC = \{D\}$. *Să se determine perimetrul triunghiului* $\Delta ABD$.

**Exerciţiul** 5.15. *(*[22]*) Să se demonstreze că o mediană a unui triunghi este mai mică decât semisuma laturilor care pleacă din acelaşi vârf.*

**Exerciţiul** 5.16. *(*[21]*) În triunghiul* $\Delta ABC$ *construim bisectoarea* $AD$, $D \in (BC)$ *şi avem* $BD = DA = AC$. *Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului* $\Delta ABC$.

**Exerciţiul** 5.17. *(*[22]*) Să se demonstreze că bisectoarele suplementelor a două unghiuri ale unui triunghi şi bisectoarea unghiului al treilea sunt concurente.*

**Exerciţiul** 5.18. *(*[15]*) În figura (8),* $Oz$ *este bisectoarea unghiului* $\sphericalangle xOy$. $C \in Oz$, $CA \perp Ox$, $CB \perp Oy$. *Arătaţi că* $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle CBA$.

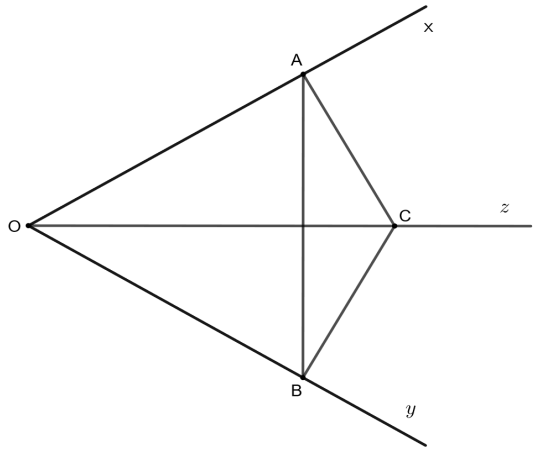



FIGURA 8. [24]

**Exerciţiul** 5.19. *(G.M.-B nr.5/2018, Supliment cu exerciţii* [23]*) În triunghiul* $\Delta ABC$ *cu* $m(\sphericalangle BAC) = 60°$, *bisectoarea unghiului* $\sphericalangle BAC$

*intersectează mediatoarea segmentului* $[AC]$ *în punctul* $D$*. Notăm cu* $M$ *mijlocul segmentului* $AC$ *şi* $\{N\} = CD \cap AB$*. Demonstraţi că:*

a) $MN \perp AD$*;*

b) $CN = 2AO$*, unde* $\{O\} = AD \cap MN$*.*

**Exerciţiul** 5.20. *(G.M.-B nr.9/2018* [23]*) Fie* $\Delta ABC$ *un triunghi oarecare. Punctele* $M$*,* $N$ *aparţin dreptei* $BC$ *astfel încât* $B \in (MC)$*,* $MB = AB$ *şi* $C \in (BN)$*,* $NC = AC$*. Perpendiculara din* $B$ *pe* $AM$ *se intersectează cu perpendiculara din* $C$ *pe* $AN$ *în* $P$*. Arătaţi că* $AP$ *este bisectoarea unghiului* $\sphericalangle BAC$*.*

## 3. Triunghi isoscel

### 3.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 5.21. *([15]) Într-un triunghi isoscel $\Delta ABC$, în care $[AB] \equiv [AC]$ se duc medianele $BD$ şi $CE$, $D \in AC$ şi $E \in AB$, notăm cu $F$ intersecţia lor. Să se demonstreze:*

a) $[BD] \equiv [CE]$;
b) $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ECB$;
c) $[FB] \equiv [FC]$;
d) $[FD] \equiv [FE]$;
e) $\sphericalangle FED \equiv \sphericalangle FDE$.

*Soluţie:*

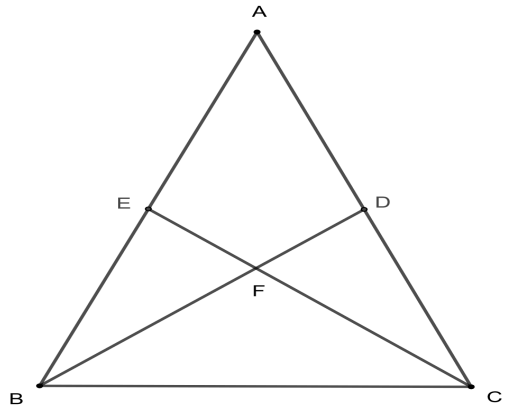



FIGURA 9. [24]

a) Din datele oferite în ipoteză, $\Delta ABC$ este isoscel (vezi figura (9)), putem demonstra că:

$$\Delta DBC \equiv \Delta ECB \begin{cases} [DC] \equiv [EB] \\ \sphericalangle DCB \equiv \sphericalangle EBC \\ [BC] \equiv [BC] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.U.L). Deducem că:

$$[BD] \equiv [CE]$$

b) Congruenţa $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ECB$ rezultă din congruenţa triunghiurilor $\Delta DBC \equiv \Delta ECB$ demonstrată la punctul a).

c) În triunghiul $\Delta FBC$ se observă că:

$$\sphericalangle FBC \equiv \sphericalangle FCB$$

Astfel, obţinem că $\Delta FBC$ este isoscel, adică:

$$[FB] \equiv [FC]$$

.

d) Din punctul a) cunoaştem că $[BD] \equiv [CE]$, iar din punctul c) $[FB] \equiv [FC]$. Astfel:

$$FD = BD - BF$$

$$FE = CE - CF$$

Rezultă relaţia: $[FD] \equiv [FE]$.

e) Deoarece triunghiul $\Delta FED$ este isoscel (vezi punctul d)), deducem că:

$$\sphericalangle FED \equiv \sphericalangle FDE$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.22. *([21]) În triunghiul isoscel $\Delta ABC$, cu laturile de lungimi egale $AB = AC$, fie $P$ un punct pe baza $[BC]$ diferit de mijlocul acesteia. Perpendiculara în $P$ pe $BC$ intersectează pe $AB$ în $E$ şi respectiv pe $AC$ în $F$. Arătaţi că triunghiul $\Delta AEF$ este isoscel.*

*Soluţie:* În triunghiul $\Delta EPB$, din figura (10), avem:

$$m(\sphericalangle BEP) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABC)$$

În triunghiul $\Delta FCP$, avem:

$$m(\sphericalangle CFP) = 90^\circ - m(\sphericalangle ACB)$$

Dar, se observă că:

$$\sphericalangle CFP \equiv \sphericalangle EFA$$

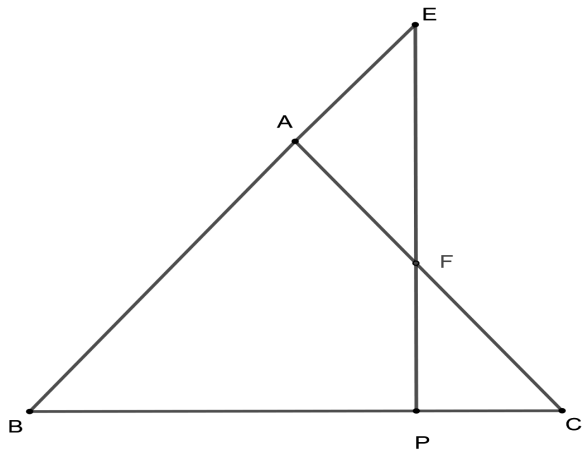



FIGURA 10. [24]

deoarece aceste unghiuri sunt opuse la vârf. Se obţine că:

$$m(\sphericalangle EFA) = 90^\circ - m(\sphericalangle ACB)$$

Deoarece triunghiul $\Delta ABC$ este isoscel, rezultă:

$$m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB)$$

Astfel, se obţine:

$$\sphericalangle AEP \equiv \sphericalangle AFE$$

În concluzie, $\Delta AEF$ este isoscel.
Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.23. *([9]) Fie $\Delta ABC$ un triunghi isoscel, $[AB] \equiv [AC]$ şi $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Dacă avem congruenţa $\sphericalangle ADP \equiv \sphericalangle ADR$, unde $P \in (AB)$ şi $R \in (AC)$, arătaţi că dreptele $AD$ şi $PR$ sunt perpendiculare.*

*Soluţie:* În triunghiul $\Delta ABC$, $AD \perp BC$ (vezi figura (11)), înălţimea corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel este şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$. Deducem că:

$$\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD.$$

Comparăm triunghiurile

$$\Delta ADP \equiv \Delta ADR \begin{cases} \sphericalangle ADP \equiv \sphericalangle ADR \\ [AD] \equiv [AD] \\ \sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle RAD \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (U.L.U) şi obţinem :

$$[AP] \equiv [AR]$$

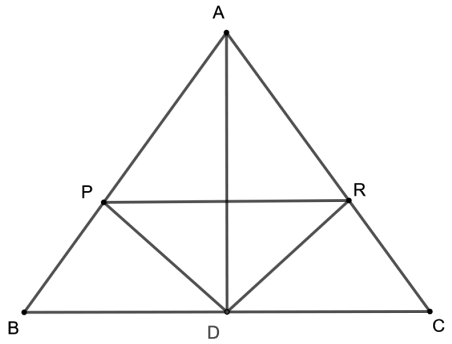



FIGURA 11. [24]

Acest rezultat ne conduce la concluzia că $\Delta APR$ este isoscel. În acest triunghi $[AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PAR$, aşadar $AD \perp PR$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

### 3.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 5.24. *(*[15]*) Se consideră un triunghi isoscel $\Delta ABC$, $[AB] \equiv [AC]$. Pe latura $[AB]$ se consideră un punct $M$ şi pe latura $[AC]$ un punct $N$, astfel încât $[BM] \equiv [CN]$ şi $BN \cap CM = \{P\}$. Să se demonstreze:*

a) $[BN] \equiv [CM]$;
b) $[PB] \equiv [PC]$;
c) *$AP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.*

**Exerciţiul** 5.25. *(*[9]*) Se consideră un triunghi isoscel $\Delta ABC$, cu $[AB] \equiv [AC]$, în care se construieşte bisectoarea $[AD]$, $D \in BC$. Ştiind că perimetrul triunghiului $\Delta ABC$ este egal cu $18cm$, iar perimetrul triunghiului $\Delta ABD$ este egal cu $12cm$, să se calculeze lungimea bisectoarei $AD$.*

**Exerciţiul** 5.26. *(*[12]*) Într-un triunghi isoscel $\Delta ABC$, în care $[AB] \equiv [AC]$, se consideră $AH$ înălţimea sa din $A$ şi $P$ un punct oarecare pe baza $BC$, $P \neq H$. Perpendiculara în $P$ pe bază intersectează dreptele $AB$ şi $AC$ în punctele $M$ şi, respectiv, $N$. Să se arate că:*

a) *triunghiul $\Delta AMN$ este isoscel;*
b) $2AH = MP + NP$.

**Exerciţiul** 5.27. *(*[9]*) Se consideră punctele $B, D, F, E, C$ coliniare (vezi figura (12)), $A$ un punct care nu se află pe dreapta $BC$, cu proprietăţile $[AB] \equiv [AC]$, $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle CAD$ şi $\sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle CAF$. Să se demonstreze că:*

a) $\sphericalangle DAF \equiv \sphericalangle EAF$;
b) $m(\sphericalangle AFB) = 90^\circ$;
c) *punctul $F$ este mijlocul segmentului $[BC]$;*
d) $[AD] \equiv [AE]$;

**Exerciţiul** 5.28. *(G. M.-B nr. 3/2017* [23]*) În triunghiul isoscel $\Delta ABC$ cu $AB = AC$, punctul $D$ este simetricul punctului $B$ faţă de punctul $C$ şi punctul $E$ este simetricul punctului $B$ faţă de dreapta $AD$.*

*Arătaţi că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ECD$.*

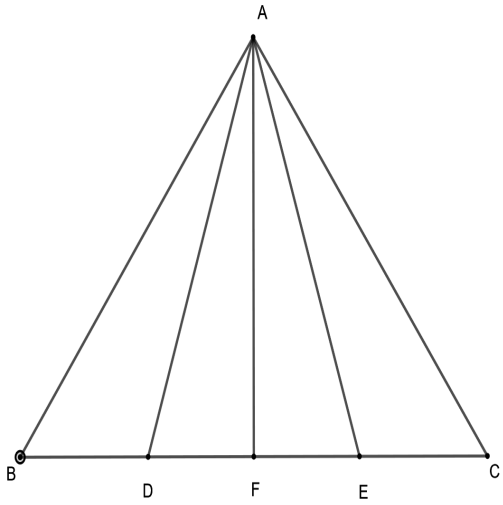



FIGURA 12. [24]

**Exerciţiul** 5.29. *([2]) În triunghiul oarecare $\Delta ABC$ se consideră punctul $M \in AB$ astfel încât $AM = AC$ şi punctul $N \in AC$ astfel încât $AN = AB$. Să se arate că punctul $I$ de intersecţie dintre $BC$ şi $MN$ se găseşte pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.*

**Exerciţiul** 5.30. *(G.M.-B nr.6-7-8/2018* [23]*) Se consideră segmentele congruente $[AB]$, $[BC]$ şi $[AD]$, cu punctul $D \in (BC)$. Arătaţi că mediatoarea segmentului $[DC]$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$ şi dreapta $AC$ sunt concurente.*

## 4. Triunghi echilateral

### 4.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 5.31. *([21]) În triunghiul echilateral $\Delta ABC$, notăm cu $M$ mijlocul laturii $[BC]$. Construim $MD \perp AC$, $D \in (AC)$ şi prelungim segmentul $[MD]$ cu segmentul $[DE]$ congruent cu el. Demonstraţi că triunghiul $\Delta AME$ este echilateral.*

*Soluţie:* În triunghiul $\Delta AME$, figura (13), avem $MD \perp AC$,

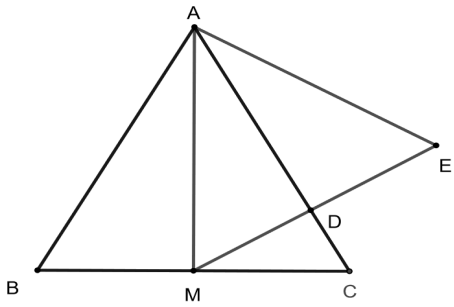



FIGURA 13. [24]

adică $[AD]$ este înălţime în $\Delta AME$. Dar, din ipoteză ştim că:

$$[MD] \equiv [DE],$$

de unde deducem că $[AD]$ este mediană în $\Delta AME$. Astfel, putem spune că $\Delta AME$ este isoscel. Obţinem:

$$m(\sphericalangle MAE) = 2m(\sphericalangle MAC)$$

În triunghiul $\Delta BAC$, $AM$ este mediană, deci este şi bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Deducem astfel că:

$$m(\sphericalangle MAC) = 30^\circ \text{ şi } m(\sphericalangle MAE) = 60^\circ.$$

Astfel, obţinem că $\Delta AME$ este echilateral.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.32. *(*[9]*) Fie $I$ intersecţia bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle ABC$ şi, respectiv, $\sphericalangle ACB$ ale triunghiului echilateral $\Delta ABC$. Să se arate că triunghiul $\Delta IAB$ este isoscel.*

*Soluţie:* În triunghiul $\Delta ABC$, din figura (14), $[CE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$. De unde deducem că $[CE$ este şi mediatoarea laturii $[AB]$ a triunghiului $\Delta ABC$. Deci:

$$[AE] \equiv [EB]$$

$$m(\sphericalangle AEI) = m(\sphericalangle BEI) = 90^\circ$$

$$\Delta IAE \equiv \Delta IBE \begin{cases} [AE] \equiv [EB] \\ \sphericalangle AEI \equiv \sphericalangle BEI \\ [IE] \equiv [IE] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă $LUL$ şi obţinem :

$$[AI] \equiv [BI]$$

În concluzie, triunghiul $\Delta IAB$ este isoscel. Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

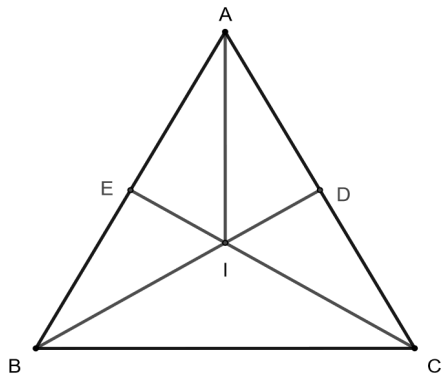



FIGURA 14. [24]

**Exerciţiul** 5.33. *(*[9]*) În triunghiul isoscel $\Delta ABC$, înălţimea $AD$, $D \in BC$ formează cu latura $[AC]$ un unghi a cărei măsură este egală cu $30^\circ$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului $\Delta ABC$.*

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C)$ şi $AD \perp BC$ (vezi figura (15)). Astfel, $AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, deci:

$$m(\sphericalangle A) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

În concluzie, triunghiul isoscel cu un unghi cu măsura egală cu $60^\circ$ este un triunghi echilateral.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

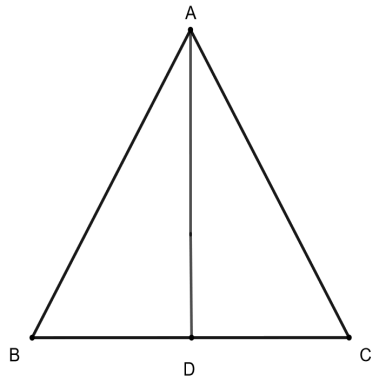



FIGURA 15. [24]

## 4.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 5.34. *(*[17]*) Se consideră triunghiul echilateral $\Delta ABC$ şi un punct $M$ pe latura $[BC]$. Din $M$ se duce perpendiculara $MP$ pe $AC$, care întâlneşte prelungirea laturii $[AB]$ în $D$. Să se arate că are loc $[MB] \equiv [BD]$.*

**Exerciţiul** 5.35. *(G.M.-B nr.4/2018, Supliment cu exerciţii* [23]*) În triunghiul ascuţitunghic $\Delta ABC$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$ intersectează dreapta $BC$ în $D$. Dacă $M$ şi $N$ sunt simetricele punctului $D$ faţă de dreptele $AB$, respectiv $AC$, iar triunghiul $\Delta MAN$ este echilateral, determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.*

**Exerciţiul** 5.36. *(*[15]*) În figura (16), triunghiul $\Delta ABC$ este echilateral, iar $[AD] \equiv [BE] \equiv [CF]$. Să se demonstreze că triunghiul $\Delta DEF$ este echilateral.*

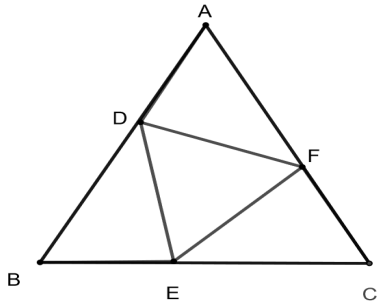



FIGURA 16. [24]

**Exerciţiul** 5.37. *(*[21]*) Pe laturile $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[CA]$ ale triunghiului echilateral $\Delta ABC$ se consideră punctele $M$, $N$ şi respectiv $P$ diferite de mijloacele laturilor astfel încât $[AM] \equiv [BN] \equiv [CP]$. $AN \cap CM = \{D\}$, $AN \cap BP = \{E\}$ şi $BP \cap CM = \{F\}$. Demonstraţi că triunghiul $\Delta DEF$ este echilateral.*

**Exerciţiul** 5.38. *(*[17]*) Se dă un triunghi $\Delta ABC$ în care măsura unghiului $\sphericalangle CAB$ este egală cu $60^\circ$. Înălţimile $BB'$ şi $CC'$ se intersectează în $H$, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAB$ intersectează cele două*

*înălţimi în $O$ şi respectiv $E$. Să se demonstreze că triunghiul $\Delta OEH$ este echilateral.*

**Exerciţiul** 5.39. *(*[9]*) În triunghiul echilateral $\Delta ABC$ punctele $M$ şi $N$ aparţin laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, astfel încât $[BM] \equiv [AN]$. Dreptele $BN$ şi $CM$ se intersectează în punctul $P$. Calculaţi măsura unghiului $\sphericalangle NPC$.*

**Exerciţiul** 5.40. *(G.M.-B nr.6-7-8/2018* [23]*) În interiorul triunghiului echilateral $\Delta ABC$ se construieşte triunghiul isoscel $\Delta BCD$, cu baza $[BC]$. Mediatoarea laturii $[AC]$ intersectează dreapta $CD$ în $E$. Arătaţi că $AD = DE$ dacă şi numai dacă $BD = BE$.*

## 5. Triunghi dreptunghic

### 5.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 5.41. *([21]) În triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$ în care se cunosc $m(\sphericalangle A) = 90°$şi $[AB] \equiv [AC]$, fie $P \in (BC)$, $M \in (AB)$ şi $N \in (AC$ astfel încât $[BA] \equiv [BP]$, $[BM] \equiv [PC]$ şi $[BC] \equiv [AN]$. Demonstraţi că punctele $M, N, P$ sunt coliniare.*

*Soluţie:*

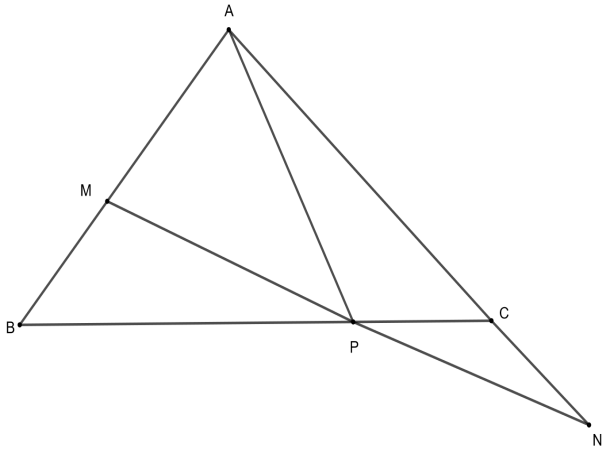



FIGURA 17. [24]

Din informaţiile oferite în ipoteză se poate demonstra:

$$\Delta MPB \equiv \Delta PAC \begin{cases} [BM] \equiv [PC] \\ \sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle ACP \\ [BP] \equiv [AC] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.U.L). Am utilizat că $\Delta ABC$ este dreptunghic isoscel. Deducem că:

$$\sphericalangle MPB \equiv \sphericalangle PAC$$

În triunghiul $\Delta ABP$ isoscel observăm că:

$$m(\sphericalangle ABP) = 45^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAP) = 67^\circ 30'$$

De asemenea, $m(\sphericalangle PAC) = 22^\circ 30'$.

Astfel, obţinem că $m(\sphericalangle MPB) = 22^\circ 30'$.

