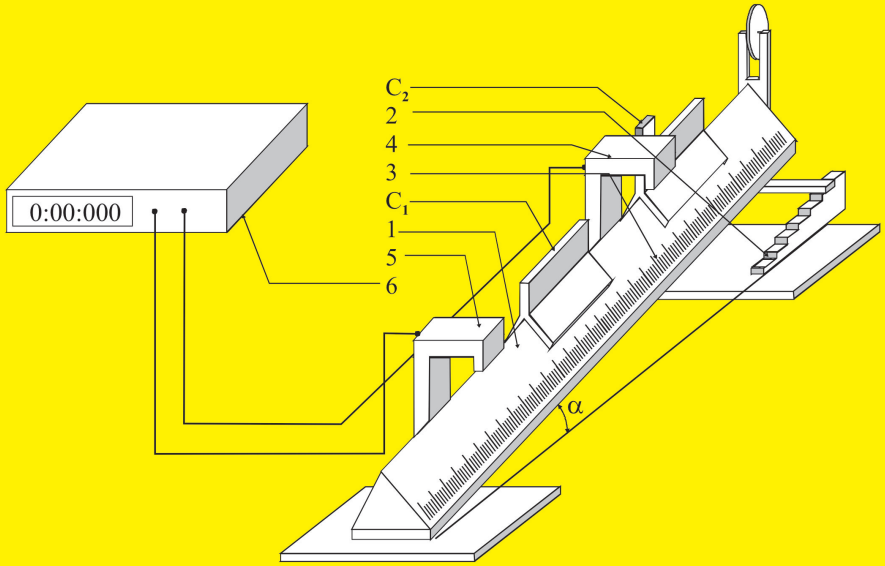
Colecția Științe Inginerești

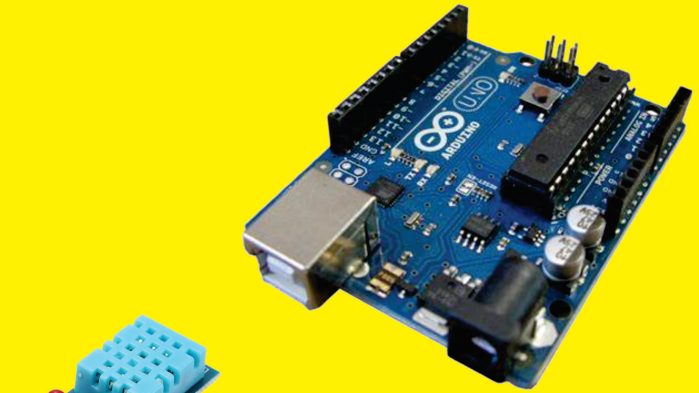


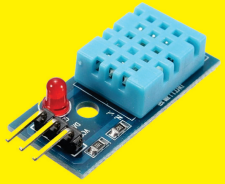
ISBN 978-606-696-129-5

Lucrări practice de identificare, modelare și simulare a proceselor fizice — Dan MUNTEANU — Gabriel MURARIU

Gabriel MURARIU Dan MUNTEANU

Lucrări practice de identificare, modelare și simulare a proceselor fizice









GUP

GALATI UNIVERSITY PRESS

Gabriel MURARIU **Dan MUNTEANU**

Lucrări practice de identificare, modelare și simulare a proceselor fizice

GALATI UNIVERSITY PRESS

2018

Copyright © 2018 Galati University Press
Toate drepturile rezervate. Nicio parte a acestei publicaţii nu poate fi reprodusă în nicio formă fără acordul scris al editurii.

Colecţia Științe Inginerești

Galati University Press – Cod CNCS 281
Editura Universităţii „Dunărea de Jos” din Galați
Str. Domnească, nr. 47, 800008 – Galaţi, ROMANIA
Tel. 0336 13 01 39; Fax: 00 40 236 46 13 53
gup@ugal.ro

Referenţi Ştiintifici:
Prof. univ. dr. Nicolae ŢIGĂU
Conf. univ. dr. Romana DRAŞOVEAN

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
MURARIU, GABRIEL
Lucrări practice de identificare, modelare şi simulare a proceselor fizice / Gabriel Murariu, Dan Munteanu. - Galaţi : Galaţi University Press, 2018
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-696-129-5

I. Munteanu, Dan

53

Tipărit la Editura Universităţii „Dunărea de Jos” din Galaţi.

Cuvânt înainte

Aceasta lucrare se adresează tuturor studenților de la Facultatea de Științe si Mediu, Facultatea de Inginerie si tuturor celor care sunt interesați de studiul fenomenelor fizice într-un mediu inovativ, ce implica unelte si dispozitive informatice moderne de tip ASPNET.

Acest proiect face parte dintr-un proiect mai amplu, care sa implementeze un sistem digital avansat pentru studierea fenomenelor de la distanta, cu posibilitatea accesării dispozitivelor de laborator folosind metode interactive, de tip IoT.

Speram ca toți cei interesați sa ne adreseze sugestii si sa vina alături de noi in implementarea noilor tehnologii in activitatea didactica.

Autorii

Cuprins

1.	*VERIFICAREA LEGII DE MIŞCARE RECTILINII UNIFORM VARIATE ŞI DETERMINAREA ACCELERAŢIEI GRAVITAŢIONALE CU AJUTORUL PERNEI DE AER*	**5**
2.	*VERIFICAREA LEGII MIŞCĂRII UNIFORM ACCELERATE PENTRU UN SISTEM DE CORPURI*	**19**
3.	VERIFICAREA LEGII DE MIŞCARE A CORPURILOR SUB ACŢIUNEA UNEI FORŢE DE REZISTENŢĂ, PROPORŢIONALĂ CU VITEZA	**31**
4.	*STUDIUL LEGII DE RĂCIRE A UNUI CORP ŞI DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE TRANSFER TERMIC*	**39**
5.	*DETERMINAREA CĂLDURII SPECIFICE A UNUI LICHID PRIN METODA RĂCIRII*	**47**
6.	*DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE CONDUCTIBILITATE TERMICĂ AL UNEI BARE PRINTR-O METODĂ STAŢIONARĂ*	**53**
7	*VITEZEI SUNETULUI ÎN AER PRIN METODA COMPUNERII OSCILAŢIILOR PERPENDICULARE*	**59**
8	*COMPUNEREA OSCILAŢIILOR PERPENDICULARE*	**71**
9	*MĂSURAREA REZISTENŢELOR ELECTRICE LINIARE ŞI NELINIARE PRIN METODA AMPERMETRULUI ŞI A VOLTMETRULUI*	**81**
10	*STUDIUL CIOCNIRILOR ELASTICE*	**85**
11	*STUDIUL CIOCNIRILOR PLASTICE*	**88**
	ANEXA 1	**91**
	ANEXA 2	**101**

Lucrarea 1

VERIFICAREA LEGII DE MIŞCARE RECTILINII UNIFORM VARIATE ŞI DETERMINAREA ACCELERAŢIEI GRAVITAŢIONALE CU AJUTORUL PERNEI DE AER

1. Considerații teoretice

Pentru un corp aflat sub acțiunea unei forte $\vec{F}(\vec{r},t)$, principiul al doilea al dinamicii postulează o relație între intensitatea interacțiunii și mărimea accelerației imprimate:

$$\vec{a}(\vec{r},t)=\frac{\vec{F}(\vec{r},t)}{m} \tag{1.1}$$

unde m este masa corpului.

Ținând cont de expresia de definiție a accelerației

$$\vec{a}(\vec{r},t)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}$$

rezultă că de fapt principiul fundamental al dinamicii poate fi exprimat printr-o ecuație diferențială de ordinul doi:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\dot{\vec{v}}=\frac{\vec{F}(\vec{r},t)}{m} \tag{1.2}$$

În cazul unor forte constante în timp, care depind doar de poziția corpului $\vec{F}(\vec{r},t)=\vec{F}(\vec{r})$, ecuația (1.2) este o ecuație cu variabile separabile, într-unul din termeni fiind doar funcții de poziție, iar celălalt fiind o derivată în raport cu timpul. Un astfel de caz este întâlnit de exemplu la mișcarea corpurilor în câmpuri de forţe constante în timp (de exemplu în cazul câmpului gravitațional sau electrostatic).

Dacă însă forța este constantă și nu variază nici în raport cu poziția, valoarea ei fiind $\vec{F}_0$, *atunci din ecuația (1.2), se poate obține legea de mișcare.*

O astfel de situație se întâlnește, de exemplu, în cazul mișcării unui corp într-un câmp gravitațional omogen (cum este câmpul la suprafața Pământului).

În acest caz, accelerația $\vec{a}=\vec{F}_0/m$ este constantă și, deci, se poate afla legea de variație în timp a vitezei corpului:

$$\vec{v}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{a}dt=\int_{t_0}^{t}\frac{\vec{F}_0}{m}dt=\vec{a}(t-t_0)+\vec{v}_0=\frac{\vec{F}_0}{m}(t-t_0)+\vec{v}_0 \tag{1.3}$$

(unde $\vec{v}_0$ - viteza inițială, la momentul de referință t_0).

Dacă viteza la momentul inițial t_0 este $v_0=0$, atunci relația (1.3) devine:

$$\vec{v}(t)=\vec{a}(t-t_0)=\frac{\vec{F}_0}{m}(t-t_0)=\vec{a}\Delta t \tag{1.4}$$

Din legea vitezei se poate deduce mai departe și *legea de mișcare* a corpului considerat (funcția de timp care descrie poziția corpului în raport cu timpul):

$$\vec{r}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{v}dt=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\vec{F}_0}{m}(t-t_0)+\vec{v}_0\right)dt=\vec{r}_0+\vec{v}_0(t-t_0)+\frac{\vec{F}_0}{2m}(t-t_0)^2 \tag{1.5}$$

(unde x_0 este coordonata corpului la același moment t_0)

Dacă viteza corpului la momentul inițial t_0 este $v_0=0$, atunci relația devine:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\frac{\vec{F}_0}{2m}(t-t_0)^2 \tag{1.6}$$

Dacă considerăm și cazul în care $t_0=0$ (timpul este măsurat cu un cronometru care este pornit în momentul în care începe acțiunea forței, corpul aflându-se în repaus), relațiile

corespunzătoare vitezei și legii de mișcare devin:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{a}t \\ \vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} v(t) = at \\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \tag{1.7}$$

Reprezentările grafice ale celor două relații (1.7) sunt date în figurile 1.1.a si 1.1.b.

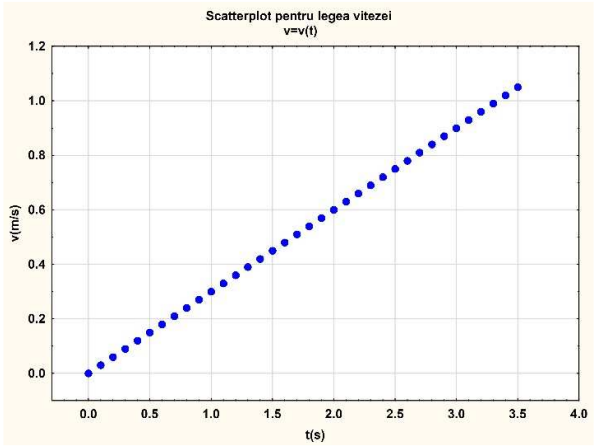


Fig. 1.1.a

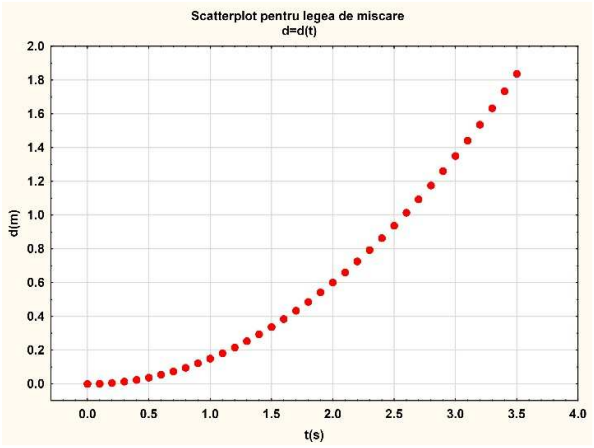


Fig. 1.1.b

Considerăm cazul unui corp de masa m_1 așezat pe un plan înclinat de unghi α (Fig.1.2) lăsat liber să se deplaseze spre baza planului înclinat.

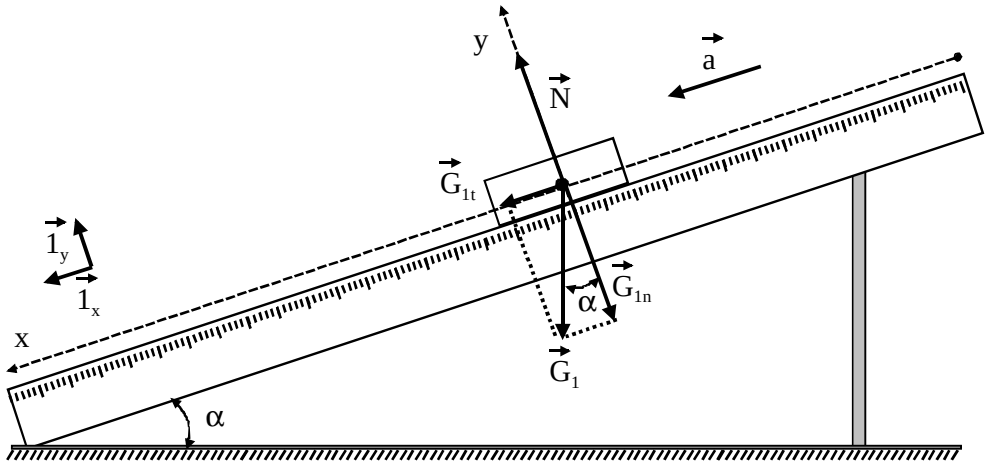


Fig. 1.2

Pentru corpul de masă m_1 ecuațiile forțelor pe cele două axe Ox și Oy (Fig. 1.2) sunt:

Pe axa Ox:

$$\vec{G}_{1t} = m_1\vec{a} \tag{1.8}$$

unde $\vec{G}_{1t}$ reprezintă componenta tangențială a greutății $\vec{G}_1$, având modulul

$$G_{1t} = G_1 \sin(\alpha) \tag{1.9}$$

Iar legătura dintre vectorul componentei tangențiale a greutății şi modulul forței este:

$$\vec{G}_{1t} = G_{1t}\vec{1}_x \tag{1.10}$$

(unde $\vec{1}_x$ reprezintă versorul axei Ox).

Ecuația obținută în lungul axei Ox este deci:

$$G_{1t}\sin\alpha\vec{1}_x = m_1 a\vec{1}_x$$

sau echivalent

$$G_1\sin\alpha = m_1 g\sin\alpha = m_1 a \qquad (1.11)$$

In același mod, putem scrie pentru forțele de pe axa Oy:

$$\vec{G}_n + \vec{N} = 0 \qquad (1.12)$$

unde $\vec{G}_n$ - componenta normală a greutății $\vec{G}_1$, având modulul:

- $G_{1n} = G_1\cos\alpha$ (1.13)

Legătura dintre vectorul componentei normale a greutății şi modulul forței este

- $\vec{G}_{1n} = -G_{1n}\vec{1}_y$ ($\vec{1}_y$ reprezintă versorul axei Oy – vezi figura 1.2) (1.14)

și, in mod analog, vom putea scrie pentru forța normală:

- $\vec{N} = N\vec{1}_y$ (vezi figura 1.2) (1.15)

Ecuația (1.12) devine în acest caz:

$$-G_{1n}\vec{1}_y + N\vec{1}_y = 0 \qquad (1.16)$$

sau echivalent

$$G_1\cos(\alpha) = N \qquad (1.17)$$

Din relația (1.11) rezultă mărimea accelerației imprimate corpului (eventualele forţe de frecare sunt neglijate) care este dată de expresia:

$$a = \frac{G_1\sin\alpha}{m_1} = g\frac{m_1\sin\alpha}{m_1} = g\sin\alpha \qquad (1.18)$$

In cazul considerării unor forţe de frecare la alunecare, ecuația (1.8) devine

$$\vec{G}_{1t} + \vec{F}_f = m_1\vec{a} \qquad (1.8a)$$

Si folosind expresiile care descriu legătură dintre vectori şi versorul axei Ox, vom putea scrie:

$$\vec{F}_f = -F_f\vec{1}_x = -\mu N\vec{1}_x \qquad (1.9a)$$

Unde am folosit legea lui Coulomb care permite exprimarea mărimii forței de frecare dinamice în funcție de mărimea forței de apăsare normală la suprafața $\vec{N}$.

$$F_f = \mu N \qquad (1.10a)$$

In acest caz, combinând relațiile (1.8.a), (1.9.a), (1.11) şi (1.17), vom putea obține expresia accelerației de coborâre a unui corp pe un plan inclinat în cazul existenţei unei forţe de frecare la alunecare

$$a = \frac{G_1\sin\alpha - \mu N}{m_1} = g\frac{m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha}{m_1} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad (1.18a)$$

Folosind relațiile (1.7) şi determinând pozițiile corpului la diferite momente de timp, în ipoteza neglijării forțelor de frecare şi de rezistenţă, vom putea calcula acceleraţia medie a corpului și astfel se poate verifica legea vitezei pentru mișcarea rectilinie uniform variată:

$$v = v_o + at \qquad (1.19a)$$

respectiv legea mișcării rectilinii uniform variate

$$x = x_0 + v_o t + \frac{a}{2}t^2 \qquad (1.19b)$$

Cunoscând pentru planul înclinat unghiul de înclinare α, se poate face și o estimare a valorii accelerației gravitaționale – g, folosind valorile măsurate experimental şi, de asemenea, se poate face o estimare a coeficientului de frecare la alunecare μ.