Dar, triunghiul $\Delta PCN$ este isoscel, deci:

$$m(\sphericalangle PCN) = 135^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle CPN) = 22^\circ 30'$$

$$\Rightarrow \sphericalangle MPB \equiv \sphericalangle CPN$$

şi cum $B, P, C$ sunt coliniare, obţinem că punctele $M, N, P$ sunt coliniare.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.42. *(*[20]*) Se consideră un punct arbitrar $M$ în interiorul unui pătrat $ABCD$ şi prin acesta se duc două drepte perpendiculare care intersectează laturile opuse ale pătratului respectiv în punctele $E, F$ şi respectiv $G, H$. Punctul $E$ aparţine dreptei $AB$, iar punctul $G$, dreptei $BC$. Să se arate că $[EF] \equiv [GH]$*

*Soluţie:*

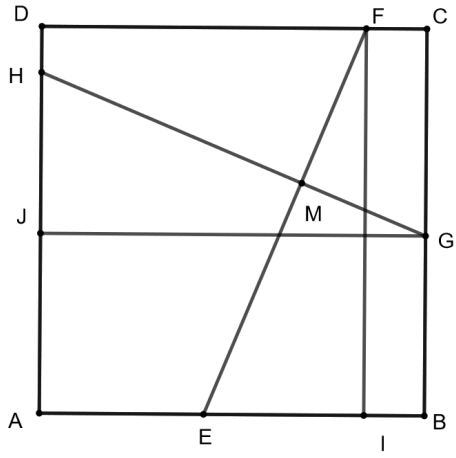



FIGURA 18. [24]

Construim $FI \perp AB$ şi $GJ \perp AD$. Astfel, se obţine:

$$\Delta EIF \equiv \Delta GJH \begin{cases} [FI] \equiv [GJ] \\ \sphericalangle EFI \equiv \sphericalangle HGJ \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă $CU$. Unghiurile $\sphericalangle EFI$ şi $\sphericalangle HGJ$ sunt congruente deoarece ambele unghiuri sunt ascuţite şi au laturile perpendiculare. Astfel, obţinem:

$$[EF] \equiv [GH]$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.43. *(G.M.-B nr.11/2016* [23]*) Se consideră triunghiul $\Delta ABC$ în care $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$ şi dreapta $AD$, unde $D \in (BC)$, este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Pe laturile $(AB)$ şi $(AC)$ se consideră punctele $E$ şi respectiv $F$ astfel încât $m(\sphericalangle BDE) = m(\sphericalangle CDF) = 60^\circ$.*

*Arătaţi că $[BE] \equiv [EF] \equiv [FC]$.*

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$ (vezi figura (19)). Astfel, construim $DG \perp AC$ şi $DH \perp AB$. Deducem că:

$$[DG] \equiv [DH]$$

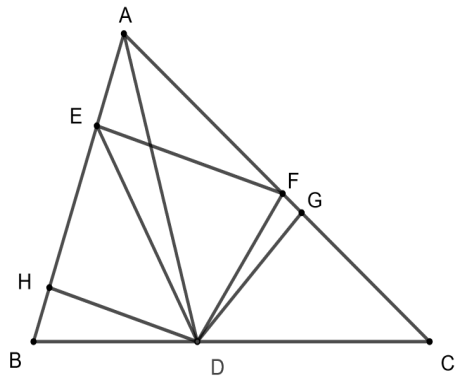



FIGURA 19. [24]

Dar, din $\Delta ADG$ dreptunghic putem obţine:

$$m(\sphericalangle ADG) = 60^\circ$$

Informaţiile din ipoteză ne conduc la:

$$m(\sphericalangle EDG) = 60^\circ$$

Rezultă că:

$$m(\sphericalangle FDG) = m(\sphericalangle ADE) = 60^\circ - m(\sphericalangle ADF)$$

şi:

$$m(\sphericalangle BDH) = m(\sphericalangle ADE) = 60^\circ - m(\sphericalangle EDH)$$

În concluzie, $\sphericalangle GDF \equiv \sphericalangle BDH$. Deducem că:

$$\Delta GDF \equiv \Delta HDB \begin{cases} [DG] \equiv [HD] \\ \sphericalangle GDF \equiv \sphericalangle BDH \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (C.U) şi obţinem :

$$[DF] \equiv [DB]$$

Dar,

$$\Delta FDE \equiv \Delta BDE \begin{cases} [ED] \equiv [ED] \\ \sphericalangle FDE \equiv \sphericalangle BDE \\ [FD] \equiv [BD] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.U.L). Rezultă:

$$[FE] \equiv [BE]$$

Utilizând congruenţa triunghiurilor $\Delta FDE \equiv \Delta FDC$ rezultă că: $[EF] \equiv [FC]$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. $\square$

## 5.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 5.44. *(*[15]*) Să se demonstreze că într-un triunghi oricare două vârfuri sunt egal depărtate de mediana care pleacă din vârful al treilea.*

**Exerciţiul** 5.45. *(G.M.-B nr.9/2018, Supliment cu exerciţii* [23]*) Se consideră triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$ cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$. Se consideră punctul $D \in AC$, astfel încât $CD = BC$ şi $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle ABC$.*

*Demonstraţi că: $AB = \dfrac{BD}{2}$ şi $AC = \dfrac{CD}{2}$.*

**Exerciţiul** 5.46. *(*[17]*) În triunghiul $\Delta ABC$ construim bisectoarea $AD$, $D \in (BC)$ a unghiului $\sphericalangle A$ care are măsura egală cu $60^\circ$. Din $D$ se duce perpendiculara $DM \perp AB$. Din $M$ se duce perpendiculara $MN \perp AD$. Să se arate că: $3DM = AD + 2DN$.*

**Exerciţiul** 5.47. *(*[18]*) Se consideră triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$, $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ şi înălţimea $AM$, $M \in BC$. Dacă punctele $N$ şi respectiv $P$ sunt simetricele punctului $M$ în raport cu catetele $BA$ şi respectiv $AC$ să se arate că punctele $N$, $A$, $P$ sunt coliniare.*

**Exerciţiul** 5.48. *(*[17]*) Să se arate că un triunghi cu două înălţimi egale este isoscel. Vor fi discutate ambele cazuri: triunghiul este ascuţitunghic, respectiv triunghiul este obtuzunghic, vezi figura (20).*

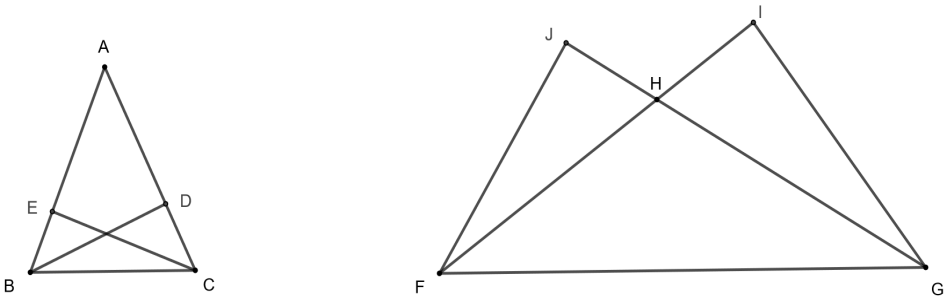



FIGURA 20. [24]

**Exerciţiul** 5.49. *(*[9]*) În triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$, se cunosc $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle C) = 60^\circ$ şi $BC = 3cm$. În punctul $D$, mijlocul laturii $[AC]$, se ridică perpendiculara $DE$ pe dreapta $AC$, $E \in BC$. Să se calculeze perimetrul triunghiului $\Delta ACE$.*

**Exerciţiul** 5.50. *(*[9]*) În triunghiul $\Delta MNP$ se ştie că înălţimea $[MA]$, $A \in (NP)$, formează cu latura $[MN]$ un unghi congruent cu unghiul $\sphericalangle N$ al triunghiului şi cu latura $[MP]$ un unghi congruent cu unghiul $\sphericalangle P$ al triunghiului. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului $\Delta MNP$.*

## 6. Linia mijlocie în triunghi

### 6.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 5.51. *([17]) Pe prelungirile laturilor $[BC]$ şi $[CA]$ ale triunghiului echilateral $\Delta ABC$ se consideră punctele $D$ şi $E$ astfel încât $CD = AE = AB$. Dreapta $DE$ intersectează dreapta $AB$ în $F$. Să se demonstreze că $AB = 3AF$.*

*Soluţie:*

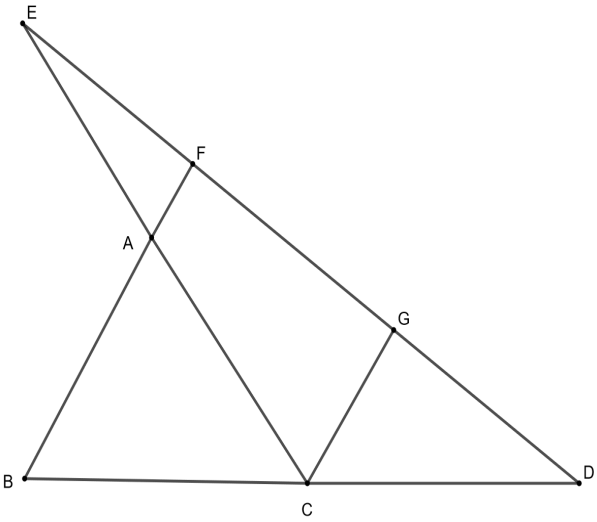



FIGURA 21. [24]

Construim $CG \parallel AB, G \in DE$. Observăm că $CG$ este linie mijlocie în $\Delta DFB$, astfel, obţinem:

$$BF = 2CG$$

De asemenea, $AF$ este linie mijlocie în $\Delta ECG$, astfel, deducem că:

$$CG = 2AF$$

În concluzie:

$$BF = 4AF \Rightarrow AB = BF - AF$$

$$AB = 4AF - AF \Rightarrow AB = 3AF.$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.52. *(*[22]*) Să se demonstreze că mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal depărtat de cele trei vârfuri ale triunghiului.*

*Soluţie:* Se consideră triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$ în care se cunoaşte că $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$ (vezi figura (22)). Punctul $D$ este mijlocul ipotenuzei $[BC]$ şi punctul $E$ este mijlocul laturii $[AC]$ . Deducem că $DE$ este linie mijlocie în $\Delta CAB$. Deci,

$$DE \parallel AB \Rightarrow DE \perp AC$$

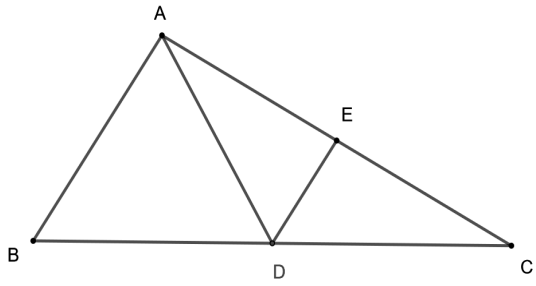



FIGURA 22. [24]

Astfel, se obţine:

$$AD = DC = DB$$

În concluzie, mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal depărtat de cele trei vârfuri ale triunghiului.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.53. *(*[2]*) În triunghiul $\Delta ABC$ se consideră $\Delta DEG$, în care $D$ este mijlocul laturii $[BC]$, $G$ este piciorul înălţimii corespunzătoare unghiului $\sphericalangle A$, iar $E$ mijlocul laturii $[AB]$.*

*Să se demonstreze că $m(\sphericalangle DEG) = m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle ACB)$.*

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $D$ este mijlocul laturii $[BC]$ şi $E$ mijlocul laturii $[AB]$ (figura (23)), deci $DE$ este linie mijlocie în $\Delta BAC$. Deducem că: $DE \parallel AC$.

Unghiul $\sphericalangle BGE$ este unghi exterior $\Delta EGD$, deci:

$$m(\sphericalangle BGE) = m(\sphericalangle GED) + m(\sphericalangle EDG)$$
$$\Rightarrow m(\sphericalangle BGE) = m(\sphericalangle GED) + m(\sphericalangle ACB)$$

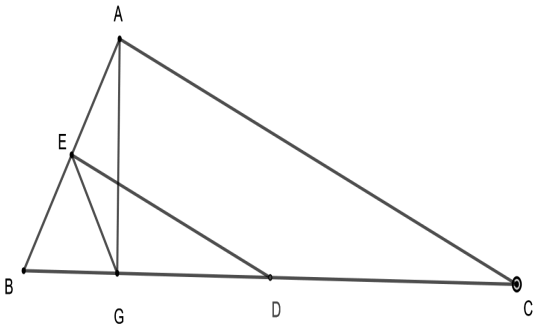



FIGURA 23. [24]

Relaţia $\sphericalangle EDG \equiv \sphericalangle ACB$ este adevărată deoarece sunt unghiuri corespondente.

Deoarece $GE$ este mediană în triunghiul dreptunghic $\Delta AGB$, obţinem:

$$m(\sphericalangle ABG) = m(\sphericalangle BGE)$$
$$\Rightarrow m(\sphericalangle ABG) = m(\sphericalangle GED) + m(\sphericalangle ACB)$$
$$\Rightarrow m(\sphericalangle DEG) = m(\sphericalangle ABC) - m(\sphericalangle ACB)$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 6.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 5.54. *(*[2]*) Într-un triunghi $\Delta ABC$ se duce mediana $CD, D \in AB$. Să se arate că latura $[CB]$ este divizată în trei părţi egale de către dreapta ce uneşte vârful $A$ cu mijlocul $M$ al medianei şi de paralela la aceasta dusă din $D$.*

**Exerciţiul** 5.55. *(*[15]*) Fie $\Delta ABC$ un triunghi şi $D$, $E$ şi respectiv $F$ mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[CA]$. Să se demonstreze că medianele triunghiului $\Delta ABC$ sunt şi medianele triunghiului $\Delta DEF$.*

**Exerciţiul** 5.56. *(*[9]*) Perimetrul unui triunghi isoscel $\Delta ABC$ este de $23cm$. Să se calculeze lungimile liniilor mijlocii ale $\Delta ABC$ dacă: $AB + AC = 18cm$. Problema admite mai multe soluţii?*

**Exerciţiul** 5.57. *(*[15]*) Într-un triunghi $\Delta ABC$ se cunosc: lungimea laturii $[AB]$, $AB = 9cm$, lungimea liniei mijlocii în triunghi care trece prin mijlocul laturii $[AB]$ are lungimea egală cu $5cm$ şi perimetrul $\Delta ABC$ este egal cu $30cm$. Să se determine lungimile laturilor $[BC]$ şi $[AC]$ ale $\Delta ABC$.*

**Exerciţiul** 5.58. *(*[18]*) Fiind dat un triunghi $\Delta ABC$, cu $M$ şi $N$ mijloacele laturilor $[AC]$ şi respectiv $[AB]$. Se construieşte de la $M$ spre $C$, $[MD] \equiv [AN]$. Să se arate că perpendiculara coborâtă din punctul $D$ pe bisectoarea interioară unghiului $\sphericalangle A$ trece printr-un punct fix.*

**Exerciţiul** 5.59. *(*[9]*) În triunghiul $\Delta ABC$ punctele $D$ şi $E$ sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[BC]$ . Dacă $G$ este punctul de intersecţie al dreptelor $AE$ şi $CD$ demonstraţi că:*

a) $2DG = CG$;
b) $2EG = GA$.

**Exerciţiul** 5.60. *(*[18]*) Se dă un triunghi $\Delta ABC$. Pe latura $[BC]$ se consideră un punct $D$ astfel încât $CD = \frac{1}{3}BC$. Să se arate că dreapta $AD$ trece printr-un punct fix.*

## 7. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă

### 7.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 5.61. *(*[15]*) Se consideră dreptele paralele $AB$ şi $CD$ $(AB \parallel CD)$. Pe aceste drepte se aleg punctele $Q$, $M \in [CD]$ ($M$ se află între $Q$ şi $D$) şi $N$, $P \in [AB]$ ($P$ se află între $N$ şi $B$). Punctul $Q$ se află în acelaşi semiplan determinat de dreapta $MN$ şi punctul $A$ ca şi punctul $C$. Se consideră $QP \cap MN = \{O\}$ (vezi figura (1)). Se cunosc: $m(\sphericalangle QMN) = 30°$, $m(\sphericalangle QPN) = 45°$.*

*Să se calculeze $m(\sphericalangle MOP)$.*

*Soluţie:*

Se construieşte semidreapta $(OR$, figura (24), paralelă cu $AB$, punctul $R$ aflându-se în semiplanul delimitat de dreapta $MN$ şi punctul $D$. Se observă următoarele congruenţe:

$$\sphericalangle QMO \equiv \sphericalangle MOR,$$

$$\sphericalangle OPN \equiv \sphericalangle POR,$$

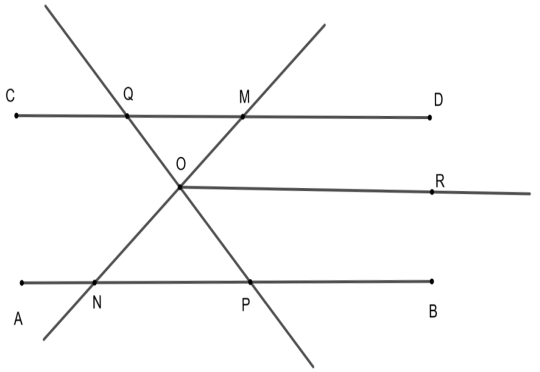



FIGURA 24. [24]

deoarece sunt unghiuri alterne interne. Astfel, obţinem că:

$$m(\sphericalangle MOP) = m(\sphericalangle MOR) + m(\sphericalangle ROP)$$

$$m(\sphericalangle MOP) = 30° + 45° = 75°.$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

**Exerciţiul** 5.62. *([17]) Două drepte paralele sunt intersectate de o secantă în punctele $M$ şi $N$. Bisectoarea unui unghi din $M$ intersectează paralela prin $N$, în $A$, iar o paralelă oarecare la dreapta $MA$ intersectează dreapta $MN$ în $B$ şi dreapta $AN$ în $C$. Dreptele $AB$ şi $MC$ se intersectează în $D$. Să se demonstreze că dreptele $DN$ şi $AM$ sunt perpendiculare.*

*Soluţie:* În figura (25), observăm că:

$$\Delta ABM \equiv \Delta MCA \begin{cases} [AM] \equiv [AM] \\ \sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle AMB \\ [AC] \equiv [MB] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.U.L). Astfel, obţinem :

$$\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle MCA$$

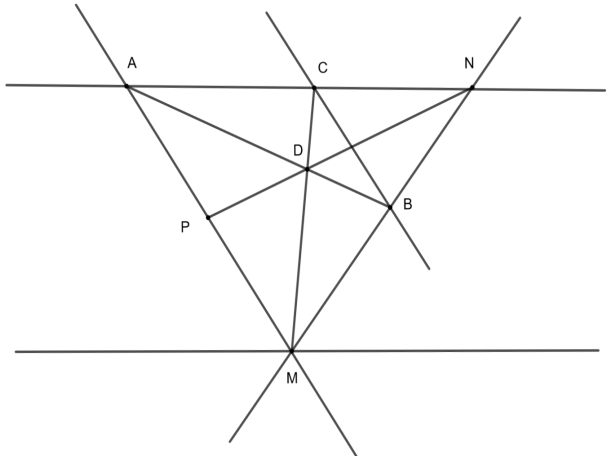



FIGURA 25. [24]

În congruenţa de mai sus, am utilizat $[AC] \equiv [MB]$ (segmentele respective sunt diferenţe de segmente congruente).

Se obţine egalitatea:

$$m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle MCB)$$

deoarece sunt suplimente ale unor sume de unghiuri egale:

$$m(\sphericalangle ABM) + m(\sphericalangle CBN) = m(\sphericalangle MCA) + m(\sphericalangle BCN)$$

În concluzie, $\Delta BCD$ este triunghi isoscel.

$$\Delta CDN \equiv \Delta BDN \begin{cases} [CD] \equiv [BD] \\ [CN] \equiv [BN] \\ [DN] \equiv [DN] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.L.L) şi obţinem :

$$\sphericalangle CDN \equiv \sphericalangle DNB$$

Deducem că: ($ND$ este bisectoare în triunghiul isoscel $\Delta ANM$. Deoarece $ND$ este înălţime în triunghiul $\Delta ANM$, se obţine concluzia, $ND \perp AM$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.63. *(*[4]*) Se consideră $\Delta ABC$ un triunghi isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$. Să se arate că există un segment $s$, aşa încât oricare ar fi un punct $M$ pe baza $[BC]$ şi proiecţiile sale ortogonale $N$, $P$ pe $(AB)$, respectiv $(AC)$, să aibă loc relaţia $MN + MP = s$.*

*Soluţie:* Fie $CR \perp AB, R \in AB$ (figura (26)). Dorim să arătăm că $MN + MP = CR$.

Din ipoteză cunoaştem că $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB)$ deoarece sunt unghiuri de la baza triunghiului isoscel $\Delta ABC$. Construim prin $C$ o paralelă la $AB$ care intersectează $MN$ în punctul $Q$ (vezi figura (3)). Astfel, avem:

$$\sphericalangle QCB \equiv \sphericalangle CBA$$

ca unghiuri alterne interne.

Rezultă că ($CB$ este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle ACQ$. Deducem că:

$$[MP] \equiv [MQ]$$

s-a utilizat proprietatea punctelor situate pe bisectoare unui unghi.

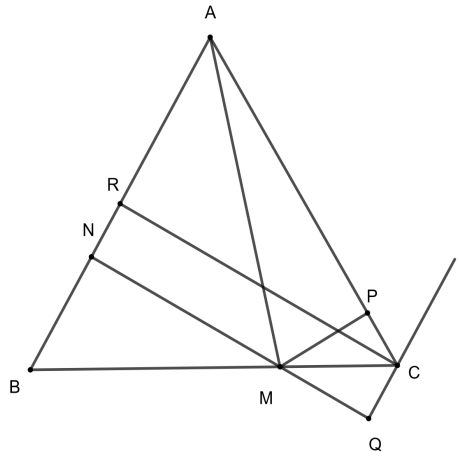



FIGURA 26. [24]

Rezultă că:

$$MN + MP = MN + MQ = NQ$$

Dar $CRNQ$ este dreptunghi, deducem că:

$MN + MQ = CR$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 7.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 5.64. *(*[22]*) Să se demonstreze că o paralelă la baza unui triunghi isoscel formează cu celelalte două laturi un triunghi isoscel.*

**Exerciţiul** 5.65. *(*[9]*) În triunghiul isoscel $\Delta ABC$ ($[AB] \equiv [AC]$), punctele $M$ şi $N$ aparţin laturilor congruente: $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$, astfel încât $MN \parallel BC$. Să se demonstreze că $[CM] \equiv [BN]$.*

**Exerciţiul** 5.66. *(*[2]*) Se consideră $\Delta ABC$. Paralelele la $AC$ prin $B$ şi la $AB$ prin $C$ se intersectează în $D$. Se prelungesc $AB$ cu $BE = AB$ şi $AC$ cu $CF = AC$.*

a) *Să se arate că punctele $D, E, F$ sunt coliniare.*
b) *Dreptele $FB$ şi $EC$ intersectează $CD$ în $M$ şi $BD$ în $N$. Să se arate că $4MN = FE$.*

**Exerciţiul** 5.67. *(*[15]*) Fie $\sphericalangle xOy$ un unghi şi $M$ un punct al bisectoarei sale. Prin $M$ se duce paralela la $OX$ şi se notează cu $N$ intersecţia ei cu $OY$. Să se compare segmentul $[NM]$ cu $[NO]$.*

**Exerciţiul** 5.68. *(*[15]*) Se consideră triunghiul $\Delta ABC$ (vezi figura (27)) în care $BI$ şi $CI$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$ şi respectiv $\sphericalangle ACB$, iar $MN \parallel BC$, unde $M \in [AB]$, $N \in [AC]$. Să se demonstreze că $MN = MB + NC$.*

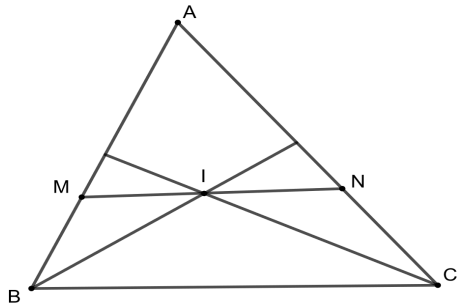



FIGURA 27. [24]

**Exerciţiul** 5.69. *(*[9]*) În triunghiul $\Delta ABC$ ascuţitunghic, $b$ şi $c$ drepte perpendiculare în punctele $B$ şi $C$ pe dreapta $BC$. Se notează $b \cap AC = \{M\}$ şi $c \cap AB = \{N\}$.*

a) *Demonstraţi că: $\Delta AMB$ şi $\Delta ACN$ au unghiurile respectiv congruente;*
b) *Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului $\Delta AMB$ dacă se cunosc: $m(\sphericalangle ABC) = 30^\circ$ şi $m(\sphericalangle ACB) = 80^\circ$.*

**Exerciţiul** 5.70. *(*[9]*) Triunghiul $\Delta ABC$ este isoscel, $[BD]$ este mediană în triunghi, $D \in (AC)$ şi $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB)$. Construim $CE \parallel BD$, unde $E \in AB$. Demonstraţi că: $[AB] \equiv [BE]$.*

## 8. Triunghiuri asemenea

### 8.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 5.71. *([21]) În triunghiul $\Delta ABC$ fie $D$ mijlocul laturii $[BC]$ şi $P$ un punct oarecare pe dreapta $BC$. Paralela prin $P$ la mediana $AD$ intersectează dreptele $AB$ şi $AC$ în punctele $E$ şi respectiv $F$. Demonstraţi că:*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}.$$

*Soluţie:*

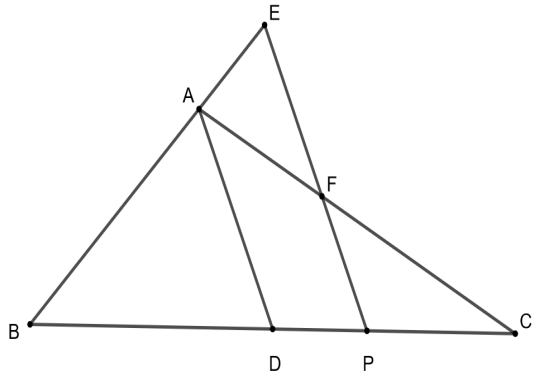



FIGURA 28. [24]

În triunghiul $\Delta EBP$, figura (28), din ipoteză ştim că: $AM \parallel EP$. Astfel, aplicând teorema lui Thales se obţine:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{DB}{DP}.$$

De asemenea, în triunghiul $\Delta ADC$, din ipoteză şe ştie că: $FP \parallel AD$. Din teorema lui Thales deducem că:

$$\frac{AC}{AF} = \frac{DC}{DP}.$$

Dar, din ipoteză cunoaştem că $D$ este mijlocul laturii $[BC]$. Astfel, $[DB] \equiv [DC]$. Deci:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}.$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.72. *(*[18]*) Să se demonstreze că bisectoarele exterioare ale unui triunghi intersectează laturile opuse în trei puncte coliniare.*

*Soluţie:*

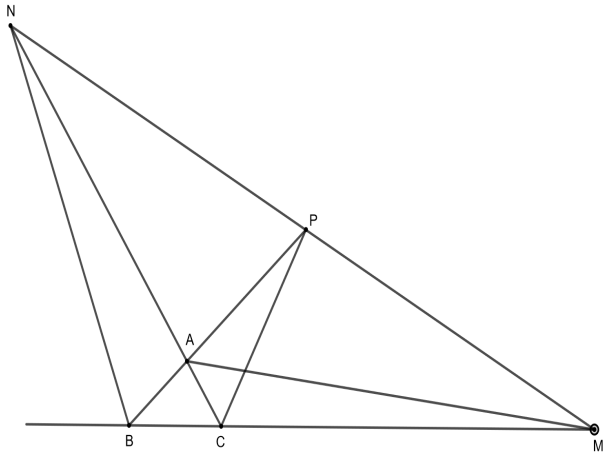



FIGURA 29. [24]

În figura (29), $AM$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$, din teorema bisectoarei deducem că:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$$

$CP$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle BCA$, din teorema bisectoarei obţinem:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{PA}{PB}$$

$BN$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle ABC$, din teorema bisectoarei obţinem:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{NC}{NA}$$

Înmulţind cele trei şiruri de rapoarte, se obţine:

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{BC}{BA} = \frac{MB}{MC} \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{NC}{NA}$$

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{PA}{PB} \cdot \frac{NC}{NA} = 1.$$

Conform reciprocei teoremei lui Menelaus, punctele $M, N$ şi respectiv $P$ sunt coliniare.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.73. *(G.M.-B nr.1/2017* [23]*) Fie triunghiul $\Delta ABC$, $M$ un punct oarecare pe latura $[AB]$ şi $N$ un punct pe latura $[AC]$. Dacă $\{O\} = BN \cap MC$, $\mathcal{A}_{\Delta AMN} = 24cm^2$, $\mathcal{A}_{\Delta OMN} = 6cm^2$ şi $\mathcal{A}_{\Delta OBC} = 20cm^2$, aflaţi aria $\Delta ABC$.*

*Soluţie:* Aria $\Delta AMN$ (vezi figura (30)) o putem exprima:

$$\mathcal{A}_{\Delta AMN} = \frac{AM \cdot AN \cdot \sin A}{2}$$

De asemenea, aria $\Delta ABC$ este egală cu:

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$$

Dacă împărţim cele două relaţii se obţine:

$$\frac{\mathcal{A}_{\Delta AMN}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{AM \cdot AN \cdot \sin A}{2}}{\frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}}$$

$$\frac{\mathcal{A}_{\Delta AMN}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$$

Aria $\Delta OMN$ este egală cu:

$$\mathcal{A}_{\Delta OMN} = \frac{OM \cdot ON \cdot \sin(\sphericalangle MON)}{2}$$

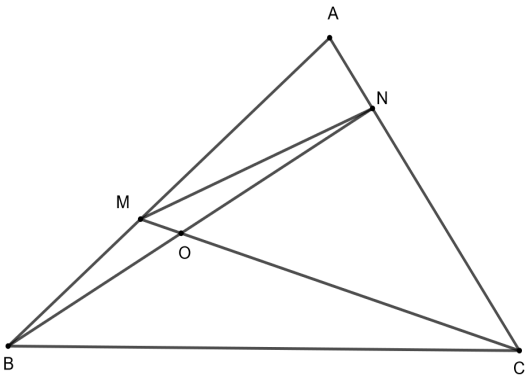



FIGURA 30. [24]

De asemenea, aria $\Delta BOC$ este egală cu:

$$\mathcal{A}_{\Delta BOC} = \frac{BO \cdot CO \cdot \sin(\sphericalangle BOC)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{\Delta OMN}}{\mathcal{A}_{\Delta BOC}} = \frac{OM \cdot ON}{OB \cdot OC}$$

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul $\Delta ABN$ considerând transversala $M - O - C$, se obţine:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BO}{NO} \cdot \frac{NC}{AC} = 1.$$

De asemenea, dacă aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul $\Delta ACM$ considerând transversala $B - O - N$, se obţine:

$$\frac{AN}{CN} \cdot \frac{CO}{MO} \cdot \frac{MB}{AB} = 1.$$

Dacă vom înmulţi ultimele două relaţii, deducem că:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BO}{NO} \cdot \frac{NC}{AC} \cdot \frac{AN}{CN} \cdot \frac{CO}{MO} \cdot \frac{MB}{AB} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{OM \cdot ON}{OB \cdot OC}$$

Astfel, obţinem:

$$\frac{\mathcal{A}_{\Delta AMN}}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{\mathcal{A}_{\Delta OMN}}{\mathcal{A}_{\Delta BOC}}$$
$$\Rightarrow \frac{24}{\mathcal{A}_{\Delta ABC}} = \frac{6}{20}$$
$$\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta ABC} = 80cm^2.$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

**Exerciţiul** 5.74. *([2]) Se dă triunghiul oarecare $\Delta ABC$ şi se ia un punct arbitrar $M$ pe latura $[AB]$. Se uneşte $C$ cu $M$, iar din $A$ construim $AN \parallel CM$ care intersectează $BC$ în $N$ şi $BP \parallel CM$ care intersectează $AC$ în $P$. Să se arate că:*

$$CM \cdot (AN + BP) = AN \cdot BP.$$

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $CM \parallel AN$ (vezi figura (31)). Astfel, conform teoremei fundamentale a asemănării avem:

$$\Delta BCM \sim \Delta BNA$$
$$\frac{BC}{BN} = \frac{CM}{AN} = \frac{BM}{BA}$$

Dar, $CM \parallel BP$, conform teoremei fundamentale a asemănării avem: $\Delta ABP \sim \Delta AMC$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{CM}{BP} = \frac{AM}{AB}$$

Dacă adunăm aceste relaţii, obţinem:

$$\frac{CM}{AN} + \frac{CM}{BP} = \frac{BM}{BA} + \frac{AM}{AB}$$
$$\Rightarrow \frac{CM}{AN} + \frac{CM}{BP} = \frac{BM + AM}{AB}$$
$$\Rightarrow \frac{CM}{AN} + \frac{CM}{BP} = 1$$
$$\Rightarrow CM \cdot (AN + BP) = AN \cdot BP$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

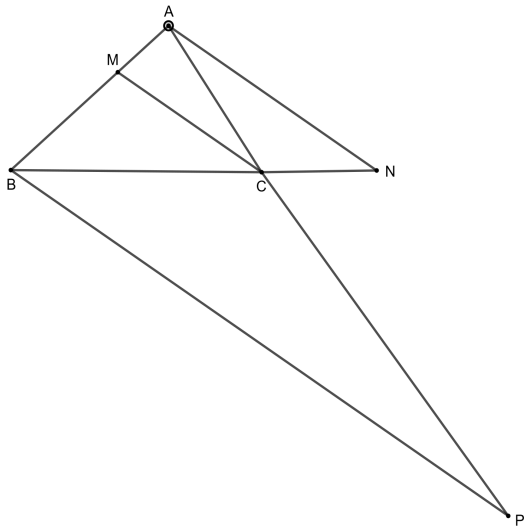



FIGURA 31. [24]

**Exerciţiul** 5.75. *(*[9]*) Se consideră $ABCD$ şi $AMNP$ două pătrate (figura (32)), $E$ este mijlocul laturii $[BC]$, iar $Q$ este mijlocul laturii $[MN]$.*

a) *Arătaţi că $[PD] \equiv [MB]$;*

b) *Arătaţi că $\dfrac{AE}{PQ} = \dfrac{AB}{AM}$;*

*Soluţie:* a) Folosind ipoteza obţinem:

$$\Delta PAD \equiv \Delta MAB \begin{cases} [PA] \equiv [MA] \\ \sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle MAB \\ [AD] \equiv [AB] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă $ULU$ şi obţinem :

$$[PD] \equiv [MB]$$

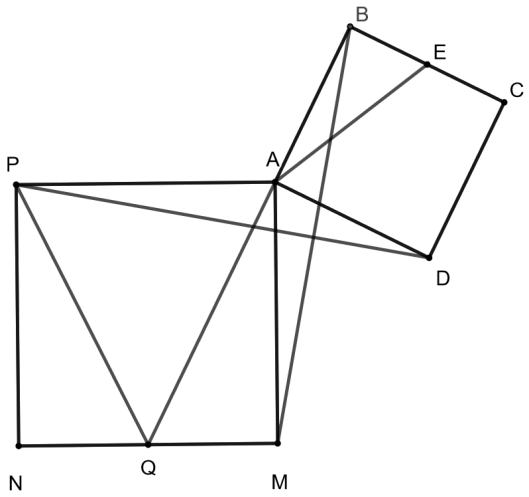



FIGURA 32. [24]

b) Avem:

$$\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle AMQ$$
$$\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle MAQ$$

Congruenţa unghiurilor implică asemănarea $\Delta ABE \sim \Delta AMQ$. De aici deducem că:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AE}{AQ} = \frac{BE}{MQ}$$
$$\Rightarrow \frac{AE}{PQ} = \frac{AB}{AM}$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.76. *([19]) Se consideră un triunghi oarecare $\Delta ABC$ în care se duce o paralelă $MN$ la dreapta $BC$, $M \in AC$, $N \in AB$. Dreptele $BM$ şi $CN$ se intersectează în $D$, iar prin $D$ se duce $EF \parallel BC$, $E \in AB$, $F \in AC$.*

a) *Să se demonstreze că $AD$ este mediana dusă din vârful $A$ al triunghiului $\Delta ABC$;*

b) *Să se arate că:*

$$\frac{2}{EF} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{MN}$$

c) *Să se arate că dacă notăm:* $\frac{EN}{EB} = k$ *şi* $S_1$, $S_2$ *ariile triunghiurilor* $\Delta DMN$ *şi respectiv* $\Delta DBC$ *atunci:*

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2.$$

*Soluţie:* a) Din ipoteză cunoaştem că $ED \parallel BC$ (vezi figura (33)). Astfel, $\Delta EDN \sim \Delta BCN$, conform teoremei fundamentale a asemănării. Deducem că:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{EN}{BN} = \frac{DN}{CN}$$

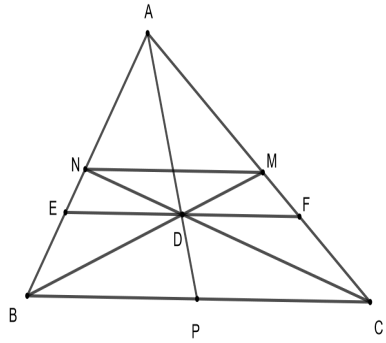



FIGURA 33. [24]

Dar, $DF \parallel BC$ rezultă că $\Delta DFM \sim \Delta BCM$, astfel:

$$\frac{DF}{BC} = \frac{FM}{CM} = \frac{DM}{BM}$$

Dar

$$\frac{EN}{BN} = \frac{FM}{CM}$$

Se obţine:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{DF}{BC} \Rightarrow ED = DF$$

$DF \parallel PC$ rezultă că $\Delta ADF \sim \Delta APC$, astfel:

$$\frac{DF}{PC} = \frac{AD}{AP} = \frac{AF}{AC}$$

$DE \parallel BP$ rezultă că $\Delta ADE \sim \Delta APB$, astfel:

$$\frac{ED}{BP} = \frac{AD}{AP} = \frac{AE}{AB}$$

Se observă că:

$$\frac{DF}{PC} = \frac{ED}{BP}$$
$$\Rightarrow PB = PC$$

adică $P$ este mijlocul laturii $[BC]$.

b) $DE \parallel BC$ rezultă că $\Delta EDN \sim \Delta BCN$, astfel:

$$\frac{ED}{BC} = \frac{NE}{BN} = \frac{ND}{NC}$$

$DE \parallel MN$ rezultă că $\Delta EBD \sim \Delta NBM$, astfel:

$$\frac{ED}{NM} = \frac{BE}{BN} = \frac{BD}{BM}$$

Adunând aceste rapoarte, obţinem:

$$\frac{ED}{BC} + \frac{ED}{NM} = \frac{NE}{BN} + \frac{BE}{BN}$$
$$\Rightarrow \frac{ED}{BC} + \frac{ED}{NM} = 1$$

$DF \parallel BC$ rezultă că $\Delta FDM \sim \Delta CBM$, astfel:

$$\frac{FD}{BC} = \frac{MF}{CM} = \frac{MD}{MB}$$

$DF \parallel MN$ rezultă că $\Delta FCD \sim \Delta MCN$, astfel:

$$\frac{FD}{NM} = \frac{CF}{CM} = \frac{CD}{CN}$$

Adunând aceste rapoarte, obţinem:

$$\frac{FD}{BC} + \frac{FD}{NM} = \frac{MF}{CM} + \frac{CF}{CM}$$
$$\Rightarrow \frac{FD}{BC} + \frac{FD}{NM} = 1$$

În concluzie,

$$\frac{ED}{BC} + \frac{ED}{NM} + \frac{FD}{BC} + \frac{FD}{NM} = 2$$
$$\frac{EF}{BC} + \frac{EF}{MN} = 2$$
$$\Rightarrow \frac{2}{EF} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{MN}$$

c) $MN \parallel BC$ rezultă că $\Delta DMN \sim \Delta DCB$, astfel:

$$\frac{DN}{DB} = \frac{MN}{CB} = \frac{DM}{DC}$$
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2.$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 8.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 5.77. *(*[17]*) În mijlocul $D$ al ipotenuzei $[AB]$ a triunghiului $\Delta ABC$ ridicăm o perpendiculară pe ipotenuză. Această perpendiculară intersectează cateta $[CB]$ în punctul $M$, iar prelungirea catetei $[AC]$ în $N$. Să se calculeze ipotenuza dacă $DM = 3cm$ şi $MN = 9cm$.*

**Exerciţiul** 5.78. *(*[20]*) În triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$ se cunosc: $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $D$ este piciorul înălţimii coborâte din $A$ pe ipotenuză, $E$ şi $F$ sunt proiecţiile lui $D$, repectiv pe catetele $[AB]$ şi $[AC]$, iar $M$ şi $N$ sunt proiecţiile lui $E$ şi $F$ pe ipotenuză. Să se demonstreze că:*

$$\frac{BM}{NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

**Exerciţiul** 5.79. *(*[15]*) Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB \parallel CD$. Printr-un punct oarecare $M$ al diagonalei $AC$ se duce paralela $MN$ la $CB$, $N \in AB$ şi paralela $MP$ la $CD$, cu $P \in AD$. Să se demonstreze că $PN \parallel BD$.*

**Exerciţiul** 5.80. *(*[6]*) Se dă triunghiul $\Delta ABC$ şi se notează cu $O$ centrul cercului circumscris. Se duce diametrul $AD$ şi perpendiculara din $B$ pe acest diametru, care intersectează pe $AC$ în punctul $E$. Să se arate că: $AB^2 = AC \cdot AE$.*

**Exerciţiul** 5.81. *(*[21]*) Fie triunghiul isoscel $\Delta ABC$ în care se cunosc: $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\sphericalangle A) = 108^\circ$. Mediatoarea laturii $[AB]$ intersectează latura $[BC]$ în $Q$, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ intersectează latura $[AC]$ în $P$. Demonstraţi că $PQ \parallel AB$.*

**Exerciţiul** 5.82. *(* [19]*) Fie un unghi $\sphericalangle xAy$ şi $Az$ o semidreaptă interioară unghiului. Prin $I$, un punct de pe $Az$ se duce o dreaptă variabilă care intersectează laturile $Ax$ şi $Ay$ în punctele $M$ şi $N$, iar o dreaptă perpendiculară pe $Az$ care intersectează laturile unghiului în $B$ şi $C$. Tot prin $I$ se duc dreptele $IP \parallel AB$, $P \in AC$ şi $IQ \parallel AC$, $Q \in AB$. Să se arate că:*

a) $\dfrac{IP}{AM} + \dfrac{IQ}{AN} = constant;$

b) *Dacă $I$ este pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle xAy$ atunci:*

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{AB}.$$

**Exerciţiul** 5.83. *(*[18]*) Se dă triunghiul $\Delta ABC$ în care se duc înălţimele $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ şi medianele $AA'$, $BB'$, $CC'$. Fie punctele $\{M\}=BC\cap B_1C'$, $\{N\}=CA\cap C_1A'$ şi $\{P\}=AB\cap A_1B'$. Să se demonstreze că $M$, $N$, $P$ sunt coliniare.*

**Exerciţiul** 5.84. *(*[2]*) Fie un triunghi oarecare $\Delta ABC$, ale cărui bisectoare interioare $BE$ şi $CF$ se intersectează în $I$. Să se arate că dacă $BF=CE$, triunghiul $\Delta ABC$ este isoscel.*

**Exerciţiul** 5.85. *(*[22]*) În triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$ se înscrie un pătrat $MNPQ$. Vârfurile $M$, $N$ se află pe ipotenuza $[BC]$, iar $P$, $Q$ pe laturile $[AB]$, $[AC]$. Să se arate că $MN^2=BM\cdot NC$.*

**Exerciţiul** 5.86. *(G.M.-B nr. 9/2017* [23]*) Se consideră triunghiul $\Delta ABC$ cu $[AB]\equiv[AC]$ şi punctul $D\in(BC)$. Paralelele construite prin $D$ la dreptele $AB$ şi $AC$ intersectează laturile $(AC)$ şi $(AB)$ în punctele $F$, respectiv $E$. Dacă $EC\cap FD=\{N\}$ şi $FB\cap ED=\{M\}$, demonstraţi că:*

$$\frac{1}{MN}=\frac{1}{BD}+\frac{1}{CD}.$$

**Exerciţiul** 5.87. *(*[20]*) Se dă patrulaterul oarecare $ABCD$ şi se construieşte pe latura $[AD]$ triunghiul $\Delta ADE$ asemenea cu $\Delta ABC$, $\sphericalangle DAE\equiv\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ADE\equiv\sphericalangle ABC$.*

a) *Să se demonstreze că: $\Delta ACE\sim\Delta ABD$;*

b) *Să se deducă de aici că în general:*

$$AC\cdot BD<AB\cdot CD+BC\cdot AD.$$

**Exerciţiul** 5.88. *(*[4]*) Se consideră un trapez $ABCD$ cu $AB\parallel CD$. Fie $E$, $F$ mijloacele bazelor $[AB]$, $[CD]$. Fie $O$, $I$ punctele de intersecţie ale laturilor neparalele, respectiv a diagonalelor. Demonstraţi că punctele $E$, $F$, $O$, $I$ sunt coliniare.*

**Exerciţiul** 5.89. *(*[22]*) Se consideră două triunghiuri $\Delta ABC$ şi $\Delta ABD$ cu aceeaşi bază. Dintr-un punct $E$ al bazei $[AB]$ se duc paralele*

*la $AC$ şi $AD$ care întâlnesc laturile $[BC]$ şi $[BD]$, respectiv în $F$ şi $G$. Să se demonstreze că $FG$ este paralelă cu $CD$.*

**Exerciţiul** 5.90. *(*[17]*) Printr-un punct $P$ al bazei $[BC]$ a unui triunghi oarecare $\Delta ABC$ se duce o paralelă cu mediana $AD$ a triunghiului. Aceasta intersectează dreapta $AB$ în $M$ şi dreapta $AC$ în $N$. Să se demonstreze că:*

a) $AM \cdot AC = AN \cdot AB$;
b) $MP + NP = 2AD$.