2. Dispozitivul experimental

Instalația utilizată pentru determinarea accelerației gravitaționale este dată în figura 1.3.

Perna de aer (1) poate fi înclinată sub diferite unghiuri α cu ajutorul dispozitivului de ridicare (2). Mișcarea corpului (3) este cronometrată cu ajutorul cronometrului electronic (4). Pozițiile porților START și STOP pot fi citite cu ajutorul sectorului (5) gradat în milimetri.

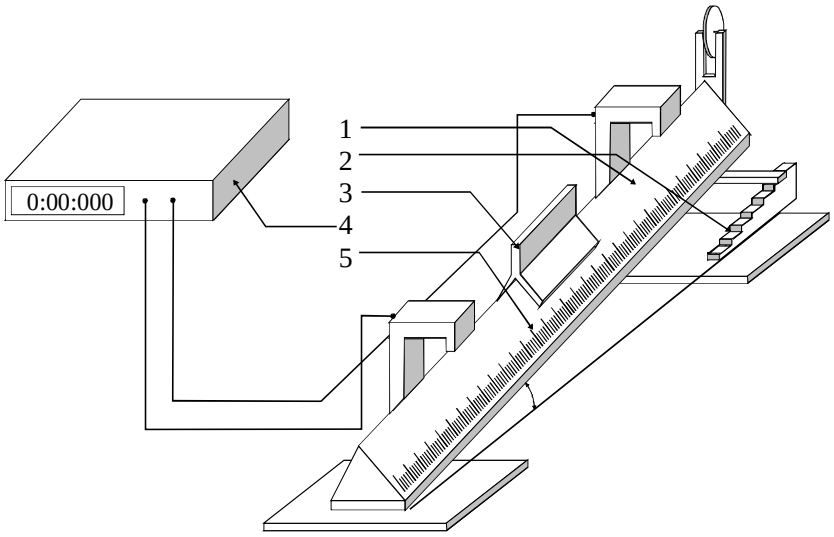


Fig. 1.3

3. Modul de lucru

a) Se reglează poziția pernei de aer la orizontală, marcându-se pe hârtia milimetrică de pe dispozitivul de ridicare pentru a se calcula înălțimea de ridicare h. Apoi se înclină perna de aer la un anumit unghi α.

b) Se fixează pozițiile celor două porți START și STOP ale cronometrului și se notează coordonatele lor X_{Start} și respectiv X_{Stop}, calculându-se distanţa dintre ele:

$$d = X_{Start} - X_{Stop} \tag{1.20}$$

c) Se așază corpul pe dispozitivul pernei de aer, în dreptul porții START și se lasă liber, notându-se apoi timpul Δt necesar parcurgerii distanței d dintre porți. Deoarece viteza inițiala se consideră nulă, vom putea considera relațiile (1.7) şi vom putea scrie relația

$$d = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{2d}{\Delta t^2} \tag{1.21}$$

d) Se modifică poziția porții STOP și se reiau operațiile de la punctele b) și c).

e) Se calculează unghiul α de înclinare al planului, cunoscând lungimea planului inclinat ($L = 1{,}830 m$)

$$\sin\alpha = h / L \tag{1.22}$$

f) Datele măsurate se trec în tabelul de mai jos, considerând, pentru viteza medie, expresia

$$v_{med} = d / \Delta t \tag{1.23}$$

Nr. crt.	X_{Start} (m)	X_{Stop} (m)	d (m)	Δt (s)	$a = 2d/\Delta t^2$ (m/s^2)	h (m)	$\sin(\alpha)$	v_{med} (m/s)	$a_t = g\sin(\alpha)$ (m/s^2)
1									
2									

g) Se compară valorile accelerației determinate experimental cu ajutorul relației (1.21) cu valorile

acceleraţiei teoretice determinată pe baza relaţiei (1.18) şi se va face o evaluare a mărimii acceleraţiei gravitaţionale g

$$g = a / \sin(\alpha) \tag{1.24}$$

i) Se trasează graficul

$$d = d(\Delta t)$$

unde d este exprimată de relaţia (1.20) şi se determină parametrii acestui grafic folosind metoda celor mai mici pătrate (vezi Anexa 1). Se compară valoarea obţinută pentru acceleraţie cu cea determinată pe baza relaţiei (1.24).

j) Se calculează valoarea medie a acceleraţiei evaluate şi se determină eroarea relativă.

4. Modelarea numerică

Modelarea numerică a mişcării uniform variate a sistemului mecanic descris reprezintă posibilitatea integrării numerice a ecuaţiei (1.2) în care termenul din partea dreapta este dat de componenta tangenţială a forţei de greutate.

Integrarea numerică a ecuaţiei (1.2) se bazează pe considerarea unui procedeu matematic care să poată realiza calcularea stării de mişcare a corpului la un moment de timp ulterior t_f (i.e. determinarea poziţiei corpului x_f şi respectiv a vitezei v_f) considerând starea de mişcare a corpului la un moment de timp anterior t_0 (cunoscând poziţia corpului x_0 şi respectiv viteza iniţială v_0) (Fig. 1.4).

Astfel, considerând o valoare pentru intervalul de timp Δt suficient de mică şi acceptabilă între oricare două stări mecanice succesive ale sistemului studiat, vom putea calcula, pas cu pas, pornind de la o stare iniţială, descrisă de coordonata x_0 şi respectiv viteza iniţială a corpului v_0, poziţiile şi vitezele corpului la orice alt moment de timp ulterior - $x = x(t)$ respectiv $v = v(t)$.

In acest sens, pentru a descrie numeric evoluţia stării de mişcare sistemului – poziţia şi viteza corpurilor la un anumit moment de timp ulterior, sunt necesare precizarea următoarelor mărimi fizice: masa corpului m_1, lungimea planului inclinat L, înălţimea faţă de orizontală a planului inclinat h, poziţia iniţială a corpului pe planul inclinat x_0, poziţia porţii START a cronometrului x_{start} şi respectiv poziţia porţii STOP a cronometrului x_{stop}. Nu în ultimul rând, trebuie precizată mărimea intervalului de timp Δt (rezoluţia temporală) dintre stările succesive ale sistemului.

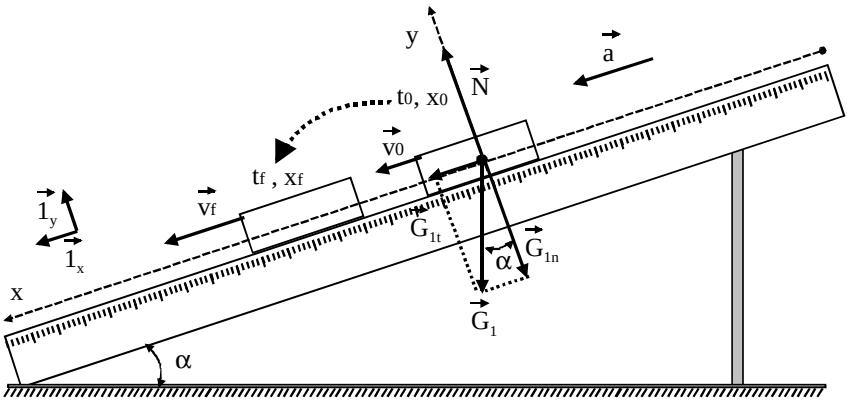


Fig. 1.4

Neglijând forţele de frecare şi rezistenţă, vom putea calcula, cu ajutorul mărimilor fizice mai

sus precizate, valoarea unghiului α de înclinare - relația (1.22), valoarea accelerației teoretice a corpului $a_{teoretic}$ - relația (1.18). Considerând starea inițială a sistemului descrisă de coordonata $x_1(m)$ și respectiv viteza inițială a corpului $v_1(m/s)$, vom putea calcula, pentru intervalul de timp Δt ales pentru rezoluția temporală, valorile vitezei curente și respectiv ale poziției curente a corpului după fiecare astfel de interval de timp (Fig. 1.5.a si Fig. 1.5.b):

$$a = \frac{v - v_1}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad v = v_1 + a\Delta t \tag{1.25}$$

In mod analog, vom putea scrie

$$v_{med} = d / \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad d = v_{med}\Delta t = (v + v_1)/2\Delta t \tag{1.26}$$

In care am considerat viteza v_{med} ca fiind egală cu media vitezelor –inițială şi finală din acest interval de timp.

In acest sens, folosind programul de calcul tabelar Excel, foaia de calcul va putea fi organizată în felul următor (Fig. 1.5.a si Fig. 1.5.b):

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare:

A	B	C	D	E	F	H	I	J	K
Δt(s)	t (s)	L (mm)	h(mm)	sin (α)	m_1 (kg)	g (m/s^2)	$a_{teoretic}$ (m/s^2)	x1 (m)	v_1(m/s)
0.01	0	1830	110	0.06011	0.34	9.8066	0.58946776	1.1	0
0.01	0.01	1830	110	0.06011	0.34	9.8066	0.58946776	1.1	0

Fig. 1.5.a – Setul de parametrii care descriu starea sistemul mecanic pentru simulare numerică

K	L	M	N	O	P	Q	R	S
v_1(m/s)	**X crt (m)**	**v crt(m/s)**	X start(m)	X stop (m)	vf (m/s)	d (m)	x_{fin} (m)	Δt_1(s)
0	**1.1**	**0**	1.4	1.85	0.00589	0.00003	1.10003	1.00889
0	**1.10003**	**0.00589**	1.4	1.85	0.01179	0.00009	1.10012	1.00889

Fig. 1.5.b - Setul de parametrii care descriu starea sistemul mecanic pentru simulare numerică

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare (Fig. 1.5.a si Fig. 1.5.b):

Nr. crt.	Coloana	Variabila	Descriere	Mod de utilizare
1.	A.	$\Delta t(s)$	Specifică intervalul de timp dintre două stări succesive	Se introduce în căsuța A2 o valoare numerică (de exemplu 0.01 și se copiază în toată coloana valoarea introdusă) =A2 ↵
2.	B.	$t(s)$	Reprezintă timpul curent i.e. ordonează stările sistemului $t_k = t_{k-1} + \Delta t$	La fiecare pas, se face incrementarea cu intervalul de timp introdus în coloana A B3=B2+A2 ↵

3.	C.	$L(mm)$	Reprezintă lungimea planului înclinat. Valoarea considerată este de 1840 mm – lungimea totală a planului înclinat.	Se introduce în căsuța C2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =C2 ┘
4.	D.	$h(mm)$	Înălțimea planului inclinat exprimată în mm. Planul inclinat poate prezenta înălțimi cuprinse între 0 mm şi 150 mm.	Se introduce în căsuța D2 valoarea numerică corespunzătoare (de exemplu 110 mm) şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =C2 ┘
5.	E.	$\sin(\alpha)$	Reprezintă valoarea funcției sinus aferentă unghiului de inclinare α.	Se calculează prin raportul dintre valoarea introdusă în căsuța D2 şi cea înregistrată în căsuța C2. Relația de mai jos copiază în toată coloana valoarea introdusă): =D2/C2 ┘
6.	F.	$m_1(kg)$	Reprezintă valoarea masei corpului de pe planul înclinat.	Se introduce în căsuța F2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =F2 ┘
7.	H.	$g(m/s^2)$	Reprezintă valoarea accelerației gravitaționale. Se consideră egală cu 9.8066m/s^2.	Se introduce în căsuța H2 valoarea numerică şi apoi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =H2 ┘
8.	I.	$a_{teor}(m/s^2)$	Reprezintă valoarea accelerației teoretice calculate cu ajutorul relației (1.22).	Se introduce în căsuța I2 relația de calcul pentru accelerația teoretică : =H2*E2┘
9.	J.	$x_1(m)$	Reprezintă poziția din care va fi lăsat liber corpul de masă m_1. Această poziție nu se va modifica in timpul experimentului.	Se introduce în căsuța J2 valoarea numerică şi se copiază apoi în toată coloana valoarea introdusă): =J2 ┘
10.	K.	$v_1(m/s)$	Reprezintă valoarea vitezei inițiale pentru corpul de masă m_1lăsat liber. Această valoare va fi considerată a fi nulă.	Se introduce în căsuța K2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =K2 ┘
11.	L.	$x_{crt}(m)$	Reprezintă poziția *curentă* pe care o va avea corpul de masa m_1. lăsat liber. Această poziție se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *primul parametru inițial al stării de mișcare.*	Se introduce în căsuța L2 valoarea numerică care corespunde valorii poziției inițiale J2, *dar la fiecare pas va fi actualizată.*

12.	M.	$v_{crt}(m/s)$	Reprezintă viteza *curentă* pe care o va avea corpul de masa m_1. lăsat liber. Această viteză se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *cel de al doilea parametru inițial al stării de mișcare.*	Se introduce în căsuța M2 valoarea care corespunde valorii vitezei inițiale K2 *care la fiecare pas va fi actualizată.*
13.	N.	$x_{Start}(m)$	Reprezintă poziția porții START. Această poziție nu se va modifica în timpul experimentului.	Se introduce în căsuța N2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =N2 ┘
14.	O.	$x_{Stop}(m)$	Reprezintă poziția porții STOP. Această poziție nu se va modifica în timpul experimentului.	Se introduce în căsuța O2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =O2 ┘
15.	P.	$v_f(m/s)$	Reprezintă viteza *finală* pe care o va avea corpul de masa m_1 lăsat liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această viteză se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *cel de al doilea parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța P2 formula de calcul pentru viteza finală aferentă intervalului de timp Δt din iterația curentă: $v_f = v_{crt} + a\Delta t$ care corespunde valorii vitezei finale =M2+I2*A2 ┘
16.	Q.	$d(m)$	Reprezintă distanța parcursă în intervalul de timp Δt *din iterația curentă.* Această distanță se va actualiza la fiecare pas.	Se introduce în căsuța Q2 formula de calcul a distanței parcurse în intervalul de timp Δt *din iterația curentă* $d = \frac{(v_f + v_{crt})}{2}\Delta t$ (1.27) care corespunde valorii vitezei medii pe acest interval =(P2+K2)/2*A2 ┘
17.	R.	$x_f(m)$	Reprezintă poziția *finală* pe care o va avea corpul de masă m_1 lăsat liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această poziție se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *primul parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța R2 formula de calcul pentru poziția *finală* pe care o va avea corpul de masa m_1 *din iterația curentă*: $x_f = x_{crt} + d$ (1.28) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =L2+Q2 ┘

18.	S.	$\Delta t_1(s)$	Reprezintă intervalul de timp calculat, necesar corpului de masa m_1 lăsat liber din dreptul poziției inițiale x_1 pentru a ajunge în dreptul poziției x_{Start} a porții START	Se introduce în căsuța S2 formula de calcul pentru intervalul de timp necesar corpului de masa m_1 lăsat liber *pentru a străbate distanța*: $d_1 = x_{Start} - x_1$ Folosind expresia $\Delta t_1 = \sqrt{2d_1 / a_{teoretic}}$ (1.29) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =sqrt(2*(N2-J2)/I2) ↵
19.	T.	$\Delta t_2(s)$	Reprezintă intervalul d.e timp calculat, necesar corpului de masă m_1 lăsat liber din dreptul poziției inițiale x_1 pentru a ajunge în dreptul poziției x_{Stop} a porții STOP.	Se introduce în căsuța S2 formula de calcul pentru intervalul de timp necesar corpului de masa m_1 lăsat liber *pentru a străbate distanța*: $d_1 = x_{Start} - x_1$ (1.30) Folosind expresia $\Delta t_1 = \sqrt{2d_1 / a_{teoretic}}$ (1.31) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =sqrt(2*(N2-J2)/I2) ↵

Observație: pentru fiecare iterație în parte, parametrii finali x_f şi respectiv v_f reprezintă parametrii inițiali x_{crt} respectiv v_{crt} pentru următoarea iterație. Acest fapt implică necesitatea ca la fiecare iterație trebuie adăugate următoarele relații de transfer:

L3=R2 ↵ respectiv M3=P2 ↵

Si apoi aceste relații pot fi copiate în toată foaia de calcul.