## 9. Relaţii metrice în triunghi

### 9.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 5.91. *([21]) Fie triunghiul $\Delta ABC$, cu $m(\sphericalangle A) = 90°$. Se construieşte înălţimea $AD$, $D \in (BC)$ şi notăm cu $E$ şi $F$ picioarele perpendicularelor construite din $D$ pe laturile $[AB]$, respectiv $[AC]$. Demonstraţi că:*

$$2 \cdot BD \cdot DC = AE \cdot AB + AF \cdot AC$$

*Soluţie:*

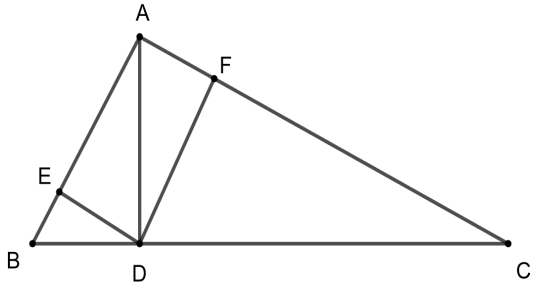



FIGURA 34. [24]

În triunghiul dreptunghic $\Delta ADC$ aplicăm teorema catetei pentru cateta $[AD]$ obţinem:

$$AD^2 = AE \cdot AB$$

În triunghiul dreptunghic $\Delta ADB$ aplicăm teorema catetei pentru cateta $[AD]$ obţinem:

$$AD^2 = AF \cdot AC$$

Dacă adunăm aceste relaţii se obţine:

$$2 \cdot AD^2 = AE \cdot AB + AF \cdot AC$$

În triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$ aplicăm teorema înălţimii obţinem:

$$AD^2 = BD \cdot DC$$

Astfel, deducem că:

$$2 \cdot BD \cdot DC = AE \cdot AB + AF \cdot AC$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.92. *([2]) Dacă $D$ este mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului $\Delta ABC$, să se arate că:*

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$

*Soluţie:*

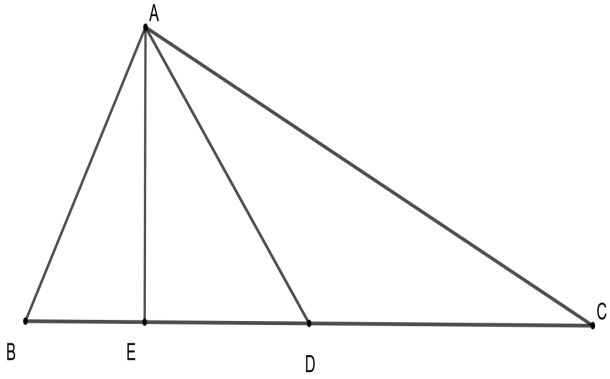



FIGURA 35. [24]

Construim $AE \perp BC$. Astfel, putem aplica teorema lui Pitagora în $\Delta AEB$:

$$AB^2 = BE^2 + AE^2$$

De asemenea, putem aplica teorema lui Pitagora în $\Delta AED$:

$$AD^2 = ED^2 + AE^2$$

şi în $\Delta AEC$:

$$AC^2 = EC^2 + AE^2$$

Astfel,

$$AB^2 + AC^2 = BE^2 + AE^2 + EC^2 + AE^2$$
$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BE^2 + EC^2 + 2AE^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = (BD - ED)^2 + (ED + DC)^2 + 2AE^2$$
$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = BD^2 - 2BD \cdot ED + ED^2 +$$
$$+ED^2 + 2ED \cdot DC + DC^2 + 2AE^2$$
$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$

Aici s-a folosit că $BD = DC$. Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.93. *(G.M.-B nr.11/2016* [23]*) Fie $ABCD$ un paralelogram şi $M$ mijlocul laturii $[AB]$. Dacă se cunoaşte că $AC \perp DM$, $m(\sphericalangle DAC) = 60^\circ$ şi $DA = a$, calculaţi, în funcţie de $a$, aria şi perimetrul paralelogramului $ABCD$.*

*Soluţie:* În triunghiul dreptunghic $\Delta ADE$, din ipoteză cunoaştem că $m(\sphericalangle DAE) = 60^\circ$, astfel, se obţine $m(\sphericalangle ADE) = 30^\circ$. Deducem că:

$$AE = \frac{a}{2}$$

(cateta care se opune unghiului de $30^\circ$ este jumătate din ipotenuză).

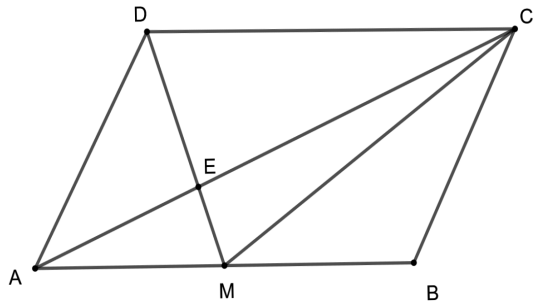



FIGURA 36. [24]

$ABCD$ este paralelogram, astfel, avem: $AM \parallel DC$. Deci, conform teoremei fundamentale a asemănării obţinem asemănarea $\Delta AEM \sim \Delta CED$. Deducem că:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AM}{DC} = \frac{EM}{ED}$$

Deoarece $M$ este mijlocul laturii $[AB]$, deducem că:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AM}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow EC = a \Rightarrow AC = \frac{3}{2}a$$

Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{\Delta ADC} = AD \cdot AC \cdot \sin 60^\circ$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Pentru a calcula perimetrul paralelogramului trebuie să calculăm $DC$. Astfel, în $\Delta ADC$ aplicăm teorema lui Pitagora generalizată:

$$DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cdot \cos(\sphericalangle DAC)$$

$$DC^2 = a^2 + \frac{9a^2}{4} - 2a\frac{3a}{2}\frac{1}{2}$$

$$DC^2 = \frac{7a}{4} \Rightarrow DC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

Acum putem calcula perimetrul paralelogramului:

$$P_{ABCD} = a(2 + \sqrt{7})$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

**Exerciţiul** 5.94. *(*[2]*) Ipotenuza $[BC]$ a unui triunghi dreptunghic $\Delta ABC$ este împărţită în trei părţi egale: $BD = DE = EC = \frac{BC}{3}$. Unim $A$ cu $D$ şi respectiv $A$ cu $E$. Să se arate că:*

$$AD^2 + AE^2 + DE^2 = \frac{2}{3}BC^2.$$

*Soluţie:* Aplicăm teorema lui Stewart în $\Delta ABC$ pentru a calcula lungimea segmentului $[AD]$ (vezi figura (37)). Astfel:

$$AD^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC - BC \cdot BD \cdot DC$$

De asemenea,

$$AE^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BE + AB^2 \cdot EC - BC \cdot BE \cdot EC$$

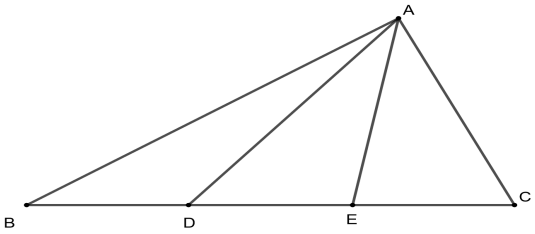



FIGURA 37. [24]

Dar $BD = \frac{BC}{3}$ şi $DC = \frac{2BC}{3}$, deducem că:

$$AD^2 = \frac{1}{3}AC^2 + \frac{2}{3}AB^2 - \frac{2}{9}BC^2$$

şi

$$AE^2 = \frac{2}{3}AC^2 + \frac{1}{3}AB^2 - \frac{2}{9}BC^2$$

Dacă adunăm cele două relaţii obţinem:

$$AD^2 + AE^2 = AC^2 + AB^2 - \frac{4}{9}BC^2$$

Din ipoteză cunoaştem că $\Delta ABC$ este dreptunghic, deci:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

De asemenea,

$$DE = \frac{1}{3}BC \Rightarrow DE^2 = \frac{1}{9}BC^2$$

În concluzie,

$$AD^2 + AE^2 + DE^2 = \frac{2}{3}BC^2.$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.95. *(*[17]*) Într-un triunghi oarecare $\Delta ABC$ se consideră un punct oarecare $M$ pe latura $[BC]$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMC$*

*intersectează latura $[AC]$ în $R$, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMB$ intersectează latura $[AB]$ în $S$. Să se demonstreze că dreptele $AM$, $BR$ şi $CS$ sunt concurente.*

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $MR$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMC$ (vezi figura (38)). Astfel, putem aplica teorema bisectoarei:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AR}{RC}$$

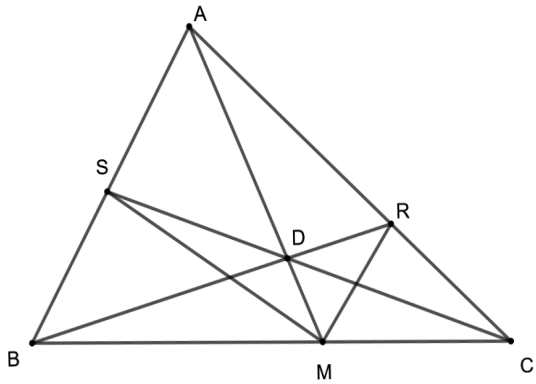



FIGURA 38. [24]

De asemenea, $MS$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMB$. Astfel, putem aplica teorema bisectoarei:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AS}{SB}$$

Aplicăm teorema lui Ceva în $\Delta ABC$

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{RC}{RA} \cdot \frac{SA}{SB} = 1 \Rightarrow \frac{MB}{MC} \cdot \frac{MC}{AM} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$$

ceea ce este evident. Deducem că dreptele $AM$, $BR$ şi $CS$ sunt concurente.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 5.96. *(*[20]*) În orice paralelogram suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor.*

*Soluţie:* Considerăm paralelogramul $ABCD$, vezi figura (39). Fie $E$ şi respectiv $F$ proiecţiile vârfurilor $C$ şi $D$ pe drepta $AB$. În $\Delta ABD$ aplicăm teorema lui Pitagora generalizată:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AF$$

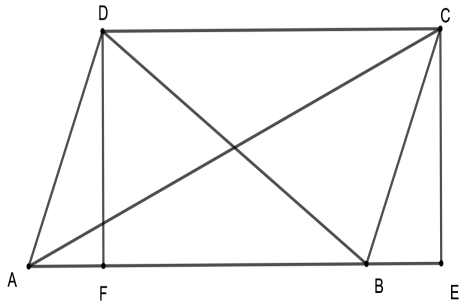



FIGURA 39. [24]

De asemenea, în $\Delta ABC$ aplicăm teorema lui Pitagora generalizată:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BE$$

Dacă adunăm cele două relaţii, se obţine:

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AF +$$
$$+ AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BE$$
$$BD^2 + AC^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 \Rightarrow$$
$$BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. S-a ţinut seama de congruenţa $[AF] \equiv [BE]$. □

## 9.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 5.97. *(*[4]*) Aflaţi lungimile laturilor triunghiului dreptunghic $\Delta ABC$, $AB \perp AC$, $AD \perp BC$ cunoscând următoarele date:*

a) $BD = m, DC = n$;

b) $BC = a, AD = h$.

**Exerciţiul** 5.98. *(*[15]*) Se dă triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$, cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$. Dacă $D$ este piciorul înălţimii din $A$ pe ipotenuză, $AB = c$, $AC = b$, $DC = m$, $BD = n$, să se demonstreze:*

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{m}{n}.$$

**Exerciţiul** 5.99. *(*[4]*) Se consideră un dreptunghi $ABCD$ cu lungimile laturilor $AB = a$ şi $BC = b$. Perpendiculara în $C$ pe $AC$ intersectează $AB$ în $E$ şi $AC$ în $F$. Calculaţi $EF$.*

**Exerciţiul** 5.100. *(*[2]*) Se dă trapezul $ABCD$ cu proprietatea că între bazele sale există relaţia $CD = 2 \cdot AB$. Să se demonstreze că:*

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

**Exerciţiul** 5.101. *(*[20]*) Într-un triunghi dreptunghic $\Delta ABC$, cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $D$ este piciorul înălţimii din $A$ pe ipotenuză, iar $E$, $F$ sunt proiecţiile lui $D$, respectiv pe catetele $[AB]$, $[AC]$. Să se demonstreze că:*

$$\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

**Exerciţiul** 5.102. *(* [17]*) Se consideră $ABCD$ un pătrat şi $F$ mijlocul laturii $[DC]$. Perpendiculara din $A$ pe $BF$ o intersectează pe aceasta în $E$. Demonstraţi că $AD = DE$.*

**Exerciţiul** 5.103. *(*[22]*) Se dă un triunghi $\Delta ABC$ şi înălţimea $AD$, $D \in BC$. Se consideră segmentele $[BE]$ şi $[CF]$, perpendiculare pe $AB$, respectiv $AC$, $[BE] \equiv [DC]$ şi $[CF] \equiv [BD]$.*

a) *Să se arate că triunghiul $\Delta AEF$ este isoscel;*

b) *Fie $M$ şi $N$ proiecţiile lui $B$ şi $C$ respectiv pe $AE$ şi $AF$. Arătaţi că:*

$$\frac{AM}{AN} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

**Exerciţiul** 5.104. *(G.M.-B nr.11/2017* [23]*) Fie $\Delta ABC$ un triunghi dreptunghic în $A$, pentru care există un punct $D \in (AC)$ şi un punct $E$ astfel încât $\Delta CDE$ să fie echilateral, $ED = DB$ şi $E$, $D$, $B$ sunt coliniare. Dacă $BC = a$, să se calculeze $AD$ şi $AE$, în funcţie de $a$.*

**Exerciţiul** 5.105. *(*[21]*) În pătratul $ABCD$ se consideră $E \in (BC)$. Perpendiculara construită în $E$ pe $DE$ intersectează latura $[AB]$ în punctul $F$. Demonstraţi că:*

$$AF^2 = FB^2 + BE^2 + EC^2.$$

**Exerciţiul** 5.106. *(*[20]*) În triunghiul oarecare $\Delta ABC$ având lungimile laturilor egale cu $a, b, c$, se consideră $AD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$, $D \in (BC)$. Să se calculeze lungimea bisectoarei interioare $AD$.*

**Exerciţiul** 5.107. *(*[17]*) Într-un triunghi $\Delta ABC$ cu laturile $AB = 25cm$, $BC = 17cm$ şi $CA = 26cm$, se construieşte înălţimea $AD$ şi mediana $BE$. Se cere:*

a) *Să se arate că $AD^2 = 2 \cdot BE^2$;*

b) *Raportul în care mediana $BE$ împarte înălţimea $AD$.*

**Exerciţiul** 5.108. *(*[9]*) În triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$ cunoaştem lungimea ipotenuzei $BC = a$ şi a înălţimii $AD = h$. Să se calculeze lungimile proiecţiilor catetelor pe ipotenuză.*

**Exerciţiul** 5.109. *(*[18]*) În triunghiul dreptunghic $\Delta ABC$, pe cateta $[AC]$ se ridică, în $C$, perpendiculara $CM$, cu $[CM] \equiv [AC]$, iar pe cateta $[AB]$ se ridică, în $B$, perpendiculara $BN$, cu $[BN] \equiv [AB]$. Să se arate că dreptele $BM$, $CN$ şi înălţimea $AD$ sunt concurente.*

**Exerciţiul** 5.110. *(*[22]*) Să se demonstreze că $G$, punctul de intersecţie al medianelor triunghiului $\Delta ABC$ şi $M$ un punct oarecare în plan, avem:*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

CAPITOLUL 6

# Probleme. Patrulater

## 1. Patrulater convex

### 1.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 6.1. *(*[13]*) Într-un patrulater oarecare se duc paralelele prin mijloacele fiecărei diagonale la diagonala cealaltă, care se întâlnesc în $O$. Unind $O$ cu mijlocul fiecărei laturi, să se arate că patrulaterul dat se împarte în patru părţi echivalente (de arii egale).*

*Soluţie:*

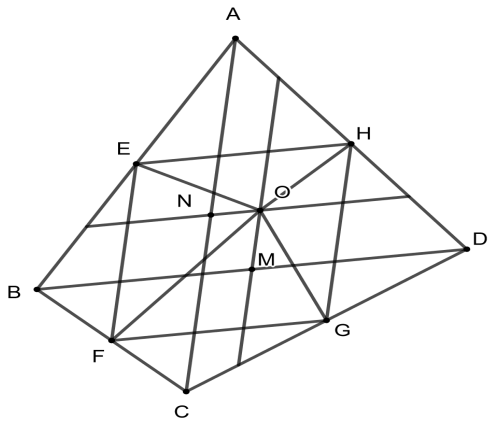



FIGURA 1. [24]

Fie patrulaterul $ABCD$ în care considerăm $E$, $F$, $G$, $H$, $M$, $N$ mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[BD]$, $[AC]$, vezi figura

(1). De asemenea, avem, din ipoteză:

$$ON \parallel BD$$

$$OM \parallel AC$$

$$\mathcal{A}_{OEBF} = \mathcal{A}_{\triangle EBF} + \mathcal{A}_{\triangle EOF}$$

$$\mathcal{A}_{OEBF} = \frac{1}{2} EF \cdot d(B, OM)$$

$$\mathcal{A}_{OGDH} = \frac{1}{2} GH \cdot d(D, OM)$$

Dar,

$$EF = GH = \frac{AC}{2}$$

$EF, GH$ sunt linii mijlocii în $\triangle ABC$ şi respectiv $\triangle ADC$ şi

$$d(B, OM) = d(D, OM)$$

deoarece avem, din ipoteză, $MB = MD$.

Astfel, obţinem:

$$\mathcal{A}_{OEBF} = \mathcal{A}_{OGDH}.$$

Calculăm aria patrulaterului $ABCD$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{\triangle ABC} + \mathcal{A}_{\triangle ADC}$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot (d(B, AC) + d(D, AC) = 4\mathcal{A}_{OEBF}$$

Analog se arată:

$$\mathcal{A}_{OHAE} = \mathcal{A}_{OGCF} = \frac{1}{4} \mathcal{A}_{ABCD}$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 6.2. *(*[9]*) Un patrulater este împărţit de una dintre diagonale în două triunghiuri, dintre care unul are perimetrul de* $25cm$*, iar celălalt de* $27cm$*. Dacă perimetrul patrulaterului este de* $32cm$*, să se determine lungimea acelei diagonale.*

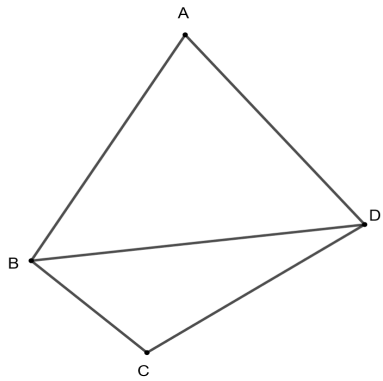



FIGURA 2. [24]

*Soluţie:*

Fie $ABCD$ un patrulater, vezi figura (2). Construim diagonala $[BD]$. Din ipoteză cunoaştem că:

$$P_{\triangle BCD} = 25cm$$

$$P_{\triangle BCD} = BC + CD + DB$$

Dar,

$$P_{\triangle ABD} = 27cm$$

$$P_{\triangle ABD} = AB + BD + DA,$$

iar perimetrul patrulaterului $ABCD$ este egal cu:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 32cm$$

Deducem că:

$$BC + CD + DB + AB + BD + DA = 25 + 27$$

$$P_{ABCD} + 2DB = 52cm$$

$$DB = 20cm$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

**Exerciţiul** 6.3. *([17]) Fie $M$ şi $N$ mijloacele laturilor opuse $[AB]$ şi $[CD]$ ale unui patrulater convex $ABCD$. Să se arate că:*

$$\mathcal{A}_{\triangle ABN} + \mathcal{A}_{\triangle CDM} = \mathcal{A}_{ABCD}.$$

*Soluţie:* Fie $ABCD$ un patrulater (vezi figura (3)). Deducem că:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{\triangle ADN} + \mathcal{A}_{\triangle ANB} + \mathcal{A}_{\triangle BNC}$$

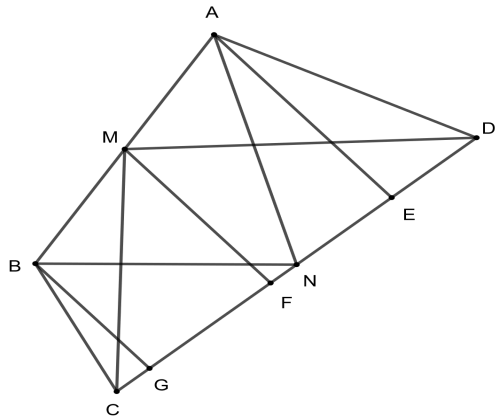



FIGURA 3. [24]

Fie $E$, $F$ şi $G$ proiecţiile punctelor $A$, $M$, $B$ pe dreapta $DC$. Dar, din ipoteză, cunoaştem că: $M$ este mijlocul laturii $[AB]$, deci

$$AE + BG = 2MF$$

Avem:

$$\mathcal{A}_{\triangle ADN} = \frac{DN \cdot AE}{2}$$
$$\mathcal{A}_{\triangle BNC} = \frac{CN \cdot BG}{2}$$
$$\mathcal{A}_{\triangle CDM} = \frac{CD \cdot MF}{2}$$

Dar, $DN = NC$ implică:

$$\mathcal{A}_{\triangle ADN} + \mathcal{A}_{\triangle BNC} = \frac{DN \cdot AE}{2} + \frac{CN \cdot BG}{2}$$

echivalent,

$$\mathcal{A}_{\triangle ADN} + \mathcal{A}_{\triangle BNC} = \frac{DN}{2}(AE + BG) \Rightarrow$$
$$\mathcal{A}_{\triangle ADN} + \mathcal{A}_{\triangle BNC} = \frac{CD \cdot MF}{2} \Rightarrow$$
$$\mathcal{A}_{\triangle ADN} + \mathcal{A}_{\triangle BNC} = \mathcal{A}_{\triangle CDM}$$

În concluzie:

$$\mathcal{A}_{\triangle ABN} + \mathcal{A}_{\triangle CDM} = \mathcal{A}_{ABCD}.$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 1.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 6.4. *(*[14]*) Într-un patrulater convex diagonalele au lungimile egale cu $m$ şi $n$. Să se afle aria patrulaterului, ştiind că segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse ale acestuia au aceeaşi lungime.*

**Exerciţiul** 6.5. *(*[17]*) Să se arate că într-un patrulater convex raportul între suma pătratelor diagonalelor este mai mic decât semiperimetrul patrulaterului.*

**Exerciţiul** 6.6. *(*[2]*) Se dă patrulaterul $ABCD$. Să se găsească pe latura $BC$ punctul $M$ astfel încât bisectoarea unghiului $\sphericalangle AMD$ să fie perpendiculară pe $BC$.*

**Exerciţiul** 6.7. *(*[22]*) Un patrulater convex $ABCD$ are laturile $AB = BC = CD$ şi $m(\sphericalangle BAD) = 90^\circ$. Se notează $m(\sphericalangle ABC) = \alpha$.*

a) *Să se arate că dacă patrulaterul îndeplineşte aceste condiţii, atunci $60^\circ < \alpha \leq 90^\circ$;*
b) *În cazul $\alpha = 75^\circ$ să se construiască patrulaterul numai cu rigla şi compasul.*

**Exerciţiul** 6.8. *(*[17]*) Într-un patrulater $ABCD$ notăm cu $E$, $F$, $G$, $H$, $L$, $M$, $N$, $P$, $R$ respectiv mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[DB]$, $[AC]$, $[HF]$, $[LM]$, $[EG]$. Să se arate că:*

a) *Punctele $N$, $P$, $R$ coincid;*
b) *Dacă patrulaterul $ABCD$ este convex, atunci $\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{EFGH}$;*
c) *Patrulaterele $EFGH$, $HLFM$, $MELG$ sunt paralelograme.*

**Exerciţiul** 6.9. *(*[20]*) Se consideră un patrulater oarecare $ABCD$, în care notăm cu $M$, $N$ mijloacele diagonalelor $[AC]$, $[BD]$, apoi cu $E$, $F$ proiecţiile lui $A$ pe $CB$, $CD$ şi cu $G$, $H$ proiecţiile lui $C$ pe $AB$, $AD$. Notăm $AE \cap CG = \{P\}$ şi $AF \cap CH = \{Q\}$.*

a) *Să se arate că:*

$$MB + MD + NA + NC < AB + BC + CD + DA$$

b) *Ce condiţie trebuie să îndeplinească $ABCD$ pentru ca dreapta $PQ$ să se suprapună diagonalei $BD$?*

**Exerciţiul** 6.10. *(G.M.-B nr.1/2012* [23]*) Fie* $ABCD$ *un patrulater convex şi* $O$ *mijlocul diagonalei* $[BD]$*. Arătaţi că:*

a) *Dacă* $AC \cap BD = \{O\}$*, atunci* $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \mathcal{A}_{\triangle ADC}$*.*

b) *Dacă* $AC \cap BD \neq \{O\}$ *şi* $OM \parallel AC$*,* $M \in [BC]$*, atunci* $\mathcal{A}_{AMCD} = \mathcal{A}_{\triangle AMB}$*.*

## 2. Paralelogram

### 2.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 6.11. *(*[9]*) Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor din vârfurile unui paralelogram pe diagonale sunt vârfurile unui paralelogram care are acelaşi centru cu paralelogramul dat.*

*Soluţie:* Fie paralelogramul $ABCD$, vezi figura (4), în care am construit $AE \perp BD$, $BF \perp AC$, $CG \perp BD$ şi $DH \perp AC$. Dorim să arătăm că $EFGH$ este paralelogram.

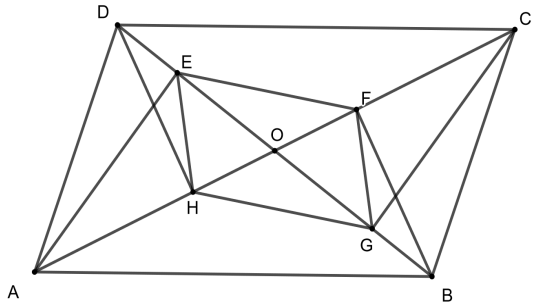



FIGURA 4. [24]

Din informaţiile oferite în ipoteză se poate demonstra:

$$\triangle AED \equiv \triangle CGB \begin{cases} [AD] \equiv [CB] \\ \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle CBG \end{cases}$$

Cele două triunghiuri dreptunghice sunt congruente conform cazului de congruenţă $IU$. Deducem că:

$$[DE] \equiv [BG]$$

Deoarece $ABCD$ este paralelogram, avem:

$$[DO] \equiv [OB] \Rightarrow [EO] \equiv [OG]$$

De asemenea,

$$\triangle DHA \equiv \triangle BFC \begin{cases} [AD] \equiv [CB] \\ \sphericalangle DAH \equiv \sphericalangle BCF \end{cases}$$

Cele două triunghiuri dreptunghice sunt congruente conform cazului de congruenţă (I.U). Deducem că:

$$[AH] \equiv [CF]$$

Pentru că $ABCD$ este paralelogram, avem:

$$[AO] \equiv [OC] \Rightarrow [HO] \equiv [OF]$$

Dacă într-un patrulater convex diagonalele au acelaşi mijloc atunci patrulaterul este paralelogram.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 6.12. *(*[17]*) În paralelogramul $ABCD$, punctele $M$ şi respectiv $N$ sunt mijloacele laturilor opuse $[AD]$ şi $[BC]$. Să se arate că $BM$ şi $ND$ împart diagonala $[AC]$ în trei părţi egale.*

*Soluţie:*

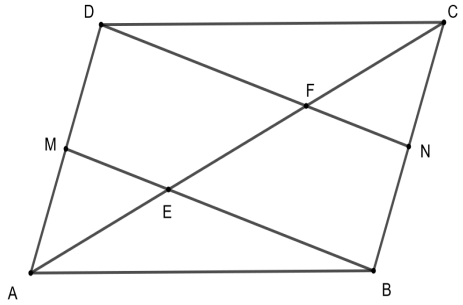



FIGURA 5. [24]

Din ipoteză cunoaştem că $ABCD$ este paralelogram, vezi figura (5). Astfel, se obţine:

$$\Delta ABM \equiv \Delta CDN \begin{cases} [AB] \equiv [CD] \\ \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle DCN \\ [AM] \equiv [CN] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă $LUL$. Astfel, obţinem:

$$\sphericalangle BMA \equiv \sphericalangle DNC$$

Deoarece $ABCD$ este paralelogram, rezultă că $BC \parallel AD$

$$\Rightarrow \sphericalangle CND \equiv \sphericalangle NDM \Rightarrow \sphericalangle BMA \equiv \sphericalangle NDM$$

Astfel, obţinem că $BM \parallel ND$.

În $\triangle BEC$, $NF$ este linie mijlocie, deducem că

$$[CF] \equiv [FE]$$

În $\Delta AFD$, $ME$ este linie mijlocie. Deducem că:

$$[FE] \equiv [AE]$$

$$\Rightarrow [AE] \equiv [EF] \equiv [CF].$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 6.13. *([21]) Pe latura $[BC]$ a triunghiului $\Delta ABC$, considerăm punctele $E$ şi $F$, astfel încât avem $[AB] \equiv [BE]$ şi $[AC] \equiv [CF]$. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ se intersectează în $T$. În plus, $AF \cap BT = \{M\}$, $AE \cap CT = \{P\}$. Demonstraţi că $AMTP$ este paralelogram.*

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $[AB] \equiv [BE]$, deci $\Delta ABE$ este isoscel (vezi figura (6)). Astfel,

$$\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle BEA$$

Deoarece $BT$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle ABE$, deducem că:

$$m(\sphericalangle TBE) = \frac{m(\sphericalangle EAB) + m(\sphericalangle BEA)}{2}$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle TBE) = m(\sphericalangle BEA) \Rightarrow BT \parallel AE.$$

Analog, $[AC] \equiv [CF]$, deci $\Delta ACF$ este isoscel. Astfel, se obţine:

$$\sphericalangle FAC \equiv \sphericalangle CFA$$

Deoarece $CT$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle ACF$, deducem că:

$$m(\sphericalangle TCF) = \frac{m(\sphericalangle FAC) + m(\sphericalangle CFA)}{2}$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle TCF) = m(\sphericalangle CFA) \Rightarrow CT \parallel AF.$$

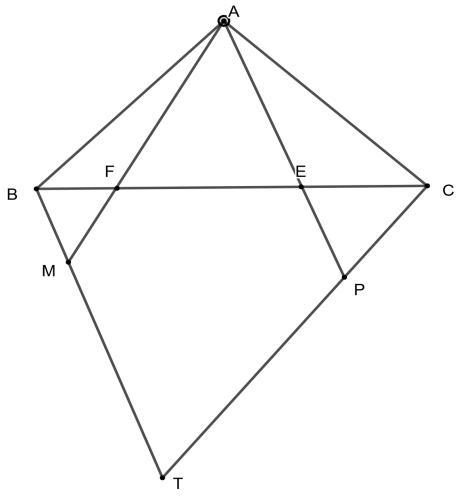



FIGURA 6. [24]

În concluzie, $AMTP$ este paralelogram.
Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 2.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 6.14. *(*[15]*) Laturile unui paralelogram sunt egale cu $12cm$ şi respectiv $7cm$, iar suma diagonalelor este egală cu $30cm$. Să se afle perimetrele triunghiurilor în care diagonalele descompun paralelogramul.*

**Exerciţiul** 6.15. *(*[19]*) Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi un punct $E \in (AB)$. Trei paralele duse prin $A$, $B$, $C$, intersectează dreapta $DE$ respectiv în punctele $M$, $N$, $P$.*

a) *Să se demonstreze că $MN = DP$;*
b) *Fie $Q$ intersecţia paralelei duse din $N$ la $AD$ cu dreapta $CP$. Să se arate că $PQ = AM$;*
c) *Se cere locul geometric al punctului $Q$, când $AM$, $BN$, $CP$ se rotesc în jurul punctelor $A$, $B$, $C$, rămânând paralele între ele.*

**Exerciţiul** 6.16. *(*[15]*) Se consideră $ABCD$ un paralelogram. Prin vârful $A$ se duce o dreaptă oarecare $Ax$ şi prin $C$ o dreaptă $Cy$ paralelă cu $Ax$. Fie $Ax \cap DC = \{M\}$ şi $Cy \cap AB = \{N\}$. Ce mişcare execută dreapta $MN$ când dreptele $Ax$ şi $Cy$ se rotesc în jurul punctelor $A$ şi $C$, rămânând paralele între ele?*

**Exerciţiul** 6.17. *(*[22]*) Pe laturile opuse $[AB]$, $[CD]$ ale unui paralelogram se construiesc în afară două triunghiuri echilaterale $\Delta ABM$, $\Delta CDP$, iar pe laturile opuse $[BC]$, $[DA]$ se construiesc înăuntru triunghiurile echlaterale $\Delta BCN$, $\Delta DAQ$. Să se arate că $MNPQ$ este paralelogram ale cărui laturi sunt egale cu diagonalele paralelogramului $ABCD$.*

**Exerciţiul** 6.18. *(*[14]*) În paralelogramul $ABCD$ se cunoaşte lungimea $AB = a$ şi $m(\sphericalangle BAD) = \alpha$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ intersectează latura $[BC]$ în $M$, iar segmentul $[MC]$ are lungimea egală cu $b$. Diagonala $[BD]$ intersectează $[AM]$ în $N$. Să se calculeze aria triunghiului $\Delta BMN$.*

**Exerciţiul** 6.19. *(* [2]*) Se dă un paralelogram $ABCD$, căruia i se împarte diagonala $[BD]$ prin punctele $M$ şi $N$ în trei părţi egale. Dreapta $AM$ intersectează latura $DC$ în $A_1$, iar $AN$ intersectează $DC$ în $A_2$, de asemenea, $CM$ intersectează $AB$ în $C_2$, iar $CN$ intesectează $AB$ în $C_1$.*

a) *Să se arate că patrulaterele $AMCN$ şi $A_2MC_2N$ sunt paralelograme;*
b) *Să se determine rapoartele dintre ariile acestor paralelograme şi aria paralelogramului $ABCD$.*

**Exerciţiul** 6.20. *(G.M.-B nr.3/2015* [23]*) Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AC \perp AD$. Notăm cu $S$ simetricul lui $A$ faţă de mijlocul laturii $[CD]$ şi cu $Q$ proiecţia lui $C$ pe diagonala $[BD]$. Demonstraţi că $\sphericalangle SDQ \equiv \sphericalangle SAQ$.*

## 3. Dreptunghi

### 3.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 6.21. *([17]) Într-un dreptunghi $ABCD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ intersectează diagonala $[BD]$ în $E$, iar latura $[BC]$ în $F$. Ştiind că paralela dusă din $E$ la $AB$ intersectează $AC$ în $G$. Să se arate că dreptele $GF$ şi $BD$ sunt perpendiculare.*

*Soluţie:* Se notează cu $\{I\} = AE \cap BG$.

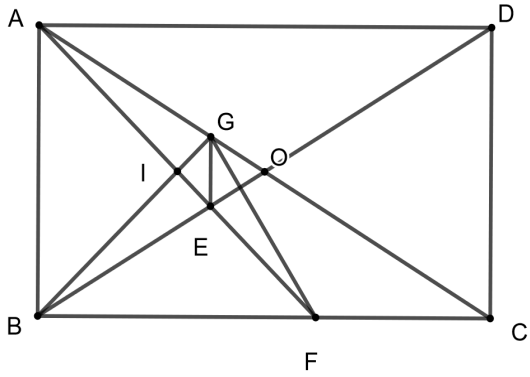



FIGURA 7. [24]

În dreptunghiul $ABCD$, vezi figura (7), avem $AO = OC$ şi din ipoteză, $GE \parallel AB$. Rezultă că $AGEB$ este un trapez isoscel.

În dreptunghiul $ABCD$, din ipoteză $m(\sphericalangle BAF) = 45°$, rezultă că:

$$m(\sphericalangle AIB) = 90°$$

deoarece $\Delta AIB$ este isoscel. Deducem că:

$$IF \perp BG$$

Dar, $GE \parallel AB$ şi $ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow GE \perp BF$. Obţinem că $E$ este ortocentrul triunghiului $\Delta BGF$, deci $BE \perp MF$.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 6.22. *(*[9]*) Să se arate că picioarele perpendicularelor din punctul de intersecţie al diagonalelor unui romb pe laturile rombului sunt vârfurile unui dreptunghi.*

*Soluţie:*

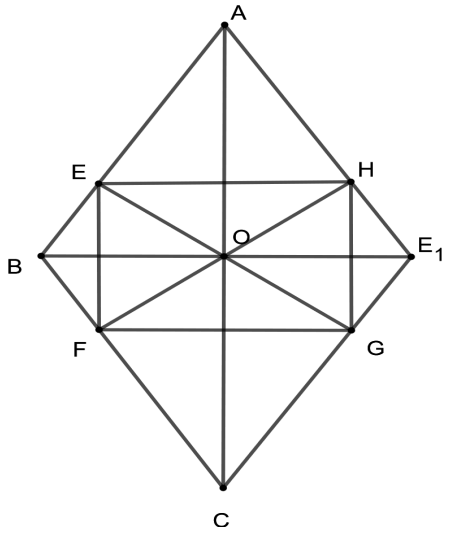



FIGURA 8. [24]

Fie $ABCD$ un romb şi $O$ intersecţia diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$, figura (8). De asemenea, $E$, $F$, $G$, $H$ picioarele perpendicularelor din punctul $O$ pe laturile rombului.

Punctele $E$, $O$, $G$ sunt coliniare şi $[EO] \equiv [OG]$.

Punctele $F$, $O$, $H$ sunt coliniare şi $[FO] \equiv [OH]$.

Rezultă că $EFGH$ este dreptunghi.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 6.23. *(*[2]*) Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 2BC$. O dreaptă oarecare $d_1$ intesectează $AB$ în $M$ şi $DC$ în $N$. O altă dreaptă oarecare $d_2$ perpendiculară pe $d_1$, intersectează $AD$ în $P$ şi $BC$ în $Q$. Să se arate că $PQ = 2MN$.*

*Soluţie:* Fie $ABCD$ un dreptunghi (vezi figura (9)). Construim $ME \perp CD$ şi $PF \perp BC$. Din perpendicularitatea dreptelor $d_1$ şi $d_2$, deducem că:

$$\Delta MEN \sim \Delta PFQ$$

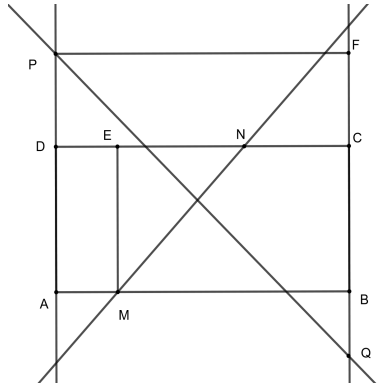



FIGURA 9. [24]

Rezultă că:

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{ME}{PF} = \frac{EN}{FQ}$$

Dar, $ME = BC$ şi $PF = AM$, deducem că:

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{BC}{2BC}$$

$$2MN = PQ$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

### 3.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 6.24. *(*[15]*) Într-un paralelogram $ABCD$, $AB \parallel CD$, $A$ opus lui $C$, $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle DBA$. Stabiliţi natura paralelogramului $ABCD$.*

**Exerciţiul** 6.25. *(*[17]*) Fie dreptunghiul $ABCD$ şi $E$ piciorul perpendicularei dusă din $A$ pe diagonala $[BD]$. Se prelungeşte $AE$ cu segmentul $EF = AE$.*

a) *Să se arate că $BF \perp DF$;*

b) *Să se arate că patrulaterul $BDFC$ este trapez isoscel.*

**Exerciţiul** 6.26. *(*[9]*) Se consideră romburile $ABCS$ şi $ABEF$ cu $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle FAB) < 90°$. Demonstraţi că patrulaterul $DCEF$ este dreptunghi.*

**Exerciţiul** 6.27. *(*[6]*) Într-un dreptunghi $ABCD$ se duc două paralele $MN$ şi $PR$ la egală distanţă de diagonala $[BD]$ a dreptunghiului. Se cere să se demonstreze că patrulaterul $MNPR$ este un paralelogram.*

**Exerciţiul** 6.28. *(*[19]*) Fie un dreptunghi $ABCD$ cu $AB$ mai mare ca $BC$. Perpendiculara din punctul $D$ pe diagonala $[AC]$ intersectează $AC$ în $O$ şi $AB$ în $E$. Notăm lungimile segmentelor: $[OE]$, $[OA]$, $[OD]$, $[OC]$ cu $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$. Să se arate că $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ îndeplinesc relaţiile: $a_1 = ka_2$, $a_2 = ka_3$, $a_3 = ka_4$.*

**Exerciţiul** 6.29. *(G.M.-B nr.7-8/2004* [23]*) Se construieşte în dreptunghiul $ABCD$ o paralelă la una dintre laturi, care-l împarte în două dreptunghiuri cu ariile de $12cm^2$ şi respectiv $36cm^2$. Să se afle dimensiunile dreptunghiului iniţial, ştiind că unul dintre cele două dreptunghiuri este pătrat.*

**Exerciţiul** 6.30. *(*[22]*) Să se demonstreze că:*

1) *Bisectoarele interioare ale unghiurilor unui paralelogram formează un dreptunghi;*
2) *Diagonalelele dreptunghiului de la punctul (1) sunt paralele la laturile paralelogramului.*

## 4. Romb

### 4.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 6.31. *(G.M.-B nr.3/2018* [23]*) În triunghiul* $\Delta ABC$ *cu* $[AB] \equiv [AC]$ *şi* $m(\sphericalangle A) = 40^\circ$ *considerăm punctul* $D \in (AC)$ *astfel încât* $m(\sphericalangle ABD) = 60^\circ$*. Bisectoarea unghiului* $\sphericalangle A$ *intersectează dreapta* $BD$ *în punctul* $E$*, iar punctul* $T$ *aparţine bisectoarei unghiului* $\sphericalangle A$ *astfel încât* $E \in (AT)$ *şi* $[ET] \equiv [AB]$*. Arătaţi că patrulaterul* $ABTC$ *este romb.*

*Soluţie:*

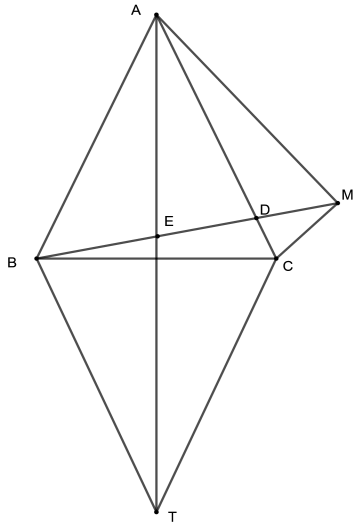



FIGURA 10. [24]

Fie $\Delta ABC$ isoscel, figura (10). Construim $\Delta ABM$ echilateral, se poate demonstra:

$$\Delta ABE \equiv \Delta AMD \begin{cases} \sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle DAM \\ [AB] \equiv [AM] \\ \sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle AMD \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (U.L.U). Deducem că:

$$[BE] \equiv [MD]$$

În triunghiul $\Delta MDC$ isoscel:

$$m(\sphericalangle MDC) = m(\sphericalangle MCD)$$

$$\Rightarrow MC = MD = BE$$

$$\Delta AMC \equiv \Delta TBE \begin{cases} [MC] \equiv [BE] \\ \sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle TEB \\ [AC] \equiv [TE] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (L.U.L). Deducem că:

$$[AM] \equiv [BT]$$

$$\Rightarrow [BT] \equiv [AC]$$

Dar, $AT$ este mediatoarea segmentului $[BC]$ şi
$[TC] \equiv [TB]$.
În concluzie, $AB = BT = TC = CA$, deci $ABTC$ este romb.
Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 6.32. *(*[21]*) Fie paralelogramul $ABCD$ în care notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ intersectează pe $[AB]$ şi $[CD]$ în $P$, respectiv $T$, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ intersectează pe $[BC]$ şi $[AD]$ în $S$, respectiv $Q$. Demonstraţi că patrulaterul $PSTQ$ este romb.*

*Soluţie:*
Fie $ABCD$ un paralelogram, figura (11), avem:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \sphericalangle PAO \equiv \sphericalangle TCO$$

unghiuri alterne interne.

De asemenea, $[AO] \equiv [CO]$ şi $\sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle COT$, unghiuri opuse la vârf. Deducem că $\Delta PAO \equiv \Delta TCO$, deci:

$$[PO] \equiv [TO]$$

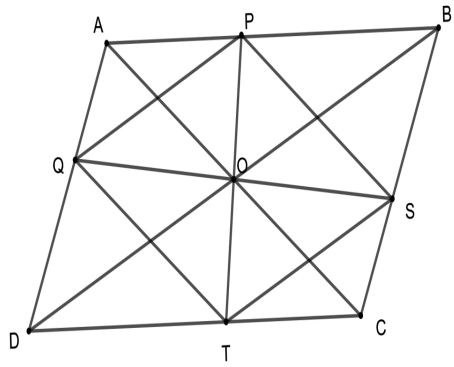



FIGURA 11. [24]

Asemănător arătăm că $[QO] \equiv [SO]$. Astfel, obţinem că $PSTQ$ este paralelogram.