La final se compară rezultatele obținute numeric, pe baza integrațiilor efectuate pas cu pas cu cele determinate analitic, folosind relațiile (1.30) şi (1.31), şi se evaluează precizia rezultată.

A	B	C	D	E	F	H	I	J
Δt(s)	t (s)	L (mm)	h(mm)	sin (α)	m_1 (kg)	g (m/s^2)	$a_{teoretic}$ (m/s^2)	x1 (m)
0.01	1	1830	110	0.06011	0.34	9.8066	0.58946776	1.1
0.01	1.01	1830	110	0.06011	0.34	9.8066	0.58946776	1.1
0.01	1.54	1830	110	0.06011	0.34	9.8066	0.58946776	1.1
0.01	1.55	1830	110	0.06011	0.34	9.8066	0.58946776	1.1

Fig. 1.6.a – Setul de parametrii care descriu sistemul mecanic pentru comparația între simularea numerică şi valorile exacte obținute pentru configurația dată

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
v_1(m/s)	X crt (m)	v crt(m/s)	X start(m)	X stop (m)	vf (m/s)	d (m)	x_{fin} (m)	Δt_1(s)	Δt_2(s)
0	1.39473	0.58947	1.4	1.85	0.59536	0.00592	1.40066	1.00889	1.5952
0	1.40066	0.59536	1.4	1.85	0.60126	0.00598	1.40664	1.00889	1.5952
0	1.79899	0.90778	1.4	1.85	0.91368	0.00911	1.80810	1.00889	1.5952
0	1.80810	0.91368	1.4	1.85	0.91957	0.00917	1.81726	1.00889	1.5952

Fig. 1.6.b – Setul de parametrii care descriu sistemul mecanic pentru comparația între

simularea numerică şi valorile exacte obținute pentru configurația dată

5. Identificare de sistem

Procesul de identificare a sistemului mecanic are ca scop determinarea constantelor ce permit descrierea legii de mișcare. In acest scop, pentru a putea obține legea de mișcare şi pentru a putea face o comparație cu legea mișcării rectilinii uniform variate (1.7), se va utiliza o interfață digitală şi un set de senzori corespunzători.

5.a. Senzorii utilizați

Senzorii utilizați sunt de tip *senzor fotoelectric de infraroșu în miniatura în forma de U* de tip Opto Interrupter ITR9608-F (Referință 0104110000003348). Senzorul fotoelectric în formă de U are două componente: led-ul ce emite infraroșu și fototranzistorul (Fig. 1.7.a). Distanța dintre cele două brațe este de 10 mm.

Senzorul are rolul de a detecta dacă un obiect se află între cele două brațe ale sale și oprește transferul de radiație *infraroșie (IR)*. Modul de funcționare a modului este simplu, returnează LOW atunci când nu se află niciun obiect între cele doua brațe sau HIGH, în caz contrar. Modulul conține un comparator LM393 și, astfel, se obține un output digital (Fig. 1.6.a).

Caracteristici tehnice ale senzorului fotoelectric de infraroșu în miniatură în formă de U:

- Cădere de tensiune led: 1.2 V;
- Curent led: 50 mA (max);
- Tensiune colector - emitor fototranzistor: 30 V;
- Curent fototranzistor: 20 mA.

La adresa www.phys.ugal.ro/LaboratorMIS/Lucrare1, se poate descărcă foaia cu datele tehnice (datasheet - ITR9608-F.pdf).

5.b. Instrucțiuni de utilizare:

Modul de funcționare a modului este simplu, returnează LOW atunci când nu se află niciun obiect între cele două brațe sau HIGH, în caz contrar.

Montajul senzorului 6in cadrul interfeței este prezentat in figura 1.7.b.

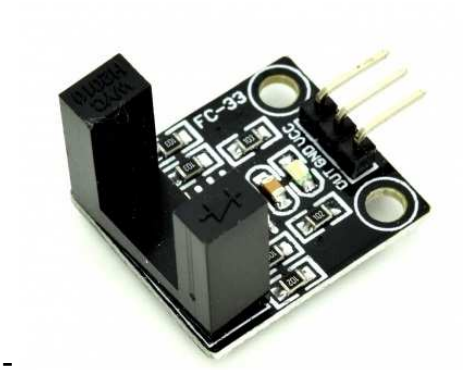


Fig. 1.7.a - Optocuplor

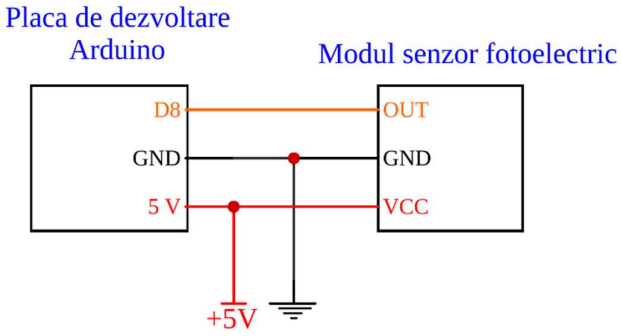


Fig. 1.7.b – Schema montaj

5.c. Interfața hardware utilizată

Interfața cu unitatea centrală este asigurată cu ajutorul unei placi de tip Arduino Uno (Fig.1.8.)

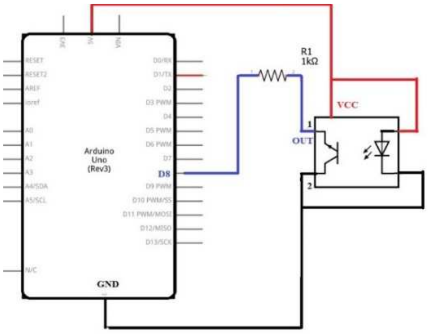


Fig. 1.8 – Schema interfeței cu Arduino Uno şi un optocuplor

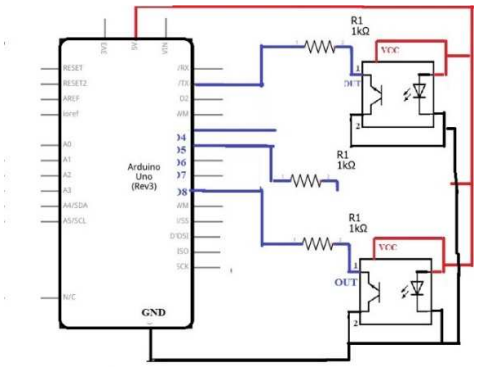


Fig. 1.9 – Schema interfeței cu Arduino Uno şi un set de optocuploare

5.d. Aplicația utilizată pentru platforma Arduino

Pentru citirea şi preluarea datelor oferite de senzorii utilizați, se poate folosi următorul cod generic:

```
#define pin1=4  //acest pin digital este utilizat de către senzor pentru a trimite date
#define pin2=5
.....
#define pin4=8
-----
void setup() {
//setați pin-ul definit anterior ca fiind de intrare
pinMode(pin1,INPUT);
pinMode(pin2,INPUT);
....
pinMode(pin4,INPUT);
.....
//se pornește comunicarea serială cu baud rates 9600
Serial.begin(9600);
}
void loop() {
  //dacă se primește pe pin-ul pin1 semnalul HIGH
  //atunci se afișează în Serial Monitor
  //textul "1"
 if(digitalRead(pin1) == HIGH)
   Serial.println("1");
....
  //dacă se primește pe pin-ul pin4 semnalul HIGH
  //atunci se afișează în Serial Monitor
  //textul "1"
 if(digitalRead(pin4) == HIGH)
   Serial.println("4");
.... }
```

5.e. Interfața grafica utilizată

Interfața grafică a programului utilizat este realizată in mediul de programare Visual Studio C#. Rolurile interfeței grafice sunt următoarele:

- a) *preia datele de pe magistrala serială (Serial Monitor) de la placa de achiziție Arduino –i.e. memorează momentele de timp la care sunt activați senzorii*, pornind cronometrul de la momentul citirii primului senzor.
b) *preia pozițiile curente ale senzorilor cuplați la dispozitivul experimental*. Aceste date sunt introduse de utilizator prin intermediul interfeței date.
c) *se rulează un modul de calcul pentru identificarea constantelor expresiei polinomiale de interpolare* de forma

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \qquad (1.33)$$

și se compară cu expresia legii mișcării rectilinii uniform variate

$$x = x_0 + v_o t + \frac{a}{2} t^2$$

respectiv cu expresiile date de evaluările numerice. Modulul de calcul pentru calculul coeficienților expresiei polinomiale de interpolare va fi bazat pe utilizarea metodei celor mai mici pătrate (vezi Anexa 1).

Schema logică a programului este prezentată în figura de mai jos. Modulele şi procedurile specifice ale interfeței sunt prezentate sub forma unor elemente grafice de tip săgeată.

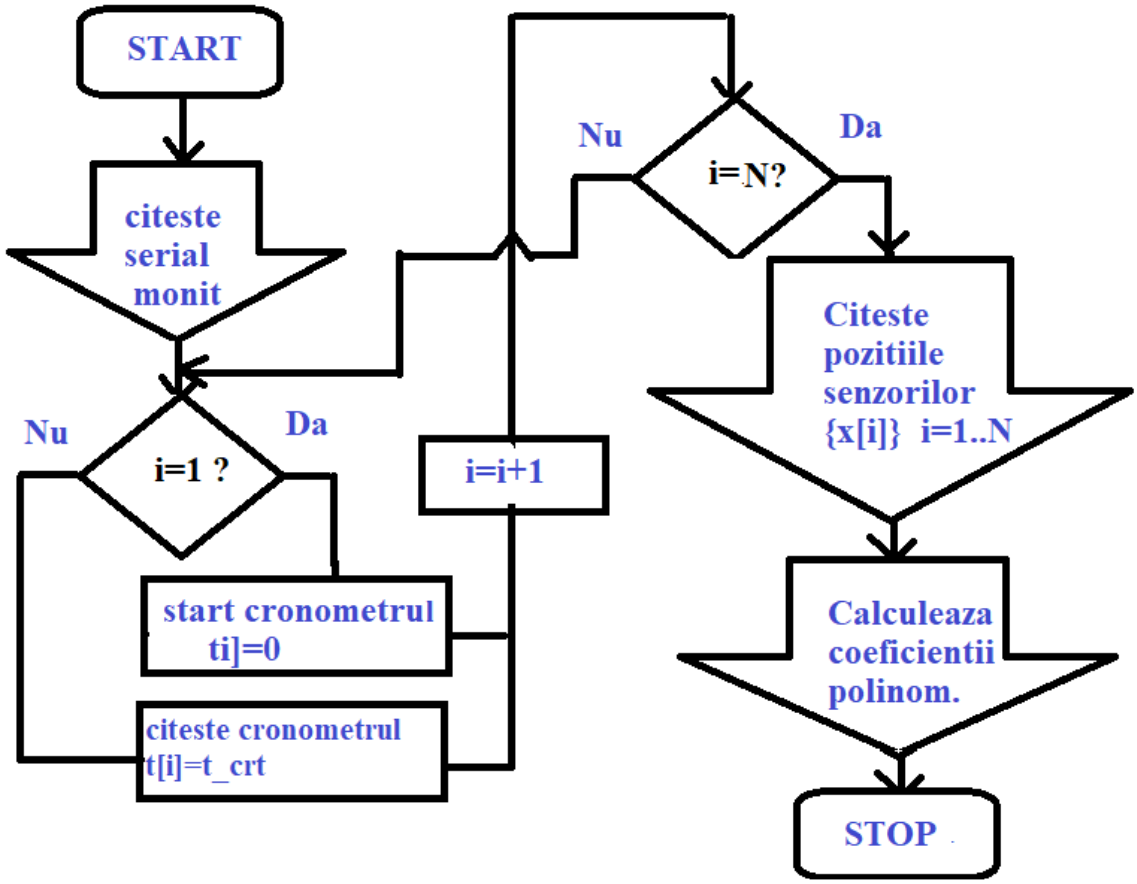


Fig. 1.10 – Schema logică pentru interfața grafică

5.f. Prezentarea interfeței grafice utilizate şi a modului de operare

In figura de mai jos, este prezentată schematic interfața grafică a programului utilizat. Interfața cuprinde 4 panouri şi este structurată după cum urmează (Fig. 1.11):

In panoul din dreapta (panou de culoare bleu) sunt incluse controalele care permit introducerea pozițiile senzorilor. Practic vor fiutilizați un număr de maxim 7 senzori de

tip optocuplor ale căror poziții (in mm) se vor introduce în text box-urile dedicate. Selectarea acestor senzori şi includerea in procedura de măsurare se va putea face prin selectarea check-box-urilor aferente. Ferestrele de tip text box aferente etichetelor de culoare neagră care prezintă textul *time(s)* vor fi folosite pentru afișarea timpului măsurat de cronometrul (timer1) inclus în interfață. Acest interval de timp este măsurat în raport cu momentul deschiderii primului senzor selectat (Fig. 1.12).

In partea stângă este un panou al mărimilor fizice care sunt necesare pentru inutilizarea programului. In cazul în care nu sunt introduse mărimi diferite, programul are mărimi fizice introduse *default* (Fig. 1.13).

In partea centrală superioară este prezentată schema grafică a mecanismului mecanic considerat cu tot sistemul de forţe aferent corpului care se deplasează.

In partea centrală inferioară sunt prezentate butoanele de comandă a procedurilor de cuplare a interfeței cu placa de achiziție Arduino (Fig. 1.15):

Etapele necesare utilizării interfeței sunt următoarele:

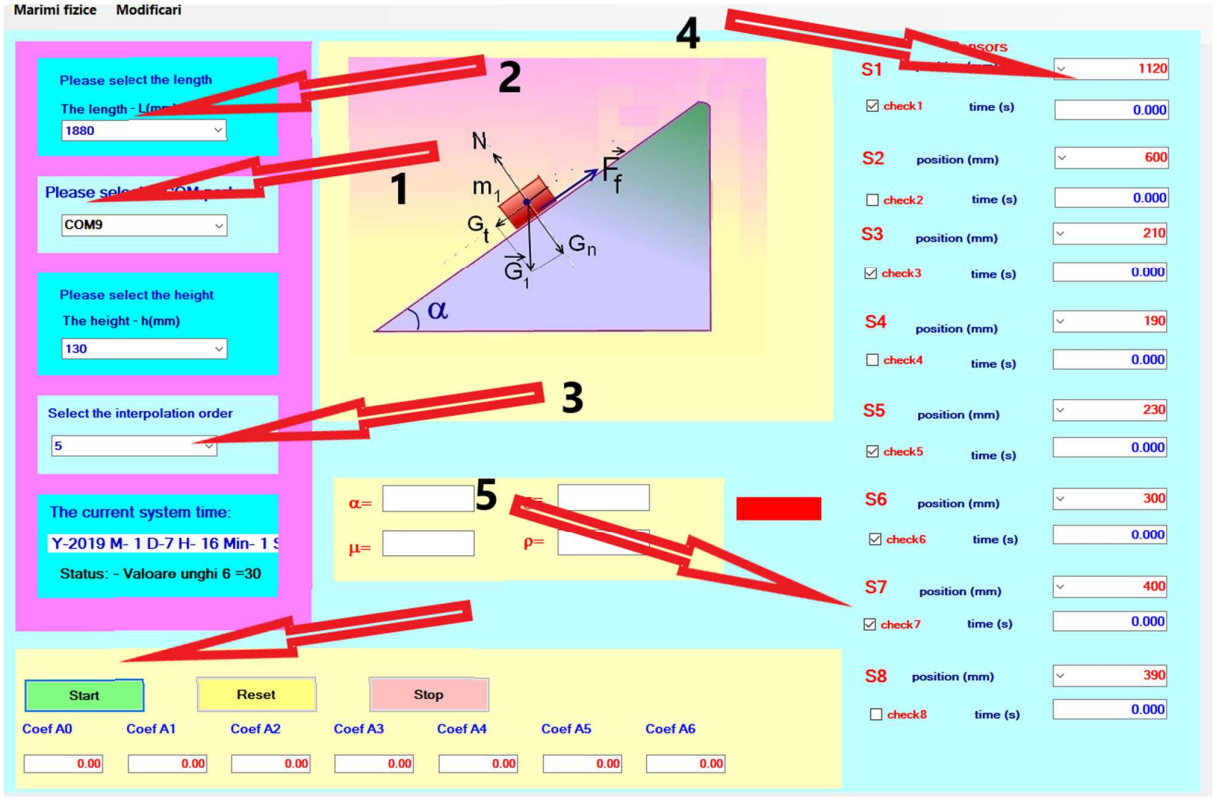


Fig. 1.11 – Interfața grafică

1) Se pornește aplicația dedicată lucrării utilizând iconița de pe desktop. Din meniul Modificări se alege modul în care va fi operat programul. In cazul de faţă se va alege – modul 1 - *Mișcarea rectilinie uniform variată.*
2) Se folosește controlul 1 din figura 1.11 pentru a selecta portul COM de comunicare cu placa de achiziție ARDUINO.
3) Se folosește controlul 2 din figura 1.11 care este o listă de tip Combo Box pentru a selecta lungimea planului inclinat utilizat.
4) Se folosește controlul 3 din figura 1.11 care este o listă de tip Combo Box pentru a selecta înălțimea planului inclinat utilizat.
5) Se folosesc controalele 4 şi 5 din figura 1.11 pentru a introduce pozițiile senzorilor de-a

lungul planului înclinat (controalele de tip 4) şi pentru a specifica dacă vor fi utilizate în procesul de calcul (se vor bifa controalele nr. 5)

Se folosește controlul 6 din figura 1.11 pentru a arma sistemul şi pentru a-l pregăti de măsurare. Butonul Stop este pentru a-l dezarma, iar butonul Resit este pentru a reinițializa variabilele.