Dar,

$$m(\sphericalangle POS) = m(\sphericalangle POB) + m(\sphericalangle SOB)$$
$$m(\sphericalangle POS) = \frac{m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle COB)}{2}$$
$$\Rightarrow m(\sphericalangle POS) = \frac{m(\sphericalangle AOC)}{2}$$
$$m(\sphericalangle POS) = 90^\circ$$

În concluzie, $PSTQ$ este romb.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 6.33. *([9]) Se consideră $ABCD$ un romb (figura (12)) cu $m(\sphericalangle D) = 135^\circ$ şi latura $[AD]$ comună cu pătratul $ADEF$. Să se demonstreze că $\Delta ACE$ este isoscel.*

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $m(\sphericalangle ADC) = 135^\circ$, astfel obţinem:

$$m(\sphericalangle EDC) = 360^\circ - m(\sphericalangle ADC) - m(\sphericalangle ADC)$$
$$m(\sphericalangle EDC) = 135^\circ$$

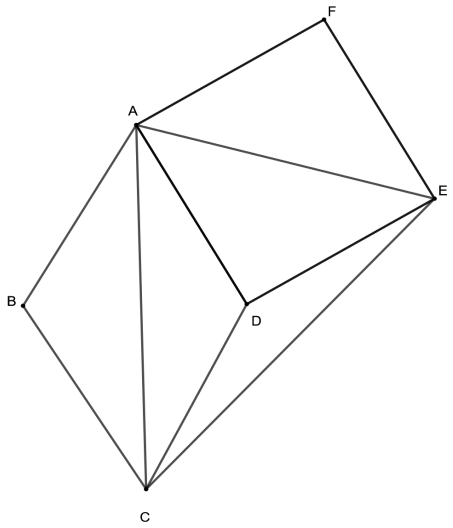



FIGURA 12. [24]

Deducem că:

$$\Delta DAC \equiv \Delta DEC \begin{cases} [DA] \equiv [DE] \\ \sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle EDC \\ [DC] \equiv [DC] \end{cases}$$

Cele două triunghiuri sunt congruente conform cazului de congruenţă (LUL) şi obţinem :

$$[AC] \equiv [CE]$$

adică $\Delta ACE$ este isoscel.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 4.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 6.34. *(*[15]*) Într-un romb, o diagonală formează cu o latură un unghi de* $15^\circ$*. Să se calculeze unghiurile rombului.*

**Exerciţiul** 6.35. *(*[18]*) Fie* $[AC]$ *diagonala mare a rombului* $ABCD$ *şi* $A_1$*,* $A_2$*,* $C_1$ *şi* $C_2$ *proiecţiile punctelor* $A$ *şi* $C$ *pe laturile opuse.*

a) *Să se demonstreze că dreptele* $A_1C_1$*,* $A_2C_2$*,* $AC$ *şi* $BD$ *sunt concurente;*
b) *Să se determine măsura unghiului* $\sphericalangle A$ *al rombului astfel încât dreptele* $A_1C_1$ *şi* $A_2C_2$ *să fie perpendiculare pe* $AD$ *şi* $AB$*.*

**Exerciţiul** 6.36. *(*[17]*) Fie* $ABCD$ *un trapez isoscel,* $E$ *şi* $F$ *sunt mijloacele laturilor paralele* $[AB]$ *şi* $[CD]$*,* $I$ *intersecţia diagonalelor* $[AC]$ *şi* $[BD]$*. Paralela la* $AB$ *dusă prin* $I$ *intersectează* $AD$ *şi* $BC$ *în* $G$ *şi* $H$*, iar paralele prin* $G$ *la* $AC$ *şi* $BD$ *intersectează pe* $EF$ *respectiv în* $L$ *şi* $M$*.*

a) *Să se arate că* $IG$ *este bisectoarea unghiului* $\sphericalangle AID$*;*
b) *Dreapta* $AC$ *împarte segmentul* $[GM]$ *în părţi;*
c) *Arătaţi că patrulaterul* $GMHL$ *este romb.*

**Exerciţiul** 6.37. *(*[2]*) Se dă rombul* $ABCD$*. Dacă se uneşte mijlocul* $P$ *al laturii* $[AB]$ *cu vârfurile* $C$ *şi* $D$ *se obţine triunghiul* $\Delta PCD$*, iar dacă se unesc mijloacele* $M$ *şi* $N$ *ale laturilor* $[PC]$ *şi* $[PD]$ *se obţine triunghiul* $\Delta PMN$*. Să se arate că:*

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 8 \cdot \mathcal{A}_{PMN}.$$

**Exerciţiul** 6.38. *(*[15]*) Un romb are un unghi cu măsura egală cu* $120^\circ$*, iar diagonala mică are lungimea egală cu* $7cm$*. Să se calculeze perimetrul rombului.*

**Exerciţiul** 6.39. *(*[22]*) Se dă un triunghi dreptunghic* $\Delta ABC$ *şi fie* $Bx$ *şi* $Cy$ *prelungirile catetelor* $[AB]$ *şi* $[AC]$*.*

a) *Să se arate că ducând trisectoarele unghiurilor* $\sphericalangle xBC$ *şi* $\sphericalangle yCB$ *două dintre ele sunt perpendiculare şi două paralele.*
b) *Trisectoarele paralele intersectează celelalte două trisectoare în* $D$ *şi* $E$*. Să se arate că* $BCDE$ *este un romb.*

**Exerciţiul** 6.40. *(G. M.-B. nr.10/2016* [23]*) Fie $ABCD$ trapez dreptunghic, cu $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^\circ$, $AB < CD$ şi $AC \perp BD$. Punctele $M$ şi $N$ sunt simetricele punctelor $D$ şi $C$ faţă de punctul de intersecţie al diagonalelor, iar $MP \perp DC, P \in AC$.*

a) *Arătaţi că $MADP$ este romb.*

b) *Demonstraţi că $AM \perp ND$ şi $BP \perp DP$.*

## 5. Pătrat

### 5.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 6.41. *([9]) Pe diagonala $[AC]$ a pătratului $ABCD$ se fixează un punct $M$, între $A$ şi $C$, astfel încât $[AM] \equiv [AB]$. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului $\Delta BCM$.*

*Soluţie:*

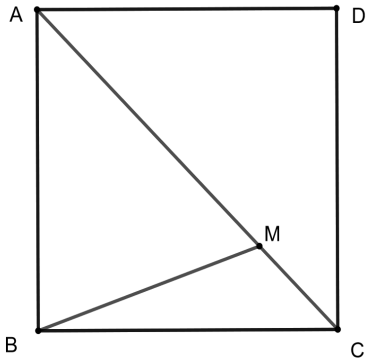



FIGURA 13. [24]

Din ipoteză cunoaştem că $ABCD$ este pătrat, vezi figura (13), iar $[AC]$ este o diagonală a pătratului. Astfel,

$$m(\sphericalangle BAC) = 45^\circ$$

Dar, $[AM] \equiv [AB]$ implică $\Delta BAM$ este un triunghi isoscel. Deducem că:

$$m(\sphericalangle ABM) = m(\sphericalangle AMB) = \frac{180^\circ - m(\sphericalangle BAM)}{2}$$

$$m(\sphericalangle ABM) = m(\sphericalangle AMB) = \frac{135^\circ}{2}$$

$$m(\sphericalangle ABM) = m(\sphericalangle AMB) = 67^\circ 30'$$

În concluzie, măsurile unghiurilor $\Delta BCM$ sunt egale cu:

$$m(\sphericalangle BCM) = 45^\circ$$

$$m(\sphericalangle BMC) = 180^\circ - 67^\circ 30' = 112^\circ 30'$$

$$m(\sphericalangle MBC) = 90^\circ - 67^\circ 30' = 22^\circ 30'$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

**Exerciţiul** 6.42. *([21]) Fie un pătrat $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în punctul $O$. Fie $P \in (BC)$ şi $M \in (OB$ astfel încât $[CO] \equiv [CP]$ şi $[AB] \equiv [OM]$. Demonstraţi că $[OP] \equiv [MP]$.*

*Soluţie:*

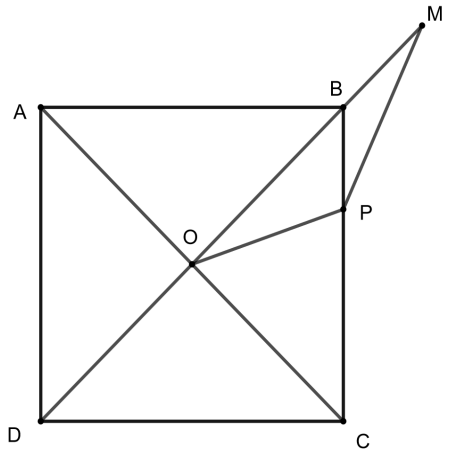



FIGURA 14. [24]

Avem $ABCD$ un pătrat, vezi figura (14), iar $[AC]$ este o diagonală a pătratului. Astfel,

$$m(\sphericalangle OCB) = 45^\circ$$

Dar, $[OC] \equiv [CP]$ implică $\Delta OCP$ este un triunghi isoscel. Deducem că:

$$m(\sphericalangle COP) = \frac{180^\circ - m(\sphericalangle OCP)}{2}$$

$$m(\sphericalangle COP) = 67^\circ 30'$$

De asemenea, $ABCD$ pătrat $AC \perp BD \Rightarrow m(\sphericalangle POB) = 22^\circ 30'$.

$\sphericalangle OBC$ este unghi exterior al triunghiului $\Delta PMB$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle BMP) = 22^\circ 30'$$

Deducem că $\Delta OPM$ este isoscel, astfel,

$$[OP] \equiv [MP] .$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 6.43. *(G.M.-B nr.6-7-8/2018* [23]*) Fie $ABCD$ un dreptunghi, $M$ mijlocul laturii $[AD]$ şi $P \in (BM)$ astfel încât $DP = DC$. Ştiind că $m(\sphericalangle APM) = 45^\circ$, demonstraţi că $ABCD$ este pătrat.*

*Soluţie:* Fie $ABCD$ un dreptunghi, vezi figura (15), în care considerăm punctul $N$ simetricul lui $B$ faţă de $M$. Deducem că punctele $N$, $D$, $C$ sunt coliniare, deoarece $ABDN$ este paralelogram (diagonalele se taie în părţi egale).

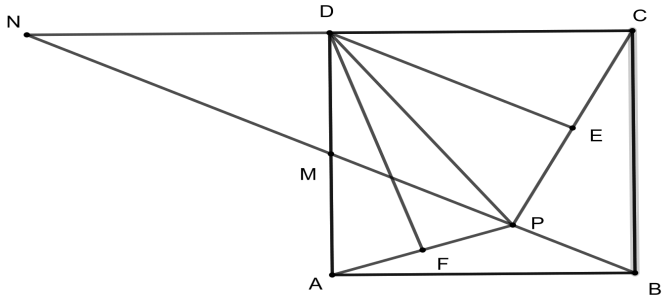



FIGURA 15. [24]

În triunghiul $\Delta CPN$ avem $CD = DN$ de unde rezultă că $PD$ este mediană şi

$$PD = \frac{CN}{2}$$

Deducem că $\Delta CPN$ este dreptunghic, $m(\sphericalangle CPN) = 90^\circ$.

Construim bisectoarele $DE$ şi $DF$ ale unghiurilor $\sphericalangle CDP$ şi respectiv $\sphericalangle PDA$. Obţinem:

$$m(\sphericalangle EDF) = 45^\circ$$

Patrulaterul $DEPF$ are măsura unghiurilor egale cu:

$$m(\sphericalangle EDF) = 45^\circ$$
$$m(\sphericalangle DEP) = 90^\circ$$
$$m(\sphericalangle EPF) = 135^\circ$$
$$m(\sphericalangle DFP) = 90^\circ$$

S-a obţinut că $DF$ este înălţime în $\Delta ADP$. Astfel, $\Delta ADP$ este isoscel, $AD = DP$. Din ipoteză cunoaştem că $DP = DC$. Rezultă că $ABCD$ este pătrat.

Ceea ce trebuia să demonstrăm. $\square$

## 5.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 6.44. *(*[9]*) Pe laturile $[AB]$ şi $[BC]$ ale pătratului $ABCD$ se iau punctele $M$, respectiv $N$ astfel încât $[AM] \equiv [BN]$, figura (16). Să se demonstreze că $[AN] \equiv [DM]$.*

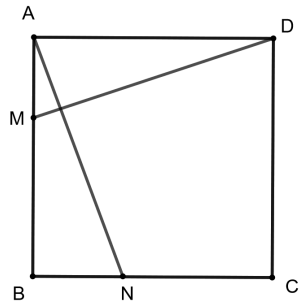



FIGURA 16. [24]

**Exerciţiul** 6.45. *(*[15]*) Dacă $M$ este un punct oarecare al segmentului $[AB]$, se construiesc două pătrate, de o parte şi alta a segmentului $[AB]$, unul cu latura $[AM]$ şi un pătrat cu latura $[BM]$ (figura (17)). Să se demonstreze că:*

a) *Punctele $P$, $M$, $Q$ sunt coliniare;*
b) *$AN \parallel RB$.*

**Exerciţiul** 6.46. *(*[2]*) Se dă un pătrat şi un dreptunghi cu acelaşi perimetru (figuri isoperimetrice). Să se arate că diferenţa dintre aria pătratului şi a dreptunghiului isoperimetric este egală cu aria pătratului a cărui latură este egală cu semidiferenţa dintre lungimile laturilor dreptunghiului.*

**Exerciţiul** 6.47. *(*[17]*) Fie pătratului $ABCD$ cu latura de lungime $a$. Pe diagonala $[AC]$ se ia punctul $P$ astfel încât $PC = \frac{AC}{4}$. Fie punctul $E$ intersecţia lui $BP$ cu $CD$, $O$ centrul pătratului şi $M$ intersecţia lui $BP$ cu perpendiculara din $O$ pe $BC$.*

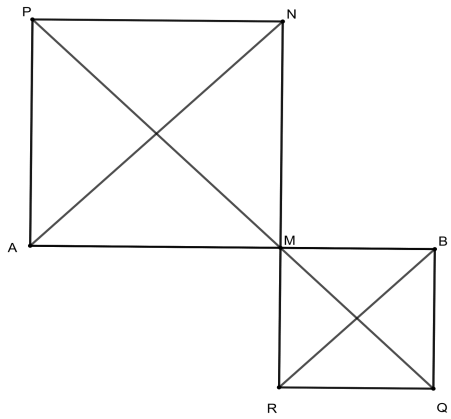



FIGURA 17. [24]

a) *Să se calculeze lungimea segmentului* $[CE]$*;*
b) *Să se arate că triunghiul* $\Delta OEM$ *este isoscel.*

**Exerciţiul** 6.48. *(*[18]*) Pe diagonala* $[AC]$ *a unui pătrat* $ABCD$ *se consideră punctele* $E$ *şi* $F$*, cu proprietatea* $[AE] \equiv [CF] \equiv [AB]$*. Punctul* $E$ *interior segmentului* $[AC]$ *şi* $F$ *ales pe prelungirea segmentului* $[AC]$*. Dreapta* $BE$ *intersectează laturile pătratului* $[CD]$ *şi* $[AD]$ *în punctele* $M$ *şi* $N$*, iar segmentele* $[CN]$ *şi* $[DF]$ *se intersectează în* $P$*. Să se arate că punctele* $M$*,* $A$*,* $P$ *sunt coliniare.*

**Exerciţiul** 6.49. *(*[15]*) Pe laturile unui pătrat* $ABCD$ *se consideră segmentele congruente* $[AM] \equiv [BN]$ *şi* $[CP] \equiv [DQ]$*, figura (18).*

a) *Să se stabilească natura patrulaterului* $MNPQ$*;*
b) *Să se demonstreze că cele două patrulatere au acelaşi centru.*

**Exerciţiul** 6.50. *(G.M.-B nr.1/2016* [23]*) Fie* $ABCD$ *un pătrat cu latura de* $4cm$*. O dreaptă care trece prin* $C$ *intersectează dreptele* $AB$ *şi* $AD$ *în* $E$*, respectiv* $F$*. Aflaţi lungimea segmentului* $[EF]$*, ştiind că* $m(\sphericalangle AEF) = 15^\circ$*.*

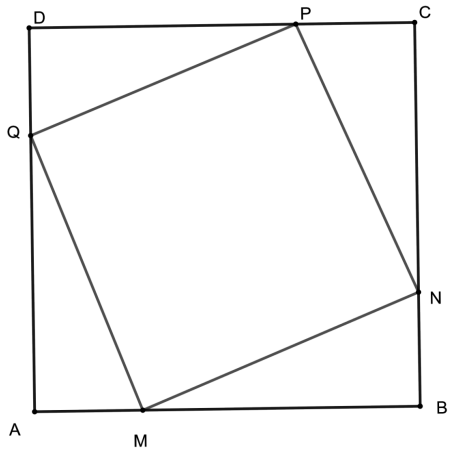



FIGURA 18. [24]

## 6. Trapez

### 6.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 6.51. *(*[21]*) În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, fie $P$ şi $Q$ picioarele perpendicularelor din $A$ respectiv $C$ pe diagonala $[BD]$, iar $M$ mijlocul diagonalei $[AC]$. Demonstraţi că $[MP] \equiv [MQ]$.*

*Soluţie:*
În figura (19), avem $AP \perp BD$ şi $CQ \perp BD$, deducem că:

$$AP \parallel CQ$$

Obţinem că $APCQ$ este trapez. De asemenea, construim $MT \perp DB$ şi rezultă

$$AP \parallel MT \parallel CQ$$

Din ipoteză, cunoaştem că $[AM] \equiv [CM] \Rightarrow MT$ este linie mijlocie în trapezul $APCQ$:

$$[PT] \equiv [QT]$$

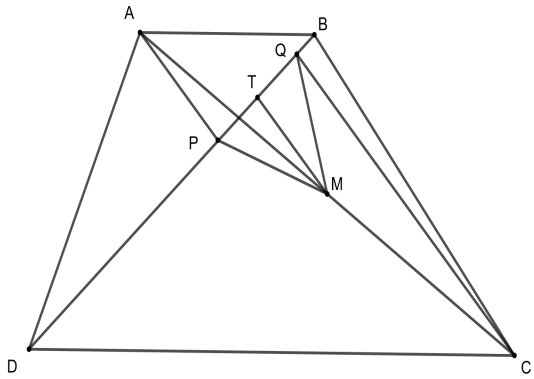



FIGURA 19. [24]

Observăm că $MT$ este mediatoarea segmentului $[QP]$, în concluzie:

$$[MP] \equiv [MQ].$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 6.52. *(*[9]*) Un trapez isoscel are unghiul alăturat bazei mari egal cu* $45°$*, baza mică cu lungimea egală cu* $4cm$ *şi înălţimea cu lungimea de* $6cm$*. Să se calculeze:*

a) *Măsura unghiurilor alăturate bazei mici;*
b) *Lungimea bazei mari.*

*Soluţie:*
În figura (20), $ABCD$ este trapez isoscel, $AB \parallel CD$. Rezultă:

$$m(\sphericalangle DAB) = 180° - m(\sphericalangle ADC)$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle DAB) = 180° - 45°$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle DAB) = 135°.$$

Construim $AE \perp DC$ şi $BF \perp DC$. Deducem că:

$$EF = AB = 4cm$$

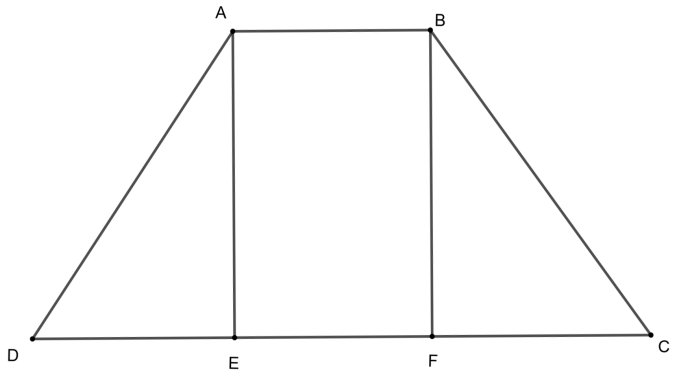



FIGURA 20. [24]

$\Delta AED$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow DE = AE = 6cm$. În concluzie:

$$DC = DE + EF + FE = 16cm.$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

**Exerciţiul** 6.53. *(*[2]*) În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 90°$, se duc diagonalele $[AC]$ şi $[BD]$ care se intersectează în $I$. Paralela la baze dusă prin $I$ intersectează $AB$ în $E$. Să se arate că $EI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DEC$.*

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $EI \parallel BC$. Din teorema lui Thales, deducem că:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AI}{IC}$$

Dar, $\Delta AID \sim \Delta CIB$, deoarece au unghiurile egale, şi obţinem:

$$\frac{AI}{IC} = \frac{AD}{CB} = \frac{DI}{IB}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{AD}{BC}$$

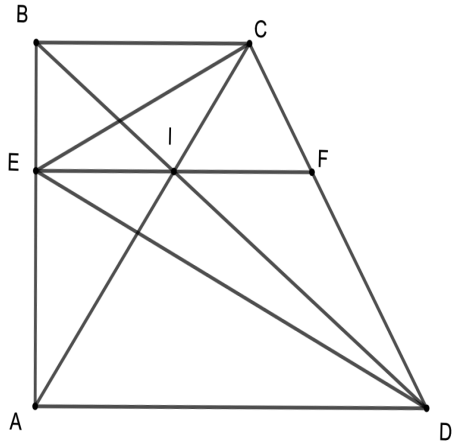



FIGURA 21. [24]

Rezultă că $\Delta AED \sim \Delta BEC$ (au câte două laturi proporţionale şi câte un unghi congruent). Obţinem:

$$\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle BCE$$

$$\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle DEI$$

$$\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle CEI$$

deoarece sunt unghiuri alterne interne.

Rezultă că:

$$\sphericalangle DEI \equiv \sphericalangle CEI$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 6.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 6.54. *(*[19]*) Fie $ABCD$ un trapez oarecare, $[AD]$, $[BC]$ respectiv baza mare şi baza mică. Paralela dusă prin $C$ la $AB$, intersectează diagonala $[BD]$ în $M$ şi paralela tot la $AB$, dusă prin $D$, intersectează prelungirea diagonalei $[AC]$ în $N$. Să se arate că $AB$ este media geometrică a lungimilor segmentelor $[CM]$ şi $[DN]$.*

**Exerciţiul** 6.55. *(*[22]*) În ce caz linia care uneşte mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez trece prin punctul comun diagonalelor?*

**Exerciţiul** 6.56. *(*[6]*) În trapezul $ABCD$, $BC = b$ este baza mică şi $AD = a$ este baza mare, se ia pe latura $[AB]$ un punct $M$, care împarte acesată latura în raportul $\frac{AM}{MB} = \frac{p}{q}$. Prin punctul $M$ se duce paralela $MN$ la bazele trapezului. Să se calculeze:*

a) *Lungimea segmentului $[MN]$ în funcţie de $a$, $b$, $p$ şi $q$.*
b) *Porţiunea din paralela $MN$ cuprinsă între diagonalele trapezului trapezului;*
c) *Lungimea segmentului $[PQ]$ cuprins între laturile neparalele, paralel cu bazele, dus prin punctul de intersecţie al diagonalelor.*

**Exerciţiul** 6.57. *(*[17]*) Să se demonstreze că într-un trapez, dreapta care uneşte mijloacele laturilor neparalele este paralelă cu bazele, trece prin mijloacele diagonalelor, este egală cu semisuma bazelor, iar partea cuprinsă între diagonale este egală cu semidiferenţa bazelor.*

**Exerciţiul** 6.58. *(*[20]*) Pe laturile pătratului $ABCD$ se consideră punctele $M$, $N$, $P$, $Q$, unde $M$ este arbitrar pe latura $[AB]$, astfel încât $m(\sphericalangle BMN) = \alpha$, $m(\sphericalangle CNP) = 2\alpha$, $m(\sphericalangle QPD) = 3\alpha$. Să se determine $\alpha$ astfel încât $MNPQ$ să fie trapez isoscel.*

**Exerciţiul** 6.59. *(G.M.-B nr.6-7-8/2012* [23]*) Se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $E$ şi $F$ mijloacele lui $[AB]$ respectiv $[CD]$, iar $M$ un punct pe dreapta $BD$ astfel încât $B \in (DM)$. Dacă $\{P\} = ME \cap AD$ şi $\{N\} = MF \cap BC$, arătaţi că: $PN \parallel AB$.*

**Exerciţiul** 6.60. *(*[14]*) În trapezul $ABCD$ bazele sunt $[AB]$ şi $[CD]$. Se consideră punctele $M \in AD$, $N \in BC$ astfel încât $MN$ este*

*paralelă cu $AB$. Să se arate că trapezele $ABNM$ şi $MNCD$ sunt asemenea dacă şi numai dacă lungimea segmentului $[MN]$ este media geometrică între lungimile segmentelor $[AB]$ şi $[DC]$. Să se găsească raportul de asemănare.*

## 7. Relaţii metrice în patrulater

### 7.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 6.61. *(*[14]*) Fie $ABCD$ un dreptunghi, în care latura $[AB]$ este de trei ori mai lungă decât latura $[AD]$. Se consideră în interiorul dreptunghiului punctul $N$ astfel încât verifică $NA = \sqrt{2}$, $NB = 4\sqrt{2}$, $ND = 2$. Se cere aria dreptunghiului.*

*Soluţie:*

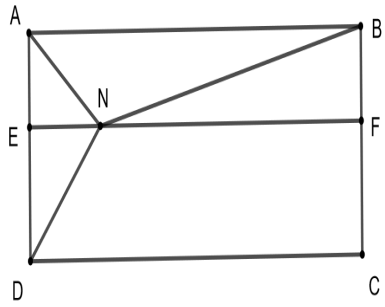



FIGURA 22. [24]

În figura (22), avem $AD = a$ şi deducem că $AB = 3a$. Construim prin $N$ paralela la $AB$. Această paralelă intersectează $AD$ în punctul $E$ şi respectiv $BC$ în punctul $F$.