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L01

Lucrarea 2

VERIFICAREA LEGII MIŞCĂRII UNIFORM ACCELERATE PENTRU UN SISTEM DE CORPURI

1. Considerații teoretice

Un corp cu masa m, supus acțiunii unei forţe constante $\vec{F}_0$, se va deplasa cu accelerația

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_0}{m} \tag{2.1}$$

Această relație se poate scrie sub forma

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}_0}{m} \tag{2.2}$$

din care rezultă legea vitezei, $\vec{v} = \vec{v}(t)$

$$\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt = \int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}_0}{m}\,dt = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t \tag{2.3}$$

unde $\vec{v}_0$ reprezintă viteza corpului la momentul inițial t_0

Din relația de definiție a vitezei

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.4}$$

se poate scrie

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \tag{2.5}$$

din care obținem legea de mișcare a corpului

$$\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt = \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t)dt = \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0))dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\Delta t + \frac{\vec{a}}{2}\Delta t^2 \tag{2.6}$$

unde $\vec{r}_0$ reprezintă poziția corpului la momentul inițial t_0.

Considerăm cazul unui sistem de două corpuri legate printr-un fir inextensibil (Fig.2.2.a).

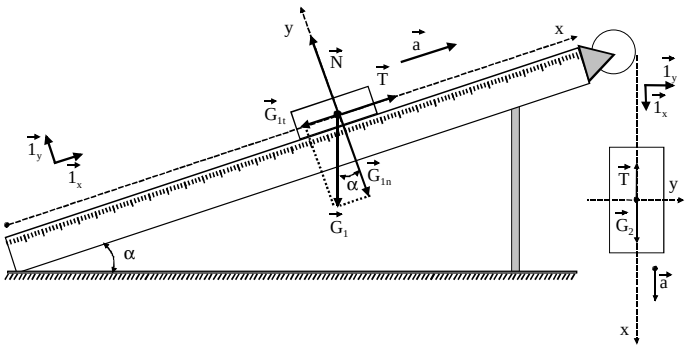


Fig. 2.1

Corpul de masă m_1 se poate afla pe un plan înclinat de unghi α, iar corpul de masă m_2 este suspendat de fir. Se poate calcula accelerația sistemului cu care cele două corpuri se pot deplasa.

Pentru corpul de masă m_1 ecuațiile forțelor pe cele două axe Ox și Oy (Fig. 2.2.b) sunt:

Pe axa Ox:

$$\vec{G}_t + \vec{T} = m_1\vec{a} \qquad (2.7)$$

unde $\vec{G}_t$ - componenta tangențială a greutății $\vec{G}_1$ având modulul

$$G_t = G_1 \sin(\alpha) \qquad (2.8)$$

și

$$\vec{G}_t = -G_t\vec{1}_x \qquad (2.9)$$

($\vec{1}_x$ - versorul axei Ox). În mod analog

$$\vec{T} = T\vec{1}_x \qquad (2.10)$$

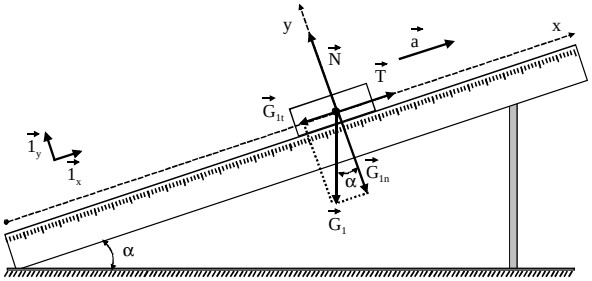


Fig. 2.2.a

iar

$$\vec{a} = a\vec{1}_x$$

Ecuația obținută în lungul axei Ox este

$$-G_1 \sin\alpha\vec{1}_x + T\vec{1}_x = m_1 a\vec{1}_x$$

sau, echivalent,

$$T - G_1 \sin\alpha = m_1 a \qquad (2.11)$$

Pe axa Oy:

$$\vec{G}_n + \vec{N} = 0 \qquad (2.12)$$

unde $\vec{G}_n$ - componenta normală a greutății $\vec{G}_1$, având modulul

- $G_{1n} = G_1 \cos\alpha$ (2.13)
- $\vec{G}_{1n} = -G_{1n}\vec{1}_y$ ($\vec{1}_y$-versorul axei Oy) (2.14)

Ceea ce determină expresia

- $-G_{1n}\vec{1}_y + N\vec{1}_y = 0$ sau, echivalent, $N = G_{1n}$

În mod analog, pentru cel de-al doilea corp se poate scrie o relație între tensiunea din fir $\vec{T}$ și greutatea $\vec{G}_2$ a corpului (Fig. 2.2.c)

$$\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a} \qquad (2.15)$$

unde $\vec{G}_2$ reprezintă greutatea corpului de masă m_2:

$$\vec{G}_2 = G_2\vec{1}_x$$

$$G_2 = m_2 g \qquad (2.16)$$

$$\vec{G}_2 = G_2\vec{1}_x \quad (\vec{1}_x\text{-versorul axei Ox}) \qquad (2.17)$$

și

$$\vec{T} = -T\vec{1}_x \qquad (2.18)$$

iar

$$\vec{a} = a\vec{1}_x \qquad (2.19)$$

Înlocuind în relația (2.15), se obține

$$-T\vec{1}_x + G_2\vec{1}_x = m_2 a\vec{1}_x$$

sau, echivalent,

$$G_2 - T = m_2 a \qquad (2.20)$$

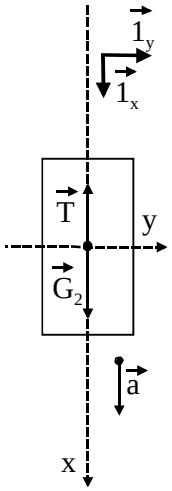


Fig. 2.2.b

Relațiile obținute (2.11) și (2.20) pot fi scrise sub forma unui sistem liniar:

$$\begin{cases} T - G_{1t} = m_1 a \\ G_2 - T = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T - G_1 \sin\alpha = m_1 a \\ G_2 - T = m_2 a \end{cases} \quad (2.21)$$

Din acest sistem rezultă mărimea acceleraţiei imprimate corpurilor (momentul de inerţie a scripetelui şi masa firului sunt neglijate)

$$a = \frac{G_2 - G_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} = g\frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha)}{m_1 + m_2} \quad (2.22)$$

In cazul în care se ia în considerare prezenţa forţelor de frecare la alunecare, atunci ecuaţia (2.7) se poate scrie sub forma

$$\vec{G}_t + \vec{T} + \vec{F}_f = m_1 \vec{a} \quad (2.7a)$$

Unde

$$\vec{F}_f = -F_f \vec{1}_x \quad (2.9a)$$

In acest mod, ecuaţia obţinută în lungul axei Ox este:

$$-G_1 \sin\alpha \vec{1}_x + T\vec{1}_x - F_f \vec{1}_x = m_1 a \vec{1}_x$$

sau, echivalent,

$$T - G_1 \sin\alpha - F_f = m_1 a \quad (2.11a)$$

Ţinând cont de legea lui Coulomb care exprimă relaţia de legătură dintre mărimea forţei de frecare la alunecare $\vec{F}_f$ şi mărimea forţei de apăsare normală $\vec{N}$

$$F_f = \mu N$$

Rezultă, ţinând cont de expresia

$$N = G_{1n} = G_1 \cos\alpha$$

Expresia finala a acceleraţiei sistemului mecanic

$$a = \frac{G_2 - G_1 \sin\alpha - F_f}{m_1 + m_2} = \frac{G_2 - G_1 \sin\alpha - \mu G_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2} = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} \quad (2.22a)$$

In cazul în care se ia în considerare prezenţa forţelor de frecare la alunecare şi momentul de inerţie a scripetelui, atunci, ecuaţia (2.7) se poate scrie sub forma

$$\vec{G}_t + \vec{T}_1 + \vec{F}_f = m_1 \vec{a} \quad (2.7b)$$

Unde

$$\vec{F}_f = -F_f \vec{1}_x \quad (2.9b)$$

In acest mod, ecuaţia obţinută în lungul axei Ox este:

$$-G_1 \sin\alpha \vec{1}_x + T_1 \vec{1}_x - F_f \vec{1}_x = m_1 a \vec{1}_x$$

sau, echivalent,

$$T_1 - G_1 \sin\alpha - F_f = m_1 a \quad (2.11b)$$

Pe de altă parte, pentru cel de-al doilea corp, se poate scrie o relaţie între tensiunea din fir $\vec{T}_2$ şi greutatea $\vec{G}_2$ a corpului (Fig. 2.2.c)

$$\vec{T}_2 + \vec{G}_2 = m_2 \vec{a} \quad (2.15b)$$

Înlocuind expresiile analitice, în relaţia (2.15b), se obţine

$$-T_2 \vec{1}_x + G_2 \vec{1}_x = m_2 a \vec{1}_x$$

sau, echivalent,

$$G_2 - T_2 = m_2 a \quad (2.20b)$$

Ţinând cont de legea de compunere a momentelor forţelor care acţionează asupra scripetelui şi care exprimă relaţia de legătură dintre mărimea momentului de inerţie $\hat{I}$ şi mărimea acceleraţiei liniare de deplasare $\vec{a}$, respectiv a acceleraţiei unghiulare $\vec{\varepsilon}$.

$$\vec{M}_{rez} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \hat{I}\vec{\varepsilon} = \hat{I}\frac{\vec{a}}{R}$$

Unde R este raza discului scripetelui. In mod echivalent, considerând o scriere analitică folosind versori acceptabil aleși, expresia de mai sus poate fi adusă la forma

$$\vec{M}_{rez} = -T_1R + T_2R = I\frac{a}{R}$$

De unde rezultă expresia

$$T_2 - T_1 = I\frac{a}{R^2}$$

Expresia finală a acceleraţiei sistemului mecanic

$$a = \frac{G_2 - G_1\sin\alpha - F_f}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = \frac{G_2 - G_1\sin\alpha - \mu G_1\cos\alpha}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = g\frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_{echivalent}} \qquad (2.22a)$$

Cunoscând masele m_1 și m_2 și unghiul α, se poate calcula acceleraţia teoretică în ipoteza neglijării forţelor de frecare și astfel se poate verifica legea vitezei pentru mișcarea rectilinie uniform variată:

$$v = v_o + at \qquad (2.23a)$$

respectiv legea mișcării rectilinii uniform variate

$$x = x_0 + v_o t + \frac{a}{2}t^2 \qquad (2.23b)$$

Din valorile măsurate, se poate face și o estimare a valorii acceleraţiei gravitaţionale - g. Efectuând un set de măsurători de minim 24 înregistrări, se va putea evalua mărimea coeficientului de frecare folosind expresia (2.22a).

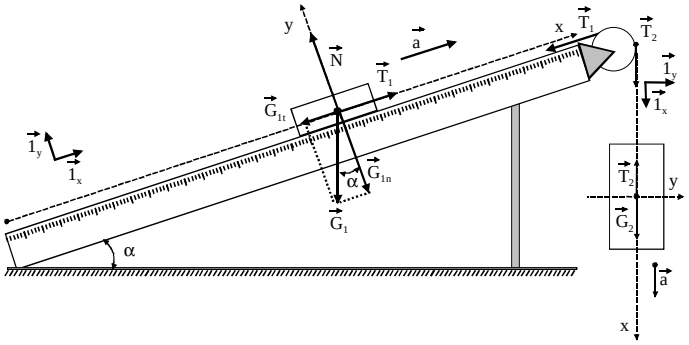


Fig. 2.2.c

2. Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental este prezentat în figura 2.3. Este alcătuit dintr-o instalaţie cu pernă de aer (1) care poate fi înclinată, un cronometru electronic (6) cu două porţi (fotocelula START (4) și respectiv fotocelula STOP (3)) și cele două corpuri (2) și (7) a căror masă este înscrisă pe ele. De la cronometru sunt legate cele două sonde care sunt cuplate la interfaţa ARDUINO care este conectat la computer.

3. Modul de lucru

a) Se alege o înclinare convenabilă a dispozitivului pernei de aer și se notează înălţimea h.
b) Se poziţionează cele două porţi ale cronometrului și se notează coordonatele x_{start} și x_{stop} pentru fotocelula START și respectiv STOP.
c) Se așază corpul de masă m_1 pe planul înclinat și se notează poziţia sa x_1.

d) Se lasă sistemul liber, corpul de masa m_1 având viteza nulă, se citește intervalul de timp Δt măsurat de cronometrul electronic.

e) Se calculează unghiul de înclinare a planului, cunoscând lungimea planului inclinat - $L = 1{,}830 m$

$$\sin\alpha = \frac{h}{L}$$

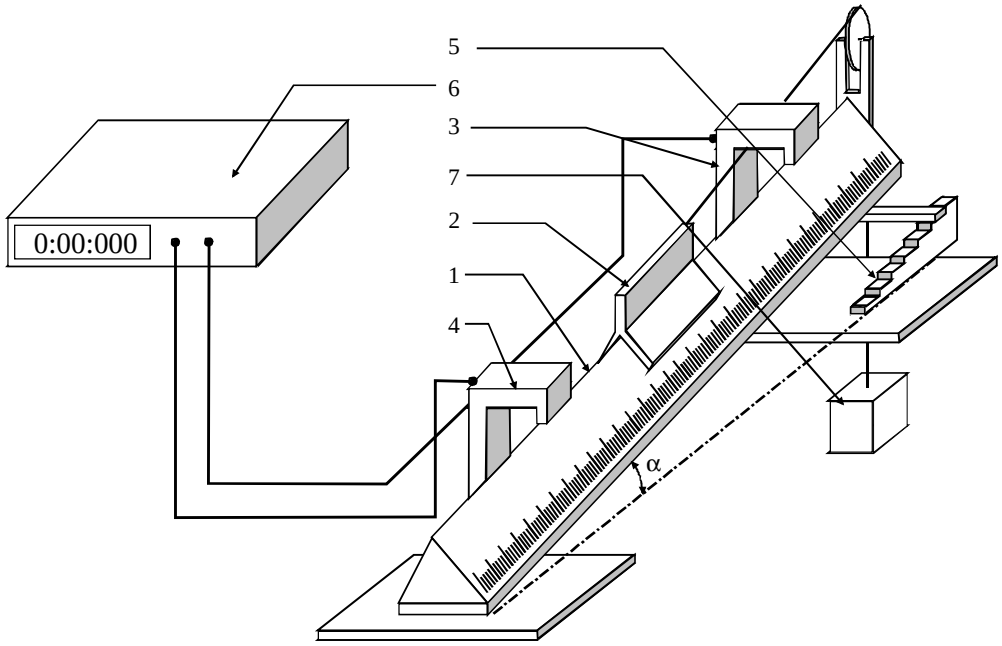


Fig. 2.3

Cunoscând coordonatele celor două fotocelule și poziția inițială a corpului se calculează distanțele

$$d_1 = x_{start} - x_1$$

$$d_2 = x_{stop} - x_1$$

și accelerația corespunzătoare intervalului de timp Δt măsurat

$$a_{\exp} = \left[\frac{\sqrt{2d_2} - \sqrt{2d_1}}{\Delta t}\right]^2 \qquad (2.24)$$

Se compară cu accelerația determinată pe baza relației (2.22)

$$a_{teor} = \frac{G_1 \sin\alpha - G_2}{m_1 + m_2} = g\frac{\left(m_1 \sin\alpha - m_2\right)}{m_1 + m_2}$$

f) Datele măsurate și calculate se trec într-un tabel de forma:

Nr. crt.	x_1 (m)	x_{start} (m)	x_{stop} (m)	Δt (s)	d_1 (m)	d_2 (m)	a_{exp} (m/s^2)	m_1 (kg)	m_2 (kg)	h (m)	a_{teor} (m/s^2)
1.											
2.											
3.											
4.											
5.											
6.											
7.											
8.											