În triunghiul $\Delta DAN$ aplicăm teorema lui Pitagora generalizată:

$$DN^2 = AD^2 + AN^2 - 2AD \cdot AN \cos(\sphericalangle DAN)$$

$$\Rightarrow \cos(\sphericalangle DAN) = \frac{AD^2 + AN^2 - DN^2}{2AD \cdot AN}$$

$$\Rightarrow \cos(\sphericalangle DAN) = \frac{a^2 + 2 - 4}{2a\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \cos(\sphericalangle DAN) = \frac{a^2 - 2}{2a\sqrt{2}}$$

În triunghiul dreptunghic $\Delta AEN$, avem:

$$\cos(\sphericalangle EAN) = \frac{AE}{AN} \Rightarrow AE = \sqrt{2}\cos(\sphericalangle EAN)$$
$$\Rightarrow AE = \sqrt{2}\cos(\sphericalangle DAN)$$

şi

$$EN = \sqrt{2}\sin(\sphericalangle DAN)$$

Deoarece $ABFE$ este dreptunghi, deducem că:

$$BF = AE = \sqrt{2}\cos(\sphericalangle DAN)$$
$$NF = 3a - \sqrt{2}\sin(\sphericalangle DAN)$$

În triunghiul dreptunghic $\Delta BFN$ aplicăm teorema lui Pitagora:

$$BN^2 = NF^2 + BF^2$$
$$(4\sqrt{2})^2 = (3a - \sqrt{2}\sin(\sphericalangle DAN))^2 + (\sqrt{2}\cos(\sphericalangle DAN))^2$$
$$3a^2 - 2a\sqrt{2}\sin(\sphericalangle DAN) = 10$$

de unde deducem că:

$$\sin(\sphericalangle DAN) = \frac{3a^2 - 10}{2a\sqrt{2}}$$

Se ştie că:

$$\sin^2(\sphericalangle DAN) + \cos^2(\sphericalangle DAN) = 1$$

astfel, obţinem:

$$\left(\frac{3a^2 - 10}{2a\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a^2 - 2}{2a\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$
$$\Rightarrow 5a^4 - 36a^2 + 52 = 0$$

Dacă se notează $x^2 = t$, obţinem:

$$5t^2 - 36t + 52 = 0$$

cu soluţiile: $t_1 = \frac{26}{5}$ şi respectiv $t_2 = 2$. Dar, pentru $x^2 = 2$ nu convine deoarece am obţine $m(\sphericalangle DAN) = \frac{\pi}{2}$, ceea ce este fals.

Astfel, rămânem cu $x^2 = \frac{26}{5}$. Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 3a^2 = \frac{78}{5}.$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

**Exerciţiul** 6.62. *(*[22]*) Să se demonstreze că într-un trapez oarecare $ABCD$ suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor neparalele, plus de două ori produsul bazelor.*

*Soluţie:*

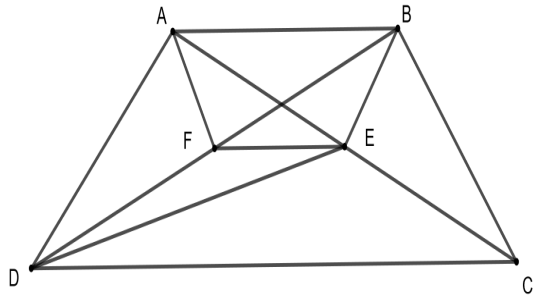



FIGURA 23. [24]

În figura (23), $ABCD$ este un trapez oarecare în care am construit diagonalele $AC$ şi respectiv $BD$. De asemenea, considerăm punctul $E$ mijlocul diagonalei $AC$ şi punctul $F$ mijlocul diagonalei $BD$.

În triunghiul $\Delta ABC$ aplicăm teorema medianei:

$$BE^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

În triunghiul $\Delta ADC$ aplicăm teorema medianei:

$$DE^2 = \frac{DC^2 + AD^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

În triunghiul $\Delta BED$ aplicăm teorema medianei:

$$EF^2 = \frac{BE^2 + DE^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$$

Dacă înlocuim primele două relaţii în a treia, se obţine:

$$4FE^2 = AB^2 + BC^2 - \frac{AC^2}{2} + AD^2 + DC^2 - \frac{AC^2}{2} - DB^2$$

$$4FE^2 = AB^2 + BC^2 - AC^2 + AD^2 + DC^2 - DB^2$$

$$4FE^2 + AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2$$

Dar,

$$EF = \frac{DC - AB}{2}$$

Deducem că:

$$4\left(\frac{DC - AB}{2}\right)^2 + AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2$$

$$DC^2 - 2DC \cdot AB + AB^2 + AC^2 + BD^2 =$$

$$= AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 + 2DC \cdot AB$$

Ceea ce trebuia să arătăm. □

Folosind rezolvarea problemei anterioare, se observă imediat soluţia problemei:

**Exerciţiul** 6.63. *([4]) Demonstraţi următoarea teoremă a lui Euler referitoare la paralelograme: $A$, $B$, $C$, $D$ sunt vârfurile consecutive ale unui paralelogram dacă şi numai dacă:*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

**Exerciţiul** 6.64. *([2]) Se dă patrulaterul oarecare $ABCD$, $E$ şi $F$ sunt mijloacele diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$, iar $M$ un punct oarecare din planul său. Să se arate că:*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(ME^2 + MF^2) + \frac{AC^2 + BD^2}{2}$$

*Soluţie:* Din ipoteză cunoaştem că $E$ şi respectiv $F$ sunt mijloacele diagonalelor patrulaterului $ABCD$, figura (24). Din teorema medianei, aplicată în $\Delta MBD$ deducem că:

$$MF^2 = \frac{MB^2 + MD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$$

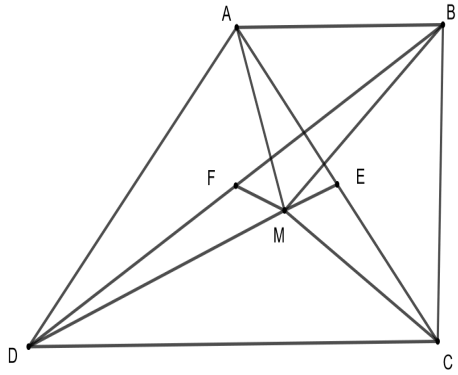



FIGURA 24. [24]

De asemenea, aplicată în $\Delta MCA$ teorema medianei:

$$ME^2 = \frac{MA^2 + MC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

Dacă adunăm cele două relaţii, se obţine:

$$MF^2 + ME^2 = \frac{MB^2 + MD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} + \frac{MA^2 + MC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

Adică:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(ME^2 + MF^2) + \frac{AC^2 + BD^2}{2}$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 7.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 6.65. *([14]) Fie $ABCD$ un paralelogram, având diagonala $[AC]$ mai lungă decât diagonala $[BD]$ Se proiectează vârful $C$ în $E$ şi $F$ pe dreptele $AB$ şi respectiv $AD$. Să se demonstreze că:*

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

**Exerciţiul** 6.66. *([17]) Într-un patrulater $ABCD$ convex ortodiagonal (diagonalele sunt perpendiculare), de laturi $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, să se demonstreze că:*

$$a^2b^2(a^2 - b^2) + b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2d^2(c^2 - d^2) + d^2a^2(d^2 - a^2) = 0.$$

**Exerciţiul** 6.67. *([2]) În trapezul $ABCD$, între bazele sale există relaţia $CD = 2AB$. Să se demonstreze că:*

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

**Exerciţiul** 6.68. *([22]) Un patrulater $ABCD$ are una dintre diagonalele sale $[BD]$ fixă, cealaltă diagonală, $[AC]$, de lungime constantă se mişcă paralel cu o direcţie dată. Să se găsească locul vârfurilor $A$ şi $C$ ştiind că suma pătratelor lungimilor laturilor patrulaterului este constantă.*

**Exerciţiul** 6.69. *([17]) Un trapez $ABCD$ cu diagonalele perpendiculare, $AC \perp BD$, are distanţa dintre baze egală cu $h$. Să se demonstreze că:*

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}.$$

**Exerciţiul** 6.70. *([13]) Să se demonstreze că în orice trapez $ABCD$, cu bazele $[AB]$ şi $[CD]$, are loc relaţia:*

$$\frac{AC^2 - BD^2}{BC^2 - AD^2} = \frac{DC + AB}{DC - AB}.$$

**Exerciţiul** 6.71. *([21]) Se dă pătratul $ABCD$ de latură $a$. Fie punctele $E \in (AB)$ şi $F \in (BC)$, astfel încât $EB + BF = a$. Demonstraţi că:*

$$\frac{DE}{EB} + \frac{EF}{AB} + \frac{FD}{FB} > 3\sqrt{2}.$$

CAPITOLUL 7

# Probleme. Cerc

## 1. Definiţii, proprietăţi

### 1.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 7.1. *(*[13]*) Se duc în triunghiul $\triangle ABC$ cercurile de diametre $AB$ şi $AC$. În primul cerc se duce un diametru $EF$ paralel cu $AC$ şi în al doilea cerc un diametru $GH$ paralel cu $AB$, punctele $F$ şi $H$ sunt în interiorul unghiului $\sphericalangle BAC$. Să se demonstreze că:*

a) *Al doilea punct de intersecţie al celor două cercuri este pe latura $BC$;*
b) *Punctele $A$, $H$, $F$ sunt coliniare;*
c) *Punctele $E$, $A$, $G$ sunt coliniare;*
d) *Dreapta $AF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.*

*Soluţie:*

a) Notăm cu $A$ şi $D$ cele două puncte de intersecţie ale celor două cercuri, vezi figura (1).

Din ipoteză cunoaştem că:

$$m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle ADB) + m(\sphericalangle ADC) = 180^\circ$$

$\Rightarrow B, D, C$ sunt coliniare.

b) Fie $O_1$, $O_2$ centrele celor două cercuri. Deducem că $\triangle AO_1F$ este un triunghi isoscel, deci:

$$\sphericalangle O_1AF \equiv \sphericalangle O_1FA.$$

De asemenea, $EF \parallel AC$, rezultă:

$$\sphericalangle AFO_1 \equiv \sphericalangle FAC$$

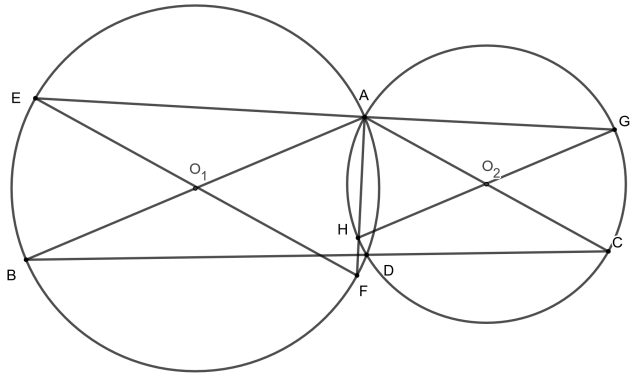



FIGURA 1. [24]

ca fiind unghiuri alterne interne. Deducem că $AF$ este bisectoarea $\sphericalangle BAC$.

Analog, se arată că $AH$ este bisectoarea $\sphericalangle BAC$.

Rezultă $A, H, F$ sunt coliniare.

c) $GH$ este diametrul cercului cu centrul în $O_2$, deducem că $AH \perp AG$, $EF$ este diametrul cercului cu centrul în $O_1$, deducem că $AF \perp AE$.

Rezultă că $E, A, G$ sunt coliniare.

d) $AF$ bisectoare a unghiului $\sphericalangle BAC$ s-a demonstrat la punctul $b$).

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 7.2. *(*[17]*) Într-un cerc dat se consideră diametrul $AB$. Se duc coardele $AC$ şi $BD$ care se intersectează în interiorul cercului în punctul $P$. Să se arate că:*

$$AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP.$$

*Soluţie:*

Fie $PE \perp AB$, vezi figura (2). Avem:

$$\sphericalangle AEP \equiv \sphericalangle ACB$$

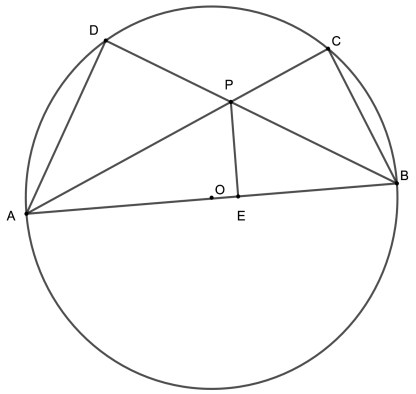



FIGURA 2. [24]

$$\sphericalangle PAE \equiv \sphericalangle BAC$$

Din asemănarea $\triangle APE \sim \triangle ACB$, deducem că:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PE} \Rightarrow AC \cdot AP = AB \cdot AE$$

De asemenea, avem:

$$\sphericalangle BEP \equiv \sphericalangle ADB$$

$$\sphericalangle PBE \equiv \sphericalangle ABD$$

Din $\triangle BPE \sim \triangle ADB$, deducem că:

$$\frac{DB}{EB} = \frac{AB}{PB} = \frac{AD}{PE} \Rightarrow DP \cdot PB = AB \cdot EB$$

$$\Rightarrow AC \cdot AP + BD \cdot BP = AB \cdot AE + AB \cdot EB$$

$$AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP.$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 7.3. *(*[22]*) Să se demonstreze că dacă două coarde egale ale unui cerc se intersectează în punctul $M$, atunci $AM = CM$, $BM = DM$, punctele $A$ şi $C$ fiind de o parte şi de alta a diametrului dus prin $M$.*

*Soluţie:* Fie cercul de centrul $O$ (vezi figura (3)). Considerăm coardele $AB$ şi $CD$.

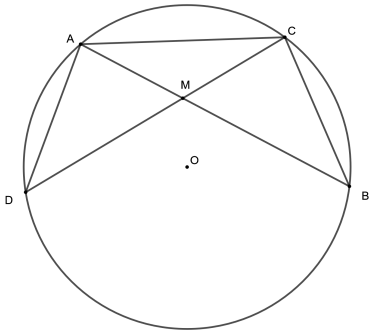



FIGURA 3. [24]

Se observă că:

$$\triangle ACB \equiv \triangle CAD$$

Astfel, obţinem: $\triangle AMC$ este isoscel. Deducem că:

$$[AM] \equiv [CM]$$

şi respectiv

$$[BM] \equiv [DM]$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 1.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 7.4. *(*[2]*) Fie $ABCD$ un trapez oarecare cu $AB \parallel CD$. Dacă $R_1$ şi $R_2$ sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor $\triangle ABC$ şi $\triangle CDA$, există relaţia:*

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{BC}{DA}.$$

**Exerciţiul** 7.5. *(*[15]*) La un cerc se duc două tangente neparalele. Fie $A$ şi $B$ punctele de tangenţă cu cercul, $C$ intersecţia tangentelor şi $AD$ coarda paralelă cu $CB$. Să se compare unghiul $\sphericalangle DAB$ cu unghiul $\sphericalangle CAB$.*

**Exerciţiul** 7.6. *(*[21]*) În cercul $\mathcal{C}(O, r)$ construim diametrul $[AB]$ şi coarda $[CD]$. Notăm cu $M$ mijlocul coardei $[CD]$ şi cu $E$ şi $P$ picioarele perpendicularelor construite din $C$, respectiv $D$ pe diametrul $[AB]$. Demonstraţi că $[EM] \equiv [PM]$.*

**Exerciţiul** 7.7. *(*[17]*) Pe un cerc dat $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră un punct fix $A$ şi un punct mobil $M$ pe cerc. Tangenta la cerc dusă în $A$ întâlneşte dreapta $OM$ în $B$. Să se arate că mediatoarea segmentului $[AM]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOM$, iar cercul de diametru $OB$ trece prin acelaşi punct $D$ când $M$ variază.*

**Exerciţiul** 7.8. *(*[22]*) Triunghiul isoscel $\triangle OAB$ are vârful $O$ în centrul unui cerc dat, iar baza $[AB]$ intersectează cercul în $C$ şi $D$. Să se arate că: $AC = BD$.*

**Exerciţiul** 7.9. *(*[20]*) Prin punctele de intersecţie $A$ şi $B$ a două cercuri $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se duc secantele arbitrare $MAN$ şi $PBQ$, $M, Q \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$. Să se demonstreze că: $MP \parallel NQ$.*

**Exerciţiul** 7.10. *(*[20]*) Pe segmentul $[AB]$ se consideră punctul mobil $M$ şi se construiesc cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ de diametre $AM$ şi $MB$. Una dintre tangentele comune exterioare are punctele de intersecţie cu cele două cercuri în $T$ şi $T'$. Când punctul $M$ descrie segmentul $[AB]$, arătaţi că:*

a) *Locul geometric al punctului $\{P\} = AT \cap BT'$;*
b) *Să se arate că distanţa $D$ de la $P$ la tangenta $TT'$ este media armonică a razelor cercurilor $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ .*

## 2. Patrulatere inscriptibile

### 2.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 7.11. *([14]) Pe un cerc se iau punctele $A$, $B$, $C$. Din mijlocul $M$ al arcului $\widehat{ACB}$ se duce perpendiculara $MD$ pe cea mai mare dintre coardele $[AC]$ şi $[BC]$. Să se arate că $D$ înjumătăţeşte linia frântă $ACB$.*

*Soluţie:*

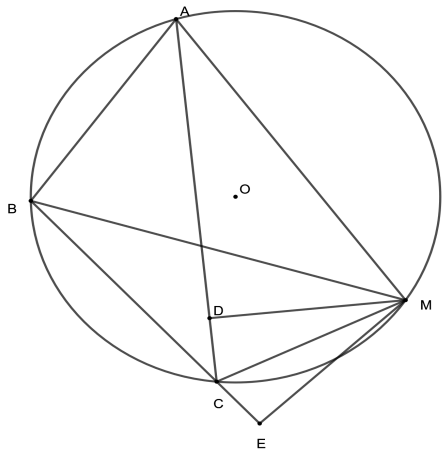



FIGURA 4. [24]

Fie cercul de centrul $O$, figura (4). Presupunem că $AC > BC$, astfel $D \in AC$. De asemenea, considerăm $ME \perp BC$.

Din ipoteză cunoaştem că $M$ este mijlocul arcului de cerc $\widehat{ACB}$, deducem că:

$$[AM] \equiv [BM]$$

Dar, patrulaterul $ABCM$ este inscriptibil, astfel:

$$\sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle MBC$$

Obţinem că $\triangle ADM$ şi $\triangle MBE$ sunt congruente, ele fiind triunghiuri dreptunghice. Deducem că:

$$[AD] \equiv [BE]$$

$$[MD] \equiv [ME]$$

Obţinem, astfel, congruenţa triunghiurilor dreptunghice $\triangle MCD \equiv \triangle MCE$, de unde rezultă că $[DC] \equiv [CE]$. În final:

$$BC + CD = BC + CE = BE = AD.$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 7.12. *([14]) Pe cercul circumscris unui triunghi echilateral $\triangle ABC$ se fixează un punct $M$. Să se arate că lungimea celui mai mare dintre segmentele $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$ este egală cu suma lungimilor celorlalte două segmente.*

*Soluţie:*

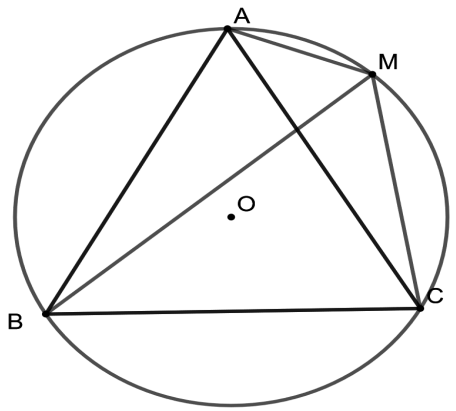



FIGURA 5. [24]

Considerăm punctul $M$ pe arcul $\overset{\frown}{AC}$ al cercului de centru $O$, figura (5). Patrulaterul $ABCM$ este un patrulater inscriptibil, atunci conform teoremei lui Ptolemeu, obţinem:

$$BM \cdot AC = AM \cdot BC + MC \cdot AB$$

Dar, din ipoteză cunoaştem că $\triangle ABC$ este un triunghi echilateral. Astfel, avem: $AB = AC = BC$. Deducem că:

$$BM = AM + MC$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 7.13. *([17]) Într-un triunghi oarecare $\triangle ABC$ ducem înălţimea $AD$. Dintr-un punct $E$ situat pe $AD$ construim cercul de centru $E$ şi ce raza $AE$. Acest cerc intersectează dreptele $AB$ şi $AC$ respectiv în $F$ şi $G$. Un alt cerc care trece prin $F$ şi $G$ intersectează dreptele $AB$ şi $AC$ respectiv în $I$ şi $K$. Să se arate că $BC \parallel IK$.*

*Soluţie:* Patrulaterul $IFGK$ este un patrulater inscriptibil (vezi figura (6)).

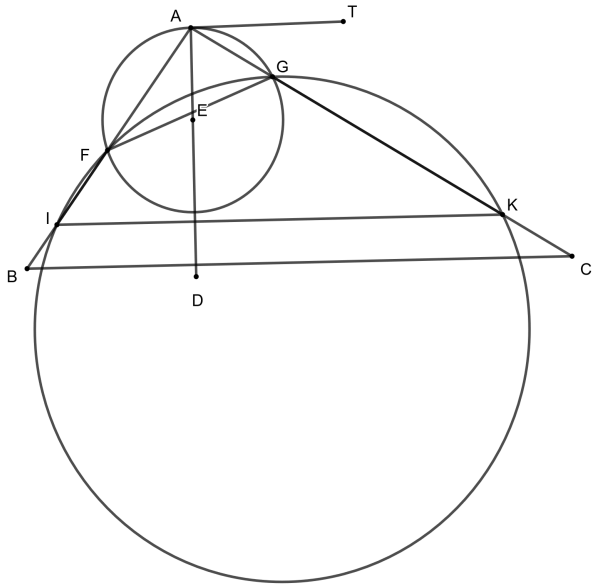



FIGURA 6. [24]

Deducem că:

$$\sphericalangle AFG \equiv \sphericalangle AKI$$

$$\sphericalangle AFG \equiv \sphericalangle GAT$$

Am considerat că $TA$ este tangenta la cercul cu centrul în punctul $E$. Astfel:

$$\sphericalangle GAT \equiv AKI$$
$$\sphericalangle GAT \equiv ACB$$

Se obţine congruenţa,

$$\sphericalangle GAT \equiv \sphericalangle ACB \Rightarrow BC \parallel IK$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

## 2.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 7.14. *(*[19]*) Perpendiculara în $A$ pe bisectoarea $AM$ a unghiului $\sphericalangle A$ în triunghiul $\triangle ABC$, intersectează perpendicularele în $B$ şi $C$ pe $BC$ în $U$, respectiv $V$. Să se arate că:*

a) $AM \cdot CV = MU \cdot AC - AU \cdot MC$;

b) $AM \cdot BU = MV \cdot AB - AV \cdot MB$.

**Exerciţiul** 7.15. *(*[15]*) Se consideră $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $C$ opus lui $A$ şi $AM$, $BM$, $CP$ şi $DP$ bisectoarele unghiurilor sale. În plus, $AM \cap DP = \{Q\}$, $BM \cap CP = \{N\}$. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.*

**Exerciţiul** 7.16. *(*[2]*) Se dă un cerc şi coarda $AB$. Prin mijlocul $C$ al arcului $AB$, se duc două corzi oarecare ce intersectează cercul în $D$ şi $E$, iar coarda $AB$ în $F$ şi $G$. Să se arate că:*

a) $\triangle CFG \sim \triangle DCE$;

b) *patrulaterul $DEGF$ este inscriptibil.*

**Exerciţiul** 7.17. *(*[13]*) Se notează cu $D$ piciorul bisectoarei interioare a unghiului $A$ pe latura $[BC]$ în $\triangle ABC$ şi cu $E$ intersecţia aceleaşi bisectoare cu cercul circumscris $\triangle ABC$. Se cere să se demonstreze că $EB$ este tangentă la cercul circumscris $\triangle ABD$ şi $EC$ tangentă la cercul circumscris $\triangle ACE$.*

**Exerciţiul** 7.18. *(*[4]*) Fie $ABCD$ un patrulater şi $I$ punctul de intersecţie dintre dreptele $AC$ şi $BD$. Demonstraţi că $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă:*

$$AI \cdot IC = BI \cdot ID.$$

**Exerciţiul** 7.19. *(*[14]*) Fie $ABCD$ un patrulater convex inscriptibil, în care diagonala $AC$ este bisectoare a unghiului $\sphericalangle A$. Notăm $M$ punctul de intersecţie al diagonalelor sale. Dacă $BC = 4cm$ şi $AM = 6cm$, să se afle lungimea segmentului $[CM]$.*

**Exerciţiul** 7.20. *(*[19]*) Fie triunghiul oarecare $\triangle ABC$ şi $A'$, $B'$, $C'$ picioarele înălţimilor duse din $A$, $B$, $C$. Perpendicularele din $A'$ pe $AC$ respectiv $AB$, intersectează dreapta $B'C'$ în punctele $B"$, respectiv $C"$. Arătaţi că:*

a) *$B$" şi $C$" sunt simetricele punctului $A'$ faţă de laturile $AC$ şi respectiv $AB$;*
b) *Se consideră punctele arbitrare $M \in AB$ şi $N \in AC$. Să se arate că perimetrul triunghiului $\triangle A'B'C'$ este mai mic decât perimetrul triunghiului $A'MN$;*
c) *Fie $I$ intersecţia lui $AA'$ cu $B"C"$. Să se demonstreze că:*

$$IB' \cdot IC" = IC' \cdot IB" = IA \cdot IA'.$$

## 3. Poligoane regulate

### 3.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 7.21. *([12]) Se consideră un triunghi echilateral $\Delta ABC$, de latură $l_3$, înscris într-un cerc de centru $O$ şi rază $R$. Cunoscând $l_3$ şi $R$, să se calculeze lungimea înălţimii $AD$, notată cu $a_3$.*

*Soluţie:*

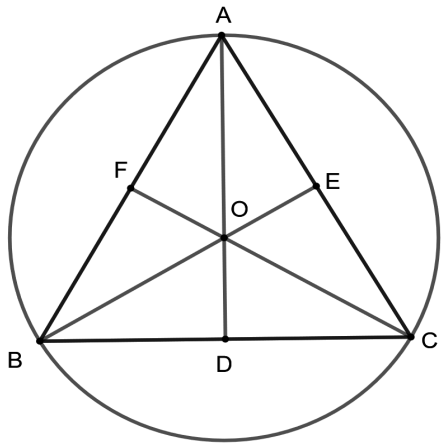



FIGURA 7. [24]

Fie $\triangle ABC$ echilateral, vezi figura (7), în care considerăm $AB = l_3$ şi respectiv $OB = R$.

$AD$ este înălţime în $\triangle ABC$ echilateral. Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle ADB$ drepunghic în $D$:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow AD = \frac{l_3\sqrt{3}}{2}$$

$$a_3 = \frac{l_3\sqrt{3}}{3}$$

sau

$$a_3 = \frac{R}{2}$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

**Exerciţiul** 7.22. *([4]) Cu centrele în vârfurile unui pătrat $ABCD$ de latură $l_4$, se trasează arcele $\widehat{MN}$, $\widehat{NP}$, $\widehat{PQ}$, $\widehat{QM}$, figura (8), unde $M$, $N$, $P$, $Q$ sunt mijloacele laturilor pătratului. Să se calculeze lungimea liniei curbe închise obţinute reunind aceste arce.*

*Soluţie:*

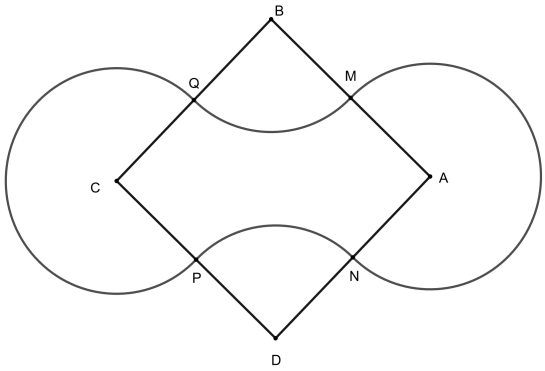



FIGURA 8. [24]

Lungimea unui arc de cerc de rază $R$ a cărui măsură în grade este $\alpha$ este egală cu:

$$L_{arc} = \pi R \frac{\alpha}{180}$$

Deducem că:

$$L = 2\pi \frac{l_4}{2} \cdot \frac{90}{360} + 2\pi \frac{l_4}{2} \cdot \frac{270}{360} + 2\pi \frac{l_4}{2} \cdot \frac{90}{360} + 2\pi \frac{l_4}{2} \cdot \frac{270}{360}$$

$$L = 2\pi l_4$$

Ceea ce trebuia să demonstrăm. □

**Exerciţiul** 7.23. *([12]) Pătratului $ABCD$ din figura (3), de latura $l_4$, i se taie vârfurile astfel încât să obţinem un octogon regulat. Să se calculeze latura octogonului regulat în funcţie de latura pătratului.*

*Soluţie:* Fie pătratul $ABCD$, figura (9), cu lungimea laturii $AB = l_4$. De asemenea, considerăm pentagonul $EFGHIJKL$ cu lungimea laturii $EF = l_8$.

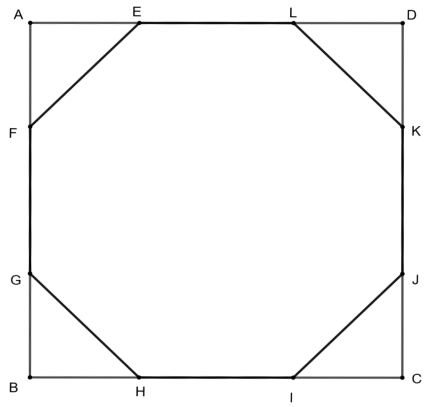



FIGURA 9. [24]

În triunghiul dreptunghic isoscel $\triangle EAF$ se aplică teorema lui Pitagora:

$$EF^2 = AE^2 + AF^2$$

Astfel, obţinem: $AE = \dfrac{EF}{\sqrt{2}}$. Deducem că:

$$AB = AF + FG + GB$$

$$l_4 = \frac{l_8}{\sqrt{2}} + l_8 + \frac{l_8}{\sqrt{2}}$$

$$l_4 = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} l_8$$

$$l_4 = (1+\sqrt{2}) l_8 \Rightarrow l_8 = \frac{l_4}{1+\sqrt{2}}$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

### 3.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 7.24. *(*[15]*) Fie $\triangle ABC$ un triunghi echilateral înscris într-un cerc. În punctele $B$ şi $C$ se duc tangentele la cerc şi se notează cu $D$ intersecţia lor. Stabiliţi natura patrulaterului $ABCD$.*

**Exerciţiul** 7.25. *(*[2]*) Într-un cerc de rază $R$ se duc razele $OA$, $OB$ şi $OC$, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle BOC)$, iar $m(\sphericalangle COA) = 120^\circ$. Pe aceste raze se iau lungimile $OM = ON = OP = R\sqrt{2}$, obţinându-se triunghiul echilateral $\triangle MNP$. Să se arate că aria $\triangle MNP$ este echivalentă cu aria hexagonului înscris în cercul cu raza egală cu $R$.*

**Exerciţiul** 7.26. *(*[20]*) Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat şi $P$ punctul de intersecţie al tangentelor duse la cercul său circumscris, în punctele $A$ şi $C$.*

a) *Să se demonstreze că $PF$ trece prin mijlocul laturii $[AB]$;*
b) *Să se arate că $PF = R\sqrt{7}$, unde $R$ este raza cercului circumscris.*

**Exerciţiul** 7.27. *(*[12]*) Aflaţi perimetrul figurii (10), dacă raza cercului este de $OP = 6cm$, iar distanţa de la centru la vârf este egală cu $0A = 12cm$.*

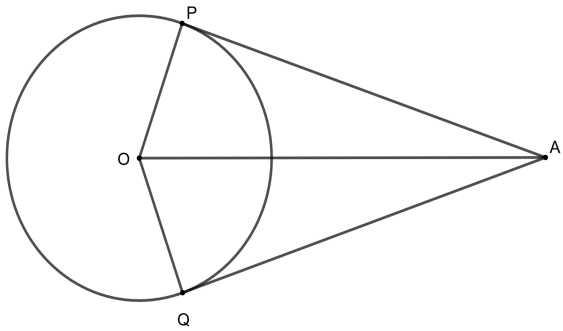



FIGURA 10. [24]

**Exerciţiul** 7.28. *(*[22]*) Se consideră un triunghi echilateral $\triangle ABC$ înscris într-un cerc şi un punct $M$ mobil pe cerc. Să se demonstreze că:*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = constant.$$

**Exerciţiul** 7.29. *(*[21]*) Se dă pătratul $ABCD$. Demonstraţi că:*

a) *Dacă $M$ este un punct pe cercul circumscris pătratului atunci:*

$$AB + BC + CD + DA > MA + MB + MC + MD$$

b) *Dacă $N$ este un punct pe cercul înscris în pătrat şi acest cerc intersectează diagonala $[AC]$ în punctele $P$ şi $Q$, iar diagonala $[BD]$ în punctele $R$ şi $T$, atunci:*

$$AC + BD > NP + NR + NQ + NT.$$

**Exerciţiul** 7.30. *(*[22]*) Să se demonstreze că apotema pentagonului regulat este egală cu semisuma razei cercului circumscris şi a laturii decagonului înscris în acel cerc.*

## 4. Arii

### 4.1. Probleme rezolvate

**Exerciţiul** 7.31. *([14]) Se consideră triunghiul $\triangle ABC$ şi cercul înscris în el de rază $r$ şi centru $O$, care este tangent laturilor triunghiului în punctele $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$. Ştiind că segmentul $[AP]$ are lungimea $r$, iar segmentul $[PC]$ are lungimea $a$, să se calculeze aria triunghiului $\triangle BMN$.*

*Soluţie:*

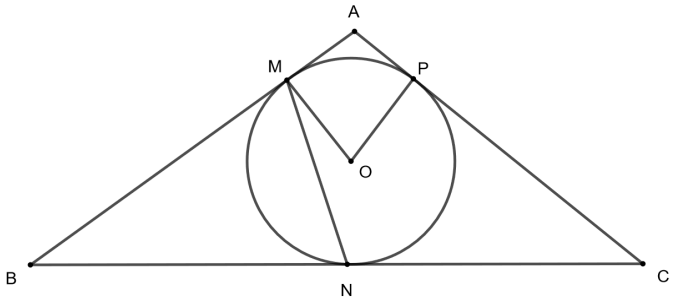



FIGURA 11. [24]

În figura (11), patrulaterul $AMOP$ este pătrat, deoarece $AM = AP = r$, din ipoteză, iar $OM = OP = r$, fiind raze în cercul de centrul $O$. De asemenea, unghiurile $\sphericalangle AMO$, $\sphericalangle APO$ şi $\sphericalangle MAP$ sunt unghiuri cu măsura de $90^\circ$.

Din ipoteză, cunoaştem că:

$$PC = NC = a$$

Dacă notăm: $BM = BN = x$, atunci obţinem:

$$AB = r + x$$

$$AC = r + a$$

$$BC = x + a$$

În triunghiul dreptunghic $\triangle ABC$ aplicăm teorema lui Pitagora, obţinem:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$(x+a)^2 = (r+x)^2 + (r+a)^2$$
$$x^2 + 2ax + a^2 = r^2 + 2rx + x^2 + r^2 + 2ra + a^2$$
$$\Rightarrow x = \frac{ra + r^2}{a - r}$$

Aria triunghiului $\triangle MBN$ este egală cu:

$$\mathcal{A}_{MBN} = \frac{MB \cdot BN \sin(\sphericalangle MBN)}{2}$$
$$\mathcal{A}_{MBN} = \frac{x^2 \sin(\sphericalangle MBN)}{2}$$
$$\mathcal{A}_{MBN} = \frac{x^2(r+a)}{2(x+a)}$$

Am utilizat: $\sin(\sphericalangle MBN) = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{r+a}{x+a}$. Astfel, se obţine:

$$\mathcal{A}_{MBN} = \frac{r^2(r+a)^3}{2(a-r)(a^2+r^2)}.$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

**Exerciţiul** 7.32. *(*[22]*) Să se demonstreze că pătratul construit pe tangenta comună a cercurilor descrise pe catetele unui triunghi dreptunghic, ca diametre, este echivalent cu triunghiul dat.*

*Soluţie:*

În figura (12), notăm lungimile laturilor $\triangle ABC$ cu $AB = c$, $BC = a$ şi $AC = b$. Cercurile de diametre $[AB]$, respectiv $[AC]$ au centrele în $O_1$, respectiv $O_2$. Tangenta comună a cercurilor intersectează cercul de diametru $[AB]$ în $D$ şi cercul de diametru $[AC]$ în $E$.

Se consideră o paralelă la $DE$ care trece prin $O_1$ şi intersectează $O_2E$ în $H$ (acest caz corespunde situaţiei în care $AB < AC$). În triunghiul dreptunghic $\triangle O_1HO_2$ aplicăm teorema lui Pitagora:

$$O_1H^2 + O_2H^2 = O_1O_2^2$$

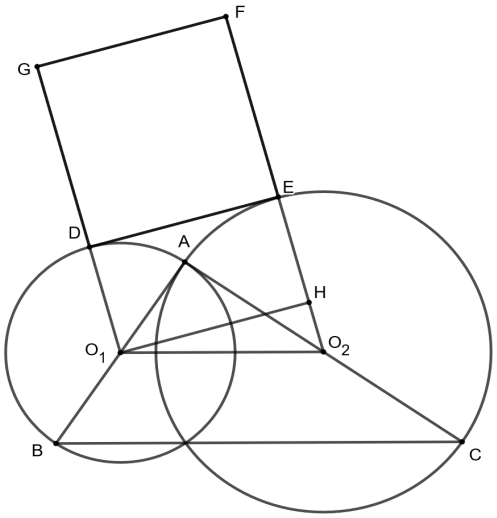



FIGURA 12. [24]

dar,

$$O_1O_2 = \frac{a}{2}$$

$$O_2H = O_2E - O_1D = \frac{b-c}{2}$$

Astfel, deducem că:

$$O_1H = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow DE^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow DE^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{bc}{4}\right) - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow DE^2 = \frac{bc}{2}$$

În concluzie, aria pătratului $DEFG$ este egală cu aria triunghiului $\triangle ABC$.

Ceea ce trebuia să arătăm. □

**Exerciţiul** 7.33. *(*[14]*) Într-un patrulater convex diagonalele au lungimile egale cu $m$ şi $n$. Să se calculeze aria patrulaterului, ştiind că segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse ale acestuia au aceeaşi lungime.*

*Soluţie:* Considerăm patrulaterul convex $ABCD$. Din ipoteză cunoaştem că $AC = m$ şi respectiv $BD = n$, de asemenea punctele $E$, $F$, $G$, $H$ sunt mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$, figura (13).

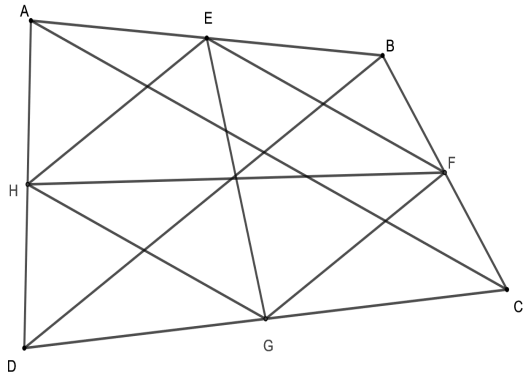



FIGURA 13. [24]

În triunghiul $\triangle ABD$ segmentul $[HE]$ este linie mijlocie, astfel:

$$HE \parallel BD$$

$$HE = \frac{BD}{2}$$

În triunghiul $\triangle BDC$ segmentul $[FG]$ este linie mijlocie, astfel:

$$FG \parallel BD$$

$$FG = \frac{BD}{2}$$

Deci segmentele $[HE]$ şi $[FG]$ sunt paralele şi congruente.

În triunghiul $\triangle ABC$ segmentul $[EF]$ este linie mijlocie, astfel:

$$EF \parallel AC$$

$$EF = \frac{AC}{2}$$

În triunghiul $\triangle ADC$ segmentul $[HG]$ este linie mijlocie, astfel:

$$HG \parallel AC$$

$$HG = \frac{AC}{2}$$

Deci segmentele $[EF]$ şi $[HG]$ sunt paralele şi congruente. Deducem că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

Din ipoteză cunoaştem că $[EG] \equiv [HF]$, rezultă că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi. Deci, patrulaterul $ABCD$ este ortodiagonal. Aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{m \cdot n}{2}$$

Ceea ce trebuia să calculăm. □

## 4.2. Probleme propuse

**Exerciţiul** 7.34. *(*[22]*) Să se demonstreze că dacă $a$, $b$, $c$ sunt lungimile laturilor triunghiului $\triangle ABC$, $R$ raza cercului circumscris, $S$ aria triunghiului, atunci:*

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

**Exerciţiul** 7.35. *(*[22]*) Să se demonstreze că dacă $a$, $b$, $c$ sunt lungimile laturilor triunghiului $\triangle ABC$, $r$ raza cercului înscris, $S$ aria triunghiului, atunci:*

$$S = pr$$

*unde* $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

**Exerciţiul** 7.36. *(*[14]*) Să se arate că într-un triunghi dreptunghic are loc inegalitatea:*

$$R \geqslant r(1+\sqrt{2})$$

*unde: $R$ raza cercului circumscris triunghiului şi $r$ raza cercului înscris triunghiului.*

**Exerciţiul** 7.37. *(*[17]*) Un trapez are lungimea bazei mari egală cu $a$ şi lungimea bazei mici egală cu $b$.*

a) *Să se determine lungimea segmentului paralel cu bazele şi care împarte trapezul în două părţi având ariile egale.*
b) *Să se calculeze aria trapezului, ştiind că înălţimea trapezului este media geometrică între cele două baze.*

**Exerciţiul** 7.38. *(*[2]*) Se dă dreptunghiul $ABCD$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ intersectează $CD$ în punctul $E$. Se prelungeşte $EB$ cu $BF = 2EB$. Dreapta $FD$ intersectează $AB$ în $M$. Să se calculeze, în funcţie de laturile dreptunghiului:*

a) *Aria triunghiului $\triangle DEF$, în funcţie de ariile dreptunghiului şi a pătratului construit pe latura $BC$.*
b) *Distanţa de la punctul $E$ la $DF$ şi distanţa de la punctul $M$ la $EF$.*

**Exerciţiul** 7.39. *([14]) Trapezul $ABCD$ are bazele $AD$ şi $BC$, iar latura $AB$ este perpendiculară pe baze. În trapez este înscris un cerc de centru $O$. Se cere aria trapezului. Se cunosc $OC = a$ şi $OD = b$.*

**Exerciţiul** 7.40. *([2]) Se dă trapezul $ABCD$ cu baza mică $AB = 3$ şi înălţimea $h = 4$. Pe laturile neparalele $AD$ şi $BC$ se construiesc pătratele $ADMN$ şi $BCPQ$, în afara trapezului. Cunoaştem că $ctg(\sphericalangle ADC) = \sqrt{3}$ şi $ctg(\sphericalangle DCB) = 2\sqrt{2}$. Să se calculeze ariile pătratelor $ADMN$ şi $BCPQ$.*

# Bibliografie


[1] A.C. Albu, F. Radó,V. Obădeanu, D. Smaranda, I. P. Popescu, *Geometrie pentru perfecţionarea profesorilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[2] M. Ş. Botez, *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.

[3] H. Behnke, F. Bachmann, K.Fladt, H. Kunle (Editors), *Fundamentals of Mathematics-Geometry*, Vol.II, MIT Press Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1986.

[4] D. Brânzei, E. Onofraş, S. Aniţa, G. Isvoranu, *Bazele raţionamentului geometric*, Editura Academiei, Bucureşti, 1983.

[5] D. Brânzei, S. Aniţa, A. Aniţa, *Competenţă şi performanţă în geometrie-Relaţii metrice*, Vol.1, Editura Minied, Iaşi, 1992.

[6] G. A. Chiţei, *Metode pentru rezolvarea problemelor de geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

[7] A. Coţa, M. Răduţiu, M. Rado, F. Vornicescu, *Matematică (Geometrie şi trigonometrie) - Manual pentru clasa a IX-a*, Editura didactică şi pedagogică Bucureşti, 1980.

[8] A. Coţa, E. Kurthy, E. F. Popa, M. Răduţiu, M. Rado, F. Vornicescu, *Matematică (Geometrie şi trigonometrie) - Manual pentru clasa a X-a*, Editura didactică şi pedagogică Bucureşti, 1985.

[9] I. Cuculescu, C. Ottescu, L. N. Gaiu, *Matematică, geometrie, manual pentru clasa a VI - a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[10] I. Cuculescu, C. Ottescu, *Matematică, geometrie, manual pentru clasa a VII - a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

[11] I. Cuculescu, C. Ottescu, *Matematică, geometrie, manual pentru clasa a VI - a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.

[12] I. Cuculescu, C. Ottescu, *Matematică, geometrie, manual pentru clasa a VII - a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.

[13] D. Drăghicescu, A. Leonte, G. Vraciu, *Ghid de pregătire la matematică pentru concursul de admitere în învâţământul superior*, Editura Scrisul românesc, Craiova, 1976.

[14] I. C. Drăghicescu, V. Masgras, *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.

[15] A. Hollinger, *Probleme de geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[16] R. Fenn, *Geometry*, Springer-Verlag, 2003.

[17] C. Ionescu-Ţiu, *Geometrie plană şi în spaţiu pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, Bucureşti, 1976.

[18] C. P. Niculescu, *Teste de geometrie*, Editura Albatros, Bucureşti, 1986.

[19] I. Petrică, I. Rusu, *Probleme de matematică pentru treapta I de liceu*, Editura Albatros, Bucureşti, 1976.

[20] G. D. Simionescu, *Probleme de sinteză de geometrie plană şi în spaţiu*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.
[21] I. Tudor, *Probleme de geometrie pentru gimnaziu*, Editura Paco, 1993.
[22] G. Ţiţeica, *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.
[23] Colecţia Gazeta matematică G.M.-B.
[24] www.geogebra.org.