9.											
10.											
11.											

g) Se modifică masa corpului 2 cu ajutorul unor magneți adiționali și se reiau operațiunile de la punctele a) - e).
h) Se trasează graficul

$$d = d(\Delta t)$$

unde $d = d_2 - d_1$, se determină parametrii acestui grafic folosind metoda celor mai mici pătrate [1] şi se compară valoarea obținută pentru accelerație cu cea determinată pe baza relației (2.23).
i) Se calculează valoarea medie a accelerației evaluate şi se evaluează eroarea relativă.

4. Modelarea numerică

Modelarea numerică a mișcării uniform variate a sistemului mecanic descris se poate realiza considerând o tabelă de calcul Excel în care se vor introduce mărimile fizice care descriu sistemul fizic şi respectiv mărimile cinematice care descriu starea la un moment dat de timp a sistemului mecanic. In acest sens, pentru a descrie numeric evoluția stării de mișcare a sistemului – poziția şi viteza corpurilor la un anumit moment de timp, sunt necesare precizarea următoarelor mărimi fizice: masa corpului m_1, masa corpului m_2, lungimea planului inclinat L, înălțimea față de orizontală a planului inclinat h, poziția inițială a primului corp pe planul inclinat x_1, poziția porții START a cronometrului x_{start} şi respectiv poziția porții STOP a cronometrului x_{stop}.

In acest sens, tabelul foii de calcul va putea fi organizat în felul următor (Fig. 2.4.a si Fig. 2.4.b):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Δt(s)	t (s)	L (mm)	h(mm)	sin (α)	m_1 (kg)	m_2(kg)	g (m/s^2)	a $_{teoretic}$ (m/s^2)	x1 (m)
0.01	0	1830	110	0.06011	0.34	0.044	9.8066	0.601748338	1.1
0.01	0.01	1830	110	0.06011	0.34	0.044	9.8066	0.601748338	1.1
0.01	0.02	1830	110	0.06011	0.34	0.044	9.8066	0.601748338	1.1

Fig. 2.4.a – Setul de parametrii care descriu sistemul mecanic pentru simulare numerică

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
v $_1$(m/s)	**X crt (m)**	**v crt(m/s)**	X start(m)	X stop (m)	vf (m/s)	d (m)	x $_{fin}$ (m)	Δt_1(s)	Δt_2(s)
0	**1.1**	**0**	1.4	1.85	0.00602	0.00003	1.10003	0.99855	1.57884
0	**1.10003**	**0.00602**	1.4	1.85	0.01203	0.00009	1.10012	0.99855	1.57884

Fig. 2.4.b – Setul de parametrii care descriu evoluția sistemului mecanic pentru simulare numerică

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare:

Nr. crt.	Coloana	Variabila	Descriere	Mod de utilizare
1.	A.	$\Delta t(s)$	Specifică intervalul de timp dintre doua stări succesive.	Se introduce în căsuța A2 o valoare numerică (de exemplu 0.01 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă) =A2 ┘

2.	B.	$t(s)$	Reprezintă timpul curent, i.e. ordonează stările sistemului $t_k = t_{k-1} + \Delta t$	La fiecare pas, se face incrementarea cu intervalul de timp introdus în coloana A B3=B2+A2 ↵
3.	C.	$L(mm)$	Lungimea planului inclinat. Valoarea considerată este de 1840 mm – lungimea totală a planului înclinat.	Se introduce în căsuța C2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =C2 ↵
4.	D.	$h(mm)$	Înălțimea planului inclinat exprimată în mm. Planul înclinat poate prezenta înălțimi cuprinse între 0 mm si 150 mm.	Se introduce în căsuța D2 valoarea numerică corespunzătoare (de exemplu 110 mm) şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =C2 ↵
5.	E.	$\sin(\alpha)$	Reprezintă valoarea funcției sinus aferentă unghiului e inclinare α.	Se calculează prin raportul dintre valoarea introdusă în căsuța D2 şi cea înregistrată in căsuța C2. Relația se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =D2/C2 ↵
6.	F.	$m_1(kg)$	Reprezintă valoarea masei corpului de pe planul înclinat.	Se introduce în căsuța F2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =F2 ↵
7.	G.	$m_2(kg)$	Reprezintă valoarea masei corpului suspendat.	Se introduce în căsuța G2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =G2 ↵
8.	H.	$g(m/s^2)$	Reprezintă valoarea accelerației gravitaționale. Se consideră egală cu 9.8066m/s^2.	Se introduce în căsuța H2 valoarea numerică şi se copiază în toatà coloana valoarea introdusă): =H2 ↵
9.	I.	$a_{teor}(m/s^2)$	Reprezintă valoarea accelerației teoretice calculate cu ajutorul relației (2.22).	Se introduce în căsuța I2 relația de calcul pentru accelerația teoretică: =(G2-F2*E2)/(F2+G2) ↵
10.	J.	$x_1(m)$	Reprezintă poziția din care va fi lăsat liber corpul de masă m_1. Aceasta poziție nu se va modifica în timpul experimentului.	Se introduce în căsuța J2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =J2 ↵
11.	K.	$v_1(m/s)$	Reprezintă valoarea vitezei inițiale pentru corpul de masă m_1 lăsat liber. Această valoare va fi considerată a fi nulă.	Se introduce în căsuța K2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =K2 ↵

12.	L.	$x_{crt}(m)$	Reprezintă poziția *curentă* pe care o va avea corpul de masa m_1. lăsat liber. Această poziție se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *primul parametru inițial al stării de mișcare.*	Se introduce în căsuța L2 valoarea numerică care corespunde valorii poziției inițiale J2, *dar la fiecare pas va fi actualizată.*
13.	M.	$v_{crt}(m/s)$	Reprezintă viteza *curent*ă pe care o va avea corpul de masa m_1. lăsat liber. Această viteză se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *cel de al doilea parametru inițial al stării de mișcare.*	Se introduce în căsuța M2 valoarea care corespunde valorii vitezei inițiale K2, *dar la fiecare pas va fi actualizată.*
14.	N.	$x_{Start}(m)$	Reprezintă poziția porții START. Această poziție nu se va modifica în timpul experimentului.	Se introduce în căsuța N2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =N2 ┘
15.	O.	$x_{Stop}(m)$	Reprezintă poziția porții STOP. Această poziție nu se va modifica în timpul experimentului.	Se introduce în căsuța O2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =O2 ┘
16.	P.	$v_f(m/s)$	Reprezintă viteza *final*ă pe care o va avea corpul de masa m_1. lăsat liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această viteză se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *cel de al doilea parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța P2 formula de calcul pentru viteza finală aferentă intervalului de timp Δt din iterația curentă: $v_f = v_{crt} + a\Delta t$ care corespunde valorii vitezei finale =M2+I2*A2 ┘
17.	Q.	$d(m)$	Reprezintă distanța parcursă în intervalul de timp Δt *din iterația curentă,* Această distanță se va actualiza la fiecare pas.	Se introduce în căsuța Q2 formula de calcul a distanței parcurse în intervalul de timp Δt *din iterația curentă,*: $d = \frac{(v_f + v_{crt})}{2}\Delta t$ (2.25) care corespunde valorii vitezei medii pe acest interval =(P2+K2)/2*A2 ┘

18.	R.	$x_f(m)$	Reprezintă poziția *finală* pe care o va avea corpul de masă m_1. lăsat liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această poziție se va actualiza la fiecare pas și va reprezenta *primul parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța R2 formula de calcul pentru poziția *finală* pe care o va avea corpul de masa m_1 *din iterația curentă*,: $x_f = x_{crt} + d$ (2.26) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =L2+Q2 ┘
19.	S.	$\Delta t_1(s)$	Reprezintă intervalul de timp calculat, necesar corpului de masă m_1 lăsat liber din dreptul poziției inițiale x_1 pentru a ajunge în dreptul poziției x_{Start} a porții START.	Se introduce în căsuța S2 formula de calcul pentru intervalul de timp necesar corpului de masa m_1 lăsat liber *pentru a străbate distanța*: $d_1 = x_{Start} - x_1$ Folosind expresia $\Delta t_1 = \sqrt{2d_1 / a_{teoretic}}$ (2.27) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =sqrt(2*(N2-J2)/I2) ┘
20.	T.	$\Delta t_2(s)$	Reprezintă intervalul de timp calculat, necesar corpului de masa m_1 lăsat liber din dreptul poziției inițiale x_1 pentru a ajunge în dreptul poziției x_{Start} a porții START	Se introduce în căsuța S2 formula de calcul pentru intervalul de timp necesar corpului de masă m_1 lăsat liber *pentru a străbate distanța*: $d_1 = x_{Start} - x_1$ (2.28) Folosind expresia $\Delta t_1 = \sqrt{2d_1 / a_{teoretic}}$ (2.29) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =sqrt(2*(N2-J2)/I2) ┘

Observație: pentru fiecare iterație in parte, parametrii finali x_f și respectiv v_f reprezintă parametrii inițiali x_{crt} respectiv v_{crt} pentru următoarea iterație. Acest fapt implică necesitatea ca la fiecare iterație trebuie adăugate următoarele relații de transfer:

L3=R2 ┘ respectiv M3=P2 ┘

Și apoi aceste relații pot fi copiate în toată foaia de calcul.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Δt(s)	t (s)	L (mm)	h(mm)	sin (α)	m_1 (kg)	m_2(kg)	g (m/s^2)	a $_{teoretic}$ (m/s^2)	x1 (m)
0.01	0.99	1830	110	0.06011	0.34	0.044	9.8066	0.601748338	1.1
0.01	1	1830	110	0.06011	0.34	0.044	9.8066	0.601748338	1.1
0.01	1.57	1830	110	0.06011	0.34	0.044	9.8066	0.601748338	1.1
0.01	1.58	1830	110	0.06011	0.34	0.044	9.8066	0.601748338	1.1

Fig. 2.5.a – Setul de parametrii care descriu sistemul mecanic pentru comparația între simularea numerică şi valorile exacte obținute pentru configurația dată

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
v_1(m/s)	X crt (m)	v crt(m/s)	X start(m)	X stop (m)	vf (m/s)	d (m)	x_{fin} (m)	Δt_1(s)	Δt_2(s)
0	1.39489	0.59573	1.4	1.85	0.60175	0.00599	1.40087	0.99855	1.57884
0	1.40087	0.60175	1.4	1.85	0.60777	0.00605	1.40692	0.99855	1.57884
0	1.84162	0.94474	1.4	1.85	0.95076	0.00948	1.85110	0.99855	1.57884
0	1.85110	0.95076	1.4	1.85	0.95678	0.00954	1.86064	0.99855	1.57884

Fig. 2.5.b – Setul de parametrii care descriu sistemul mecanic pentru comparația între simularea numerică şi valorile exacte obținute pentru configurația dată

La final se compară rezultatele obținute numeric, pe baza integrațiilor efectuate pas cu pas cu cele determinate analitic, folosind relațiile (2.28) si (2.29), şi se evaluează precizia rezultată.

5. Identificare sistem

Procesul de identificare a sistemului mecanic are ca scop determinarea constantelor ce permit descrierea legii de mișcare. In acest scop, pentru a putea obține legea de mișcare si pentru a putea face o comparație cu legea mișcării rectilinii uniform variate (1.23b), se va utiliza o interfață digitala şi un set de senzori corespunzători.

5.a Senzorii utilizații

Senzorii utilizați sunt de tip *senzor fotoelectric de infraroșu în miniatură în formă de U* de tip Opto Interrupter ITR9608-F (Referință 0104110000003348). Senzorul fotoelectric în formă de U are două componente: led-ul ce emite infraroșu și fototranzistorul (Fig. 1.6.a). Distanța dintre cele două brațe este de 10 mm.

Senzorul are rolul de a detecta dacă un obiect se află între cele două brațe ale sale și oprește transferul de radiație *infraroșie (IR)*. Modul de funcționare a modulului este simplu, returnează LOW atunci când nu se află niciun obiect între cele doua brațe sau HIGH, în caz contrar. Modulul conține un comparator LM393 și, astfel, se obține un output digital (Fig. 1.6.a).

Caracteristicile tehnice ale senzorului fotoelectric de infraroșu în miniatură în formă de U:

- Cădere de tensiune led: 1.2 V;
- Curent led: 50 mA (max);
- Tensiune colector - emitor fototranzistor: 30 V;
- Curent fototranzistor: 20 mA.

La adresa www.phys.ugal.ro/LaboratorMIS/Lucrare1, se poate descarcă foaia cu datele tehnice (datasheet - ITR9608-F.pdf). Schema este identică cu cea din cadrul lucrării anterioare.

5.c Interfața grafica utilizată

Interfața grafica a programului utilizat este realizată în mediul de programare Visual Studio C#. Rolurile interfeței grafice sunt următoarele:

- a) *preia datele de pe magistrala serială (Serial Monitor) de la placa de achiziție Arduino –i.e. memorează momentele de timp la care sunt activați senzorii*, pornind cronometrul de la momentul citirii primului senzor.

b) *preia pozițiile curente ale senzorilor cuplați la dispozitivul experimental*. Aceste date sunt introduse de utilizator prin intermediul interfeței date.

c) *se rulează un modul de calcul pentru identificarea constantelor expresiei polinomiale de interpolare* de forma

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \quad (1.30)$$

şi se compară cu expresia legii mișcării rectilinii uniform variate

$$x = x_0 + v_o t + \frac{a}{2} t^2$$

respectiv cu expresiile date de evaluările numerice. Modulul de calcul pentru calculul coeficienților expresiei polinomiale de interpolare va fi bazat pe utilizarea metodei celor mai mici pătrate (vezi Anexa 1).
Schema logică a programului este identică cu cea din cadrul lucrării anterioare.

5.d Prezentarea interfeței grafice utilizate şi a modului de operare

In figura de mai jos este prezentata schematic interfața grafica a programului utilizat. In panoul din dreapta sunt butoanele care introduc pozițiile senzorilor.

In partea stângă sunt prezentate butoanele de comandă a procedurilor de cuplare a interfeței cu placa de achiziție Arduino, butonul de comandă a rulării modulului de calcul şi respectiv de reprezentare grafică.

In figura de mai jos este prezentată schematic interfața grafică a programului utilizat. Interfața cuprinde 4 panouri şi este structurată după cum urmează (Fig. 2.10):

In panoul din dreapta (panou de culoare bleu), sunt incluse controalele care permit introducerea pozițiile senzorilor. Practic vor fi utilizați un număr de maxim 7 senzori de tip optocuplor ale căror poziții (in mm) se vor introduce în text box-urile dedicate. Selectarea acestor senzori şi includerea in procedura de măsurare se vor putea face prin selectarea check-box-urilor aferente. Ferestrele de tip text box aferente etichetelor de culoare neagră care prezintă textul time (s) vor fi folosite pentru afișarea timpului măsurat de cronometrul (timer1) inclus în interfață. Acest interval de timp este măsurat în raport cu momentul deschiderii primului senzor selectat (Fig. 2.10).
In partea stângă, este un panou al mărimilor fizice care sunt necesare pentru inutilizarea programului. In cazul în care nu sunt introduse mărimi diferite, programul are mărimi fizice introduse default (Fig. 2.10).

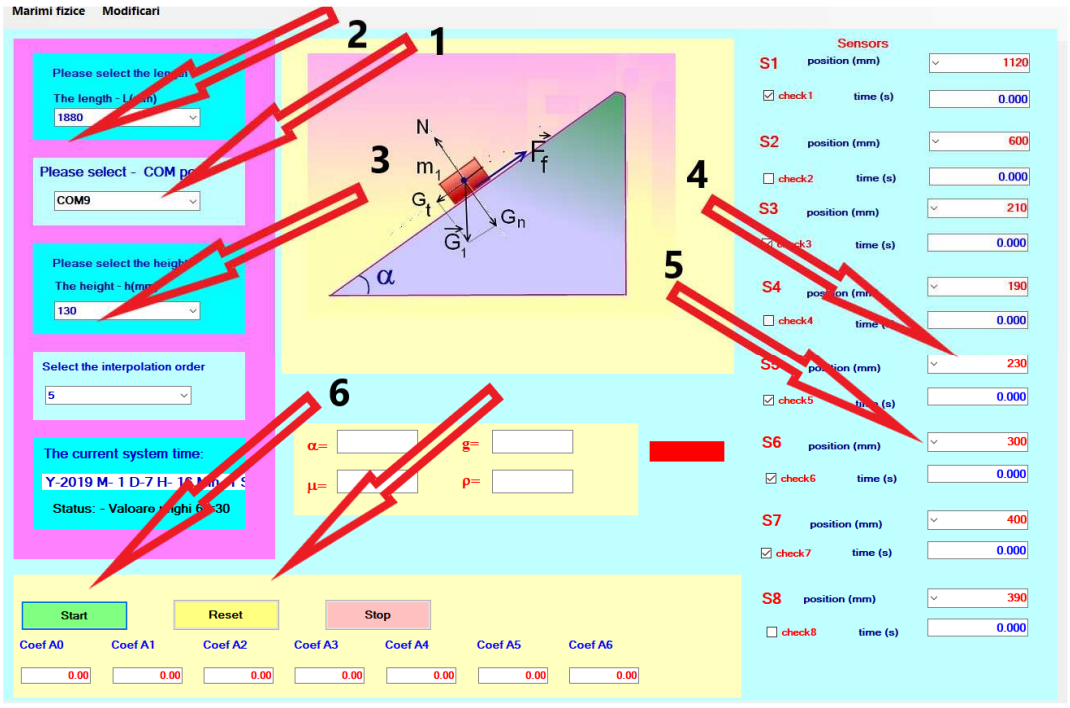


Fig. 2.10 – Interfața grafică

In partea centrală superioară este prezentată schema grafică a mecanismului mecanic considerat cu tot sistemul de forțe aferent corpului care se deplasează.
In partea centrală inferioară sunt prezentate butoanele de comandă a procedurilor de cuplare a interfeței cu placa de achiziție Arduino (Fig. 2.10):
Etapele necesare utilizării interfeței sunt următoarele:
1) Se pornește aplicația dedicată lucrării utilizând iconița de pe desktop.
2) Se folosește controlul 1 din figura 2.10 pentru a selecta portul COM de comunicare cu placa de achiziție ARDUINO.
3) Se folosește controlul 2 din figura 2.10 care este o listă de tip Combo Box pentru a selecta lungimea planului inclinat utilizat.
4) Se folosește controlul 3 din figura 2.10 care este o listă de tip Combo Box pentru a selecta înălțimea planului inclinat utilizat.
5) Se folosesc controalele 4 şi 5 din figura 2.10 pentru a introduce pozițiile senzorilor de-a lungul planului înclinat (controalele de tip 4) şi pentru a specifica dacă vor fi utilizate în procesul de calcul (se vor bifa controalele nr. 5).
6) Se folosește controlul 6 din figura 2.10 pentru a arma sistemul şi pentru a-l pregăti de măsurare. Butonul Stop este pentru a-l dezarma, iar butonul Reset este pentru a reinițializa variabilele.
7) Pentru modificarea valorilor maselor de pe planul înclinat, se va utiliza meniul aferent interfeței (Fig. 2.11).

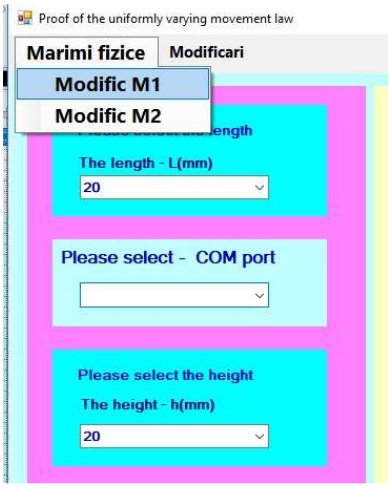


Fig. 2.11 – Meniul interfeței grafice

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L02

Lucrarea 3

VERIFICAREA LEGII DE MIŞCARE A CORPURILOR SUB ACŢIUNEA UNEI FORŢE DE REZISTENŢĂ, PROPORŢIONALĂ CU VITEZA

1. Considerații teoretice

Pentru un corp aflat sub acțiunea unei forte $\vec{F}(\vec{r},t)$, conform principiului al doilea al dinamicii, această forță va imprima corpului o accelerație

$$\vec{a}(\vec{r},t)=\frac{\vec{F}(\vec{r},t)}{m} \tag{3.1}$$

unde *m* este masa corpului.

În cazul unui sistem de mai multe forte, care acționează simultan asupra corpului dat, accelerația poate fi calculată înlocuind sistemul de forţe cu o rezultantă

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+...+\vec{F}_n \tag{3.2}$$

unde $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...\vec{F}_n$ reprezintă forțele componente.

Ținând cont că expresia de definiție a accelerației, se obține

$$\vec{a}(\vec{r},t)=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t}=\dot{\vec{\mathrm{v}}}. \tag{3.3}$$

Un caz întâlnit la mișcarea corpurilor în câmpuri de forţe constante în timp (de exemplu, în cazul câmpului gravitațional omogen) este acela când în timpul deplasării acționează și o forță de rezistență, care poate fi considerată, într-o primă aproximație, proporțională cu viteza:

$$\vec{F}_r=-k\vec{\mathrm{v}}$$

Semnul minus arată că vectorii $\vec{F}_r$ și $\vec{\mathrm{v}}$ sunt opuși ca orientare.

Notând cu $\vec{F}_0$ forța motoare considerată constantă, accelerația este

$$\vec{a}=\frac{\vec{R}}{m}=\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}_0+\vec{F}_r}{m}=\frac{\vec{F}_0-k\vec{\mathrm{v}}}{m}$$

Prin separarea variabilelor, vom putea afla ușor dependența de timp a vitezei corpului, în cazul unei mișcări rectilinii:

$$\frac{\mathrm{d}v}{k\mathrm{v}-F_0}=-\frac{1}{m}\mathrm{d}t \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}(k\mathrm{v}-F_0)}{k\mathrm{v}-F_0}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

de unde rezultă legea vitezei:

$$\mathrm{v}(t)=\frac{F_0}{k}-\xi e^{-\frac{k}{m}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}(t)=\frac{F_0}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \tag{3.5}$$

(ξ fiind o constantă de integrare care a fost inclusă în constanta *k*). S-a considerat că la momentul inițial t_0=0, viteza corpului este v_0=0.

Din legea vitezei (5), se poate deduce mai departe *legea de mișcare* a corpului considerat (funcția de timp care descrie poziția corpului în raport cu timpul). Prin integrare, (notând cu x_0 - coordonata corpului la momentul t_0=0), obținem:

$$\int \mathrm{d}x=\int_0^t \mathrm{v}\,\mathrm{d}t=\int_0^t \frac{F_0}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; x(t)=x_0+\frac{F_0}{k}t+\frac{F_0 m}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} \tag{3.6}$$

Pentru un corp ce pornește din originea sistemului de referință (x_0=0), legea de mișcare (6) devine:

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left(t-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) \tag{3.7}$$

Această relație permite punerea în evidentă a unei viteze maxime limită (pentru intervale de timp *t* suficient de mari),

$$v_{max} = \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \lim_{t\to\infty} \frac{F_0}{k}\left(1 - \frac{m}{kt} e^{-\frac{k}{m}t}\right) \approx \frac{F_0}{k} \tag{3.8}$$

Reprezentările grafice ale celor două legi (5) și (7) sunt date în figurile 3.1a și respectiv 3.1b.

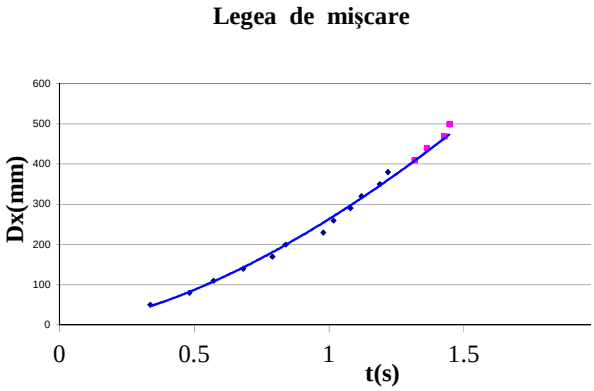


Fig. 3.1.a

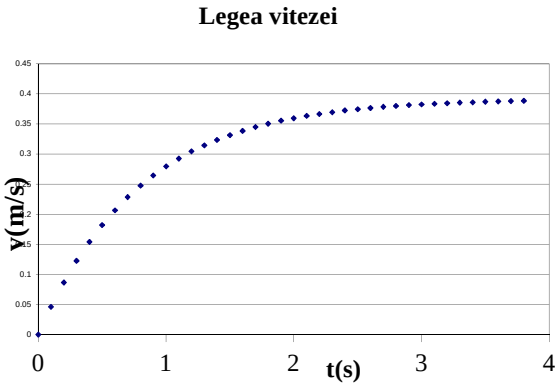


Fig. 3.1.b

În cele ce urmează, lucrarea urmărește să verifice legea de mișcare a unui corp supus unei forţe de rezistență proporțională cu viteza.

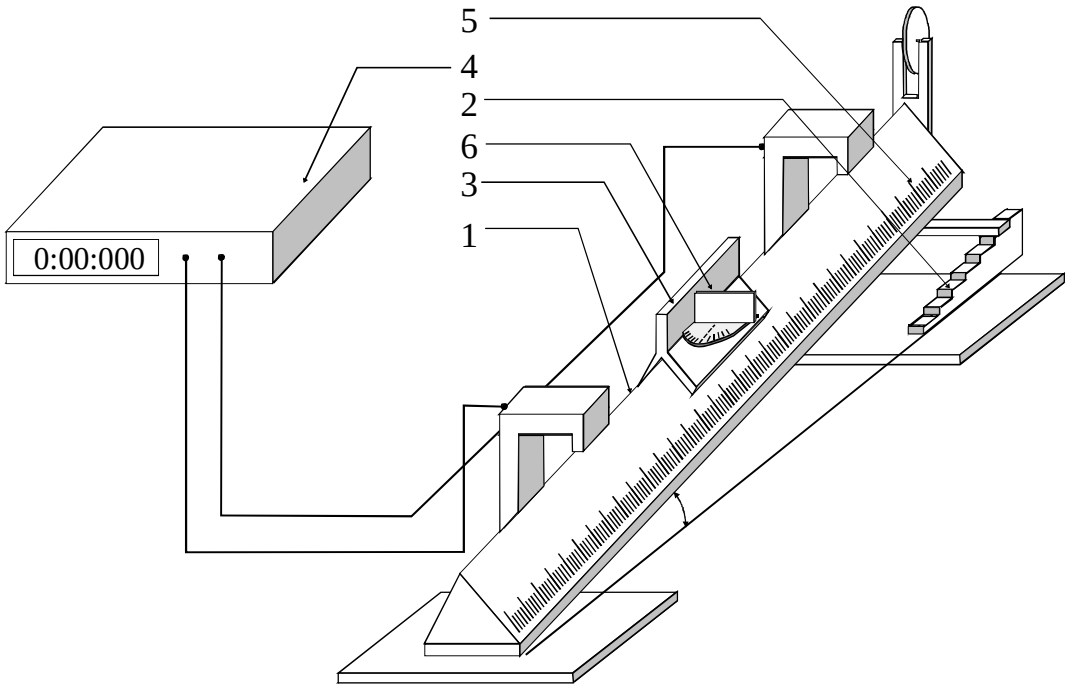


Fig. 3.2

2. Dispozitivul experimental

Instalația utilizată pentru determinarea accelerației gravitaționale este dată în figura 2. Perna de aer (1) poate fi înclinată sub diferite unghiuri α cu ajutorul dispozitivului de ridicare (2).

Mișcarea corpului (3) este cronometrată cu ajutorul cronometrului electronic (4). Pozițiile porților START și STOP pot fi citite cu ajutorul sectorului (5) gradat în milimetri. Panoul (6), atașat corpului, generează o forță de rezistență care depinde de viteză și care, într-o primă aproximație, poate fi considerată proporțională cu viteza corpului.

3. Modul de lucru

a) Se înclină perna de aer la un anumit unghi α și se notează masa *m* a corpului.
b) Se notează pozițiile x_1 și x_2 ale celor două porți ale cronometrului și se calculează distanta Δx dintre ele.
c) Se așază corpul pe dispozitivul pernei de aer, în dreptul porții START și se lasă liber, notându-se apoi timpul măsurat, corespunzător parcurgerii distanței dintre porți.
d) Se modifică poziția porții STOP depărtându-se cu 30 mm și se reia operația de la punctul c). Se fac minim 25 de determinări.
e) Datele măsurate se trec în tabelul următor:

Nr. crt.	x_1 (m)	x_2 (m)	Δx (m)	Δt (s)	Δh (mm)	sin α	F_0 (N)	V_{max} (m/s)
1.								
2.								
3.								
4.								
5.								
6.								
7.								
8.								
9.								
10.								
11.								
12.								
13.								
14.								
15.								
16.								
17.								
18.								
19.								

f) Se reprezintă grafic dependența distanței parcurse în funcție de timp și din panta asimptotei la grafic se determină raportul

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{F_0}{k} \Leftrightarrow k = \frac{F_0}{\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{mg\sin\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta} \qquad (3.9)$$

g) Se modifică unghiul de înclinare a planului și se repetă operațiile de la punctele b) -f). Se verifică relația de proporționalitate dintre *k* și suprafața efectivă a panoului, atașat corpului analizat.

Prelucrarea datelor și prezentarea modului de lucru se poate face cu ajutorul programului asociat.

4. Modelarea numerică

Modelarea numerica a mișcării unui corp supus la acțiunea unei forţe de rezistenţă

proporțională cu viteza se poate realiza considerând o tabela de calcul Excel în care se vor introduce mărimile fizice care descriu sistemul fizic şi respectiv mărimile cinematice care descriu starea la un moment dat de timp a sistemului mecanic. Pentru a descrie numeric evoluția stării de mișcare a sistemului – poziția şi viteza corpului la un anumit moment de timp, sunt necesare precizarea următoarelor mărimi fizice: masa corpului m, lungimea planului inclinat L, înălțimea față de orizontală a planului inclinat h, poziția inițială de la care pornește corpul pe planul inclinat x, poziția porții START a cronometrului x_{start} şi respectiv poziția porții STOP a cronometrului x_{stop}. De asemenea, trebuie precizată mărimea intervalului de timp (rezoluția temporală) dintre stările succesive ale sistemului.

In acest sens, tabelul foii de calcul va putea fi organizat în felul următor (Fig. 3.3.a si Fig. 3.3.b):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Nr.crt.	**L [mm]**	**h[mm]**	**sin(α)**	**m_1[kg]**	**G[N]**	**Gt [N]**	**X_{START} [mm]**	**X_{STOP} [mm]**	**d[m]**	**Dt[s]**
1	**1830**	**180**	**0.098**	**0.366**	**3.59046**	**0.35316**	**1160**	**1100**	**0.06**	**0.391**
2	**1830**	**180**	**0.098**	**0.366**	**3.59046**	**0.35316**	**1160**	**1070**	**0.09**	**0.508**

Fig. 3.3.a – Setul de parametrii care descriu sistemul mecanic pentru simulare numerică

L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
v_{limita} [m/s]	Fr_{lim} [N]	k [N/(m/s)]	X_{crt}[m]	v_{crt}[m/s]	Fr [N]	Rez [N]	a[m/s^2]	Δt [s]	v fin [m/s]	d [m]	x fin [m]	t[s]
0.7193	0.35316	0.49097734	1.16	0	0	0.35316	0.96492	0.005	0.00482459	0.00001	1.15999	0.000
0.7193	0.35316	0.49097734	1.15999	0.00482	0.00237	0.35079	0.95845	0.005	0.00961682	0.00004	1.15995	0.005

Fig. 3.3.b – Setul de parametrii care descriu evoluția sistemului mecanic pentru simulare numerică

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare:

Nr. crt.	Coloana	Variabila	Descriere	Mod de utilizare
	A.	Nr. crt		
1.	B.	$L(mm)$	Lungimea planului înclinat. Valoarea considerată este de 1840 mm – lungimea totală a planului inclinat	Se introduce în căsuța B2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =B2 ┘
2.	C.	$h(mm)$	Înălțimea planului înclinat exprimată în mm. Planul înclinat poate prezenta înălțimi cuprinse între 0 mm şi 150 mm.	Se introduce în căsuța C2 valoarea numerică corespunzătoare (de exemplu 110 mm) şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =C2 ┘
3.	D.	$\sin(\alpha)$	Reprezintă valoarea funcției sinus aferentă unghiului e inclinare α.	Se calculează prin raportul dintre valoarea introdusă în căsuța C2 şi cea înregistrată în căsuța B2. Relația se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =C2/B2 ┘

4.	E.	$m_1(kg)$	Reprezintă valoarea masei corpului de pe planul înclinat.	Se introduce în căsuța E2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =E2 ↵
5.	F.	$G(N)$	Reprezintă valoarea greutății corpului de pe planul înclinat.	Se introduce în căsuța F2 valoarea numerică folosind expresia =9.80*E2 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =F2 ↵
6.	G.	$G_t(N)$	Reprezintă valoarea greutății tangențiale a corpului de pe planul înclinat.	Se introduce în căsuța H2 valoarea numerică folosind expresia =D2*E2 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =G2 ↵
7.	H.	$x_{START}[mm]$	Reprezintă coordonata porții START şi de la care este lăsat liber corpul să se deplaseze pe planul înclinat.	Se introduce în căsuța H2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =H2 ↵
8.	I.	$x_{STOP}[mm]$	Reprezintă coordonata porții STOP şi până la care este cronometrată mișcarea corpului.	Se introduce în căsuța I2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =I2 ↵ Această coordonată se incrementează cu o valoare de minim 30 mm de la o măsurătoare la alta.
9.	J.	$d[m]$	Reprezintă distanţa dintre poarta START şi coordonata porții STOP între care este lăsat liber corpul să se deplaseze pe planul înclinat.	Se introduce în căsuța J2 valoarea numerică dată de expresia =I2-H2 ↵ şi se copiază relația în toată coloana.
10.	K.	$Dt[s]$	Reprezintă intervalul de timp necesar deplasării dintre poarta START şi coordonata porții STOP.	Aceasta reprezintă o valoare numerică experimentală măsurată cu sistemul de cronometrare.
11.	L.	$v_{limita}[m/s]$	Reprezintă panta tangentei la graficul distanţei parcurse de corp în funcție de intervalul de timp măsurat (Fig. 3.1).	Aceasta reprezintă o valoare numerică determinată cu ajutorul valorilor experimentale măsurate şi introduse îin foaia Excel (de obicei reprezintă panta determinată prin metoda celor mai mici pătrate pentru ultimele 7 puncte experimentale (Fig. 3.1).

12.	M.	$F_{r\lim}[N]$	Reprezintă valoarea forței de rezistență maximă şi este egală cu mărimea greutății tangențiale a corpului (Fig. 3.1).	Aceasta reprezintă o valoare egală cu mărimea greutății tangențiale. Se introduce în căsuța M2 valoarea numerică din căsuța G2 =G2 ┘ şi se copiază relația în toată coloana.
13.	N.	$k[Ns/m]$	Reprezintă valoarea coeficientului de rezistență la înaintare.	Aceasta reprezintă o valoare egală cu raportul dintre mărimea greutății tangențiale şi viteza limită determinată. Se introduce în căsuța N2 valoarea numerică egală cu raportul dintre valoarea G2 şi L2 =G2/L2 ┘ şi se copiază relația în toată coloana.
14.	O.	$x_{crt}(m)$	Reprezintă poziția din care va fi lăsat liber corpul de masa m_1. Această poziție nu se va modifica în timpul experimentului.	Se introduce în căsuța O2 coordonata porții START - H2 şi se copiază valoarea introdusa in toată coloana): =O2 ┘
15.	P.	$v_{crt}(m/s)$	Reprezintă valoarea vitezei inițiale pentru corpul de masă m_1lăsat liber. Această valoare va fi considerată a fi nulă.	Se introduce în căsuța P2 valoarea numerică şi apoi această valoare va fi incrementată la fiecare pas.
16.	Q.	$F_r[N]$	Reprezintă valoarea forței de rezistență ce acționează asupra corpului (Fig. 3.1).	Aceasta reprezintă o valoare egală cu produsul dintre valoarea coeficientului de rezistență la înaintare şi viteza curentă a corpului. Se introduce în căsuța Q2 expresia =N2*P2 ┘ şi se copiază relația în toată coloana.
17.	R.	$R_{ez}[N]$	Reprezintă valoarea forței rezultante şi este egală cu diferența dintre mărimea greutății tangențiale a corpului şi valoarea forței de rezistență.	Se introduce în căsuța R2 valoarea numerică dată de expresia =G2- Q2 ┘ şi se copiază relația in toată coloana.
18.	S.	$a[m/s^2]$	Reprezintă valoarea accelerației instantanee a corpului dată de valoarea forței rezultante.	Aceasta reprezintă o valoare egală cu raportul dintre mărimea forței rezultante şi masa corpului. Se introduce in căsuța S2 valoarea numerică dată de expresia =R2/E2 ┘ şi se copiază relația în toată coloana.

19.	T.	$\Delta t(s)$	Specifică intervalul de timp dintre două stări succesive.	Se introduce în căsuța T2 o valoare numerică (de exemplu 0.05 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă) =T2 ┘
20.	U.	$v_{fin}(m/s)$	Reprezintă viteza *finală* pe care o va avea corpul de masă m la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această viteză se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *cel de al doilea parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța U2 formula de calcul pentru viteza finală aferentă intervalului de timp Δt din iterația curentă: $v_f = v_{crt} + a\Delta t$ care corespunde valorii vitezei finale =O2+S2*T2 ┘
21.	V.	$d(m)$	Reprezintă distanţa parcursă în intervalul de timp Δt *din iterația curentă.* Această distanţă se va actualiza la fiecare pas.	Se introduce în căsuța v2 formula de calcul a distanţei parcurse în intervalul de timp Δt *din iterația curentă*: $d = \frac{(v_f + v_{crt})}{2}\Delta t$ (1.25) care corespunde valorii vitezei medii pe acest interval =(P2+U2)/2*T2 ┘
22.	W.	$x_f(m)$	Reprezintă poziția *finală* pe care o va avea corpul de masa m_1. lăsat liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această poziție se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *primul parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța W2 formula de calcul pentru poziția *finală* pe care o va avea corpul de masă m_1 *din iterația curentă*: $x_f = x_{crt} + d$ (1.26) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =O2+V2 ┘
23.	X.	$t(s)$	Reprezintă timpul curent i.e. ordonează stările sistemului $t_k = t_{k-1} + \Delta t$	La fiecare pas, se face incrementarea cu intervalul de timp introdus în coloana A T3=T2+K2 ┘

Observație: pentru fiecare iterație în parte, parametrii finali x_f şi respectiv v_f reprezintă parametrii inițiali x_{crt} respectiv v_{crt} pentru următoarea iterație. Acest fapt implică necesitatea ca la fiecare iterație să fieadăugate următoarele relații de transfer:

O3=W2 ┘ respectiv P3=U2 ┘

Si apoi aceste relații pot fi copiate în toată foaia de calcul.

La final, se compară rezultatele obținute numeric, pe baza integrațiilor efectuate pas cu pas cu cele determinate analitic, folosind relațiile (3.7) şi (3.8), şi se evaluează precizia rezultată.

X_{START} [mm]	X_{STOP} [mm]	$d_{masurat}$[m]	$\Delta t_{masurat}$ [s]	$d_{calculat}$ (m)	$X_{calculat}$ (m)	Δt (s)
1160	1100	0.06	0.391	0.065	1.095	0.390
1160	1070	0.09	0.508	0.105	1.055	0.510
1160	1040	0.12	0.579	0.132	1.028	0.580
1160	1010	0.15	0.622	0.148	1.012	0.620
1160	980	0.18	0.687	0.178	0.982	0.690
1160	950	0.21	0.792	0.224	0.936	0.790
1160	920	0.24	0.878	0.268	0.892	0.880
1160	890	0.27	0.897	0.278	0.882	0.900
1160	860	0.30	0.980	0.319	0.841	0.980
1160	830	0.33	1.015	0.336	0.824	1.010
1160	800	0.36	1.030	0.346	0.814	1.030

Fig. 3.5.a – Comparația între simularea numerică şi valorile exacte obținute pentru configurația dată

5. Identificare sistem

Procesul de identificare a sistemului se va realiza utilizând interfața şi procedurile de la lucrările anterioare, singura modificare fiind modului selectat pentru citirea senzorilor.

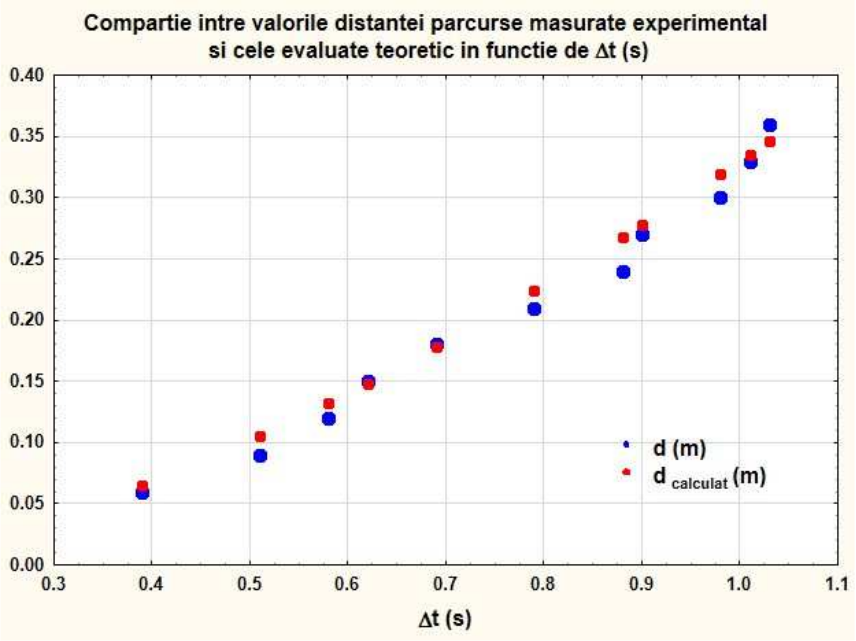


Fig. 3.5.b – Comparația între simularea numerică şi valorile experimentale

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L03

Lucrarea 4

STUDIUL LEGII DE RĂCIRE A UNUI CORP ŞI DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE TRANSFER TERMIC

I. Consideraţii teoretice

Transferul termic de la un corp la altul se realizează prin radiaţie, convecţie sau conductibilitate termică.

La propagarea căldurii în medii lichide sau gazoase, pentru temperaturi nu prea mari ale corpului, rolul principal în procesul de transfer îl are convecţia.

În lucrarea de faţă vom neglija rolul conductibilităţii şi al radiaţiei în procesul de transfer termic al corpului. Cantitatea de căldură transmisă unui mediu prin convecţie de către un corp cu aria S, în unitatea de timp, este dată de relaţia lui Newton:

$$Q_c = \alpha S (T - T_m) \tag{4.1}$$

unde α este coeficientul de transfer termic, T este temperatura corpului, iar T_m este temperatura mediului în care se găseşte corpul. Coeficientul de transfer termic depinde de parametrii mediului (densitatea, capacitatea calorică, coeficientul de vâscozitate), de forma corpului şi de temperatura sa. Relaţia (4.1) exprimă legea de răcire a unui corp.

Într-un interval de timp $d\tau$, cantitatea de caldură transmisă mediului va fi:

$$\delta Q = \alpha S (T - T_m) d\tau \tag{4.2}$$

Dacă temperatura corpului scade cu dT în intervalul de timp $d\tau$, cantitatea de căldură cedată de un corp de masă m şi căldura specifică c este:

$$\delta Q = -mcdT \tag{4.3}$$

Cele două cantităţi de căldură (4.2) şi (4.3) sunt egale

$$-mcdT = \alpha S (T - T_m) d\tau \tag{4.4}$$

Prin separarea variabilelor şi integrarea ecuaţiei (4.4), se obţine:

$$\int_{T_o}^{T} \frac{dT}{T - T_m} = -\frac{\alpha S}{mc} \int_{o}^{\tau} d\tau \tag{4.5}$$

Considerând că mărimile α şi c nu depind de temperatură în intervalul de temperatură considerat, din relaţia (4.5), rezultă:

$$T(t) = T_m + (T_o - T_m) e^{-A\tau} \tag{4.6}$$

unde s-a făcut notaţia: $A \equiv \frac{\alpha S}{mc}$. S-a considerat, de asemenea, mediul infinit astfel încât temperatura lui să nu se modifice în timp prin transfer termic.

2. Dispozitivul experimental

Corpul metalic C folosit pentru determinarea coeficientului de transfer termic este de formă cilindrică. Corpul este prins de un stativ cu un fir neconductor termic.

Pe suprafaţa corpului este fixat un termocuplu digital T care serveşte la măsurarea temperaturii lui la orice moment (Fig. 4.1 şi 4.2).

3. Modul de lucru

Din relaţia (4.6) se deduce expresia:

$$\ln \frac{T_o - T_m}{T - T_m} = A\tau \tag{4.7}$$

Se urmăreşte verificarea relaţiei (4.7). Este comod să se traseze graficul în coordonate semilogaritmice.

În acest sistem de coordonate, prin reprezentarea grafică a relaţiei (4.7), se obţine o dreaptă de pantă A. Se determină panta dreptei A şi apoi coeficientul de transfer termic care este legat de aceasta prin relaţia:

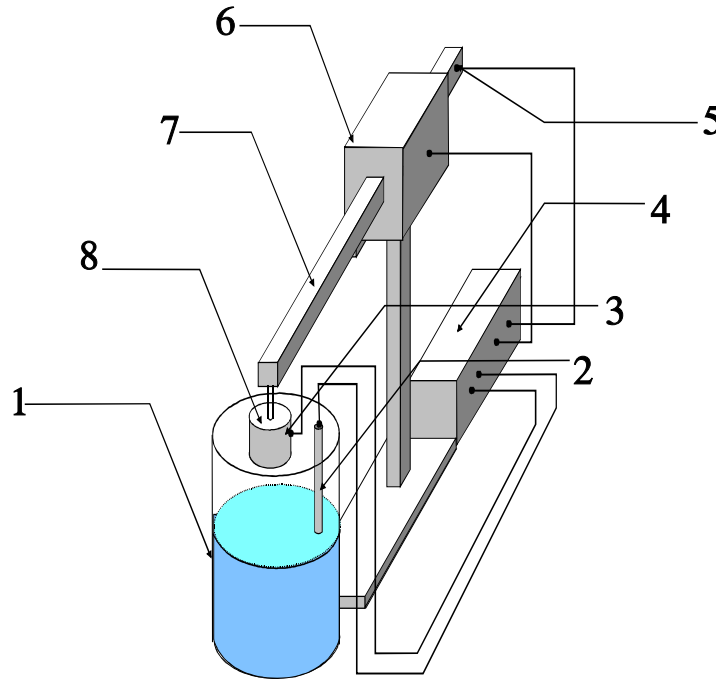


Fig. 4.1

$$\alpha = \frac{mcA}{S} \tag{4.8}$$

1) Se măsoară raza corpului cu ajutorul unui şubler şi se calculează aria lui:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h) \tag{4.9}$$

2) Masa corpului m se determină prin cântărire, iar căldura lui specifică se ia din tabele.

3) Pentru măsurarea temperaturii se foloseşte un termometru digital.

Observaţie : Din relaţia (4.7), se observă că dacă timpul este suficient de mare ($\tau \to \infty$), temperatura corpului T tinde spre valoarea T_m a mediului.

Nr. crt	T_0 (K)	T (K)	τ(s)	m (kg)	c (J/kg.K)	S (m^2)	α ($J/m^2.K.s$)
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							
7.							
8.							
9.							
10.							
11.							
12.							

4. Modelarea numerică

Modelarea numerică constă in a obține evoluția în timp a temperaturii sistemului considerat, cunoscând constantele de material, temperatura inițială a corpului, temperatura exterioară (considerată a fi constantă) şi valoarea coeficientului de transfer α anterior determinat.

In acest sens, tabelul foii de calcul va putea fi organizat în felul următor (Fig. 4.4.a şi Fig. 4.4.b):

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Dt(s)	t(s)	Lung (mm)	Diam (mm)	S (m^2)	m(kg)	c (J/kgK)	α (W/m^2)	$T_{exterior}$ (^0C)
0.2	0	40	25	0.0041213	0.257	925	650	18
0.2	0.2	40	25	0.0041213	0.257	925	650	18

Fig. 4.4.a – Setul de parametrii care descriu sistemul termic pentru simulare numerică

J	K	L	M	N	O	P	Q
T crt (^0C)	ΔQ (J)	ΔT (^0C)	T_{final} (^0C)	(T_0(^0C) -T_{mediu} (^0C)	(T_{crt} (^0C) -T_{mediu} (^0C))	A	A*(m*c)/S
80	-33.2173	-0.13973	79.86027	62	61.86027017	0.011281252	650.7335571
79.86027	-33.1424	-0.139415	79.720855	62	61.72085524	0.011281252	650.7335571

Fig. 4.4.b – Setul de parametrii care descriu evoluția sistemului termic pentru simulare numerică

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare:

Nr. crt.	Coloana	Variabila	Descriere	Mod de utilizare
1.	A.	$\Delta t(s)$	Specifică intervalul de timp dintre două stări succesive.	Se introduce în căsuța A2 o valoare numerică (de exemplu 0.01 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă) =A2 ↵
2.	B.	$t(s)$	Reprezintă timpul curent i.e. ordonează stările sistemului $t_k = t_{k-1} + \Delta t$	La fiecare pas, se face incrementarea cu intervalul de timp introdus în coloana A B3=B2+A2 ↵
3.	C.	$Lung(mm)$	Lungimea corpului considerat. Valoarea considerată este de 40 mm în cazul laboratorului.	Se introduce în căsuța C2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =C2 ↵
4.	D.	$Diam(mm)$	Diametrul corpului considerat. Valoarea considerată este de 20 mm în cazul laboratorului.	Se introduce în căsuța D2 valoarea numerică corespunzătoare şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =C2 ↵
5.	E.	$S(m^2)$	Reprezintă suprafața exterioară a corpului considerat. Valoarea este calculată folosind relația (4.9).	Se calculează prin utilizarea relației (4.9) Expresia este =3.14*(C2/1000*D2/1000+1/2* D2/1000* D2/1000). Se copiază apoi în toată coloana expresia introdusă):

				=E2 ↵
6.	F.	$m(kg)$	Reprezintă valoarea masei corpului de pe planul înclinat.	Se introduce în căsuța F2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =F2 ↵
7.	G.	$c(J/kgK)$	Reprezintă valoarea căldurii specifice masice a corpului suspendat	Se introduce în căsuța G2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =G2 ↵
8.	H.	$\alpha(W/m^2)$	Reprezintă valoarea coeficientului de transfer.	Se introduce în căsuța H2 valoarea numerică anterior determinată la punctul 3 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =H2 ↵
9.	I.	$T_{exterior}(^0C)$	Reprezintă valoarea temperaturii exterioare.	Se introduce în căsuța I2 valoarea inţială şi această valoare va fi incrementată la fiecare pas.
10.	J.	$T_{crt}(^0C)$	Reprezintă valoarea temperaturii curente a corpului.	Se introduce în căsuța I2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =I2 ↵
11.	K.	$\Delta Q(J)$	Reprezintă valoarea trasnferului energetic sub formă de căldură în intervalul de timp considerat, folosind expresia (4.1).	Se introduce în căsuța K2 valoarea transferului energetic sub formă de căldură în intervalul de timp considerat, folosind expresia (4.1) =-H2*E2*(J2-I2)*A2 ↵ şi apoi se copiază expresia în toată coloana, folosind =K2 ↵
12.	L.	$\Delta T(^0C)$	Reprezintă valoarea variaţiei temperaturii corpului datorată transferului energetic sub formă de căldură în intervalul de timp considerat, folosind expresia (4.3).	Se introduce în căsuța L2 expresia variaţiei temperaturii datorată transferului energetic sub formă de căldură în intrvalul de timp considerat, folosind expresia (4.3) =K*(F2*G2) ↵ şi apoi se copiază expresia în toată coloana, folosind =L2 ↵
13.	M.	$T_{final}(^0C)$	Reprezintă valoarea temperaturii corpului la finalul intervalului de timp considerat.	Se introduce în căsuța M2 expresia de calcul a temperaturii finale =J2+L2. Se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =M2 ↵
14.	N.	$(T_0 - T_{mediu})$	Reprezintă diferenţa dintre temperatura inţială a corpului şi cea a mediului. Această valoare nu se va modifica în timpul experimentului.	Se introduce în căsuța N2 valoarea numerică calculată cu expresia =J2-I2 şi se copiază valoarea calculată în toată coloana: =N2 ↵
15.	O.	$(T_{crt} - T_{mediu})$	Reprezintă diferenţa	Se introduce în căsuța O2 valoarea

			dintre temperatura *curentă* a corpului şi cea a mediului. Această valoare se va modifica în timpul experimentului la fiecare pas al simulării.	numerică calculată cu expresia =M2-I2 şi se copiază relaţia de calcul în toată coloana.
16.	P.	$A(s^{-1})$	Reprezintă panta graficului şi mărimea care este calculată cu ajutorul relaţiei (4.7).	Se introduce în căsuța P2 formula dată de expresia (4.7): =1/B2*ln(N2/O2) şi se copiază relaţia de calcul în toată coloana.
17.	Q.	$A*(mc)/S$	Reprezintă coeficientul obţinut din panta graficului care este calculat cu ajutorul relaţiei (4.8).	Se introduce în căsuța Q2 formula dată de expresia (4.8): =P2*(F2*G2)/E2 şi se copiază relaţia de calcul în toată coloana.

Observație: pentru fiecare iterație în parte, parametrul final T_{crt} v_f reprezintă parametrii inițiali pentru următoarea iterație. Acest fapt implică necesitatea ca la fiecare iterație să fieadăugate următoarele relații de transfer:

J3=M2 ┘

Și apoi aceste relații pot fi copiate în toată foaia de calcul.

La final se compară rezultatele obținute numeric, pe baza integrațiilor efectuate pas cu pas cu cele determinate analitic, folosind relațiile (4.6) şi (4.9), şi se evaluează precizia rezultată.

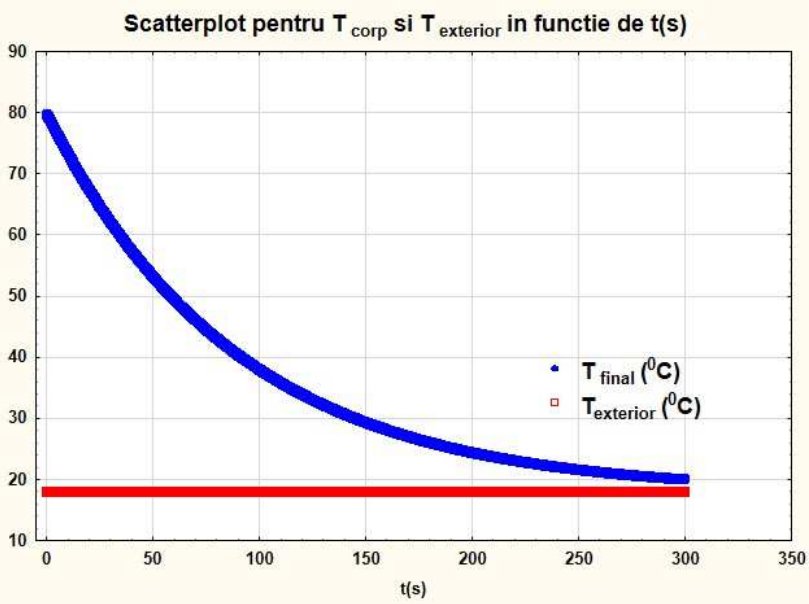


Fig. 4.5 – Rezultatele obţinute pentru simularea numerică

5. Identificare sistem

Procesul de identificare a sistemului termic are ca scop determinarea constantelor ce permit descrierea legii de evoluție a temperaturii. In acest scop, pentru a putea obține legea de evoluţie în timp, se va utiliza o interfață digitală şi un set de senzori corespunzători.

5.a Senzorii utilizați

Senzorii utilizați sunt de tip termocuplu (Fig. 4.6). *Caracteristici tehnice:*

Specificaţii

1. Plaja de măsurare umiditate: 20% ~ 90% RH

2. Interval de măsurare a temperaturii: 0 ~ + 50 grade Celsius

4. Precizie măsurare umiditate: ±5,0% RH.

5. Precizia de măsurare temperatură: ±2.0 Celsius

6. Timpul de răspuns: <5s.

7. Consum redus de energie.

La adresa www.phys.ugal.ro/LaboratorMIS/Lucrare4, se poate descărcă foaia cu datele tehnice (datasheet - modul DHT11 senzor rezistiv temperatură).

5b.Instrucțiuni de utilizare:

Modul de funcționare a modulului este simplu, returnează o valoare a tensiunii electrice proporţională cu temperatura detectată (Fig. 4.7).

Montajul senzorului în cadrul interfeței este prezentat în figura 4.8.



Fig. 4.6 – Senzor temperatură

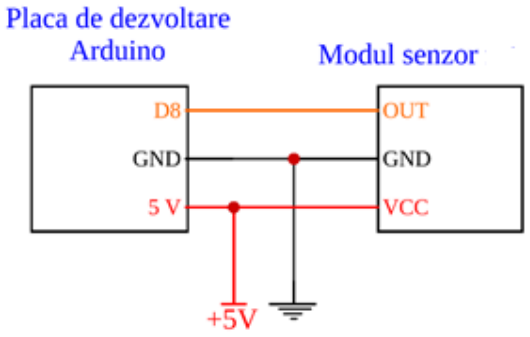


Fig. 4.7 – Schema montaj

5.b Interfața hardware utilizată

Interfața cu unitatea centrală este asigurată cu ajutorul unei placi de tip Arduino Uno (Fig. 4.8).

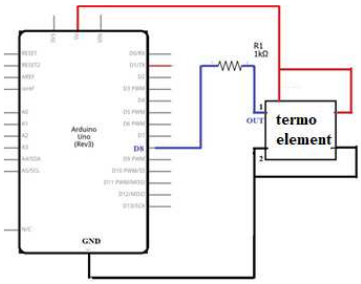


Fig. 4.8 – Schema interfeței cu Arduino Uno şi un termoelement

5.c Aplicația utilizată pentru platforma Arduino

Pentru citirea şi preluarea datelor oferite de senzorii utilizați, se poate folosi următorul cod generic (Pentru a folosi senzorul, trebuie să instalăm librăria DHTLib.):

```
#include<dht.h>

dht DHT;
 // if you require to change the pin number, Edit the pin with your arduino pin.
define DHT11_PIN 3
```

```
void setup()
{
 Serial.begin(9600);
Serial.println("welcome to Humidity and temperature Detector"); }
void loop() { // READ DATA
 int chk = DHT.read11(DHT11_PIN);
Serial.println(" Humidity " );
Serial.println(DHT.humidity, 1);
Serial.println(" Temparature ");
Serial.println(DHT.temperature, 1);
delay(300);
}
```

5.c Interfața grafică utilizată

Interfața grafică a programului utilizat este realizată în mediul de programare Visual Studio C#. Rolurile interfeței grafice sunt următoarele:

- a) *preia datele de pe magistrala serială (Serial Monitor) de la placa de achiziție Arduino –i.e. memorează momentele de timp la care sunt activați senzorii*, pornind cronometrul de la momentul citirii primului senzor.

b) *preia pozițiile curente ale senzorilor de pozitie cuplați la dispozitivul experimental.* Aceste date sunt introduse de utilizator prin intermediul interfeței date.

c) *se rulează un modul de calcul pentru identificarea constantelor expresiei polinomiale de interpolare* de forma

$$T(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \qquad (4.10)$$

şi se compară cu expresia dată de relatia (4.6)

Modulul de calcul pentru calculul coeficienților expresiei polinomiale de interpolare va fi bazat pe utilizarea metodei celor mai mici pătrate (vezi Anexa 1).

Schema logică a programului este prezentată în figura de mai jos. Modulele şi procedurile specifice ale interfeței sunt prezentate sub forma unor elemente grafice de tip săgeată.

5.d Prezentarea interfeței grafice utilizate şi a modului de operare

In figura de mai jos este prezentată schematic interfața grafică a programului utilizat. In panoul din dreapta, sunt butoanele care introduc pozițiile senzorilor.

In partea stângă, sunt prezentate butoanele de comandă a procedurilor de cuplare a interfeței cu placa de achiziție Arduino, butonul de comandă a rulării modulului de calcul şi respectiv de reprezentare grafică.

Exact ca în cazul aplicaţiilor anterioare, etapele necesare utilizării interfeței sunt următoarele:

1) Se pornește aplicația dedicată lucrării utilizând iconița de pe desktop.
2) Se folosește controlul 1 din figura 4.10 pentru a selecta portul COM de comunicare cu placa de achiziție ARDUINO.
3) Se folosește controlul 2 din figura 4.10 pentru a citi continuu temperatura corpului supus procesului de răcire. Temperatura este citită cu ajutorul senzorului cuplat la corp.
4) Se folosește controlul 3 din figura 4.10 pentru a citi continuu temperatura mediului exterior. Temperatura este citită cu ajutorul senzorului cuplat la braţul suportului de sustinere.
5) Se folosesc controalele 4 şi 5 din figura 4.10 pentru a arma sistemul şi pentru a-l pregăti de măsurare. Butonul Stop este pentru a-l dezarma, iar butonul Reset este pentru a reinițializa variabilele.

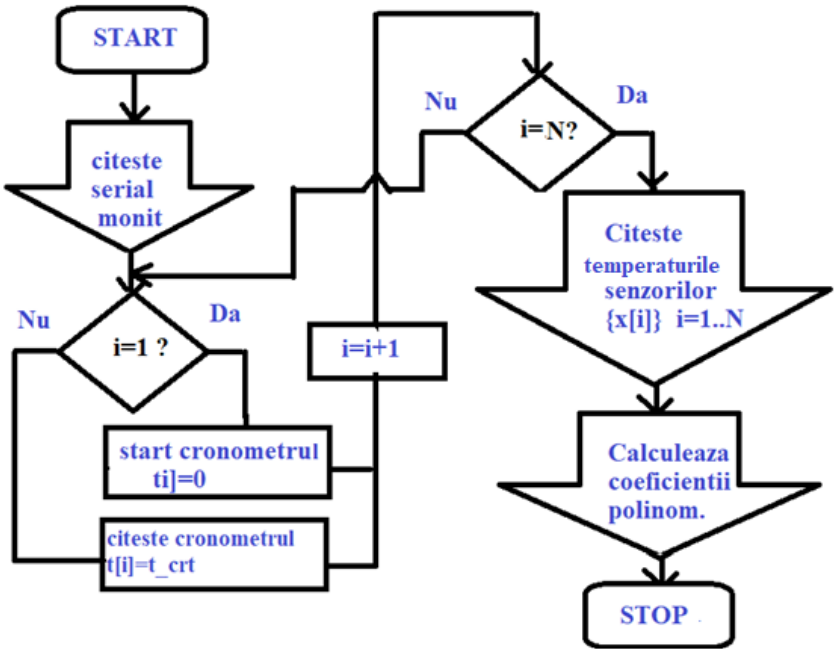


Fig. 4.9 – Schema logică pentru interfața grafică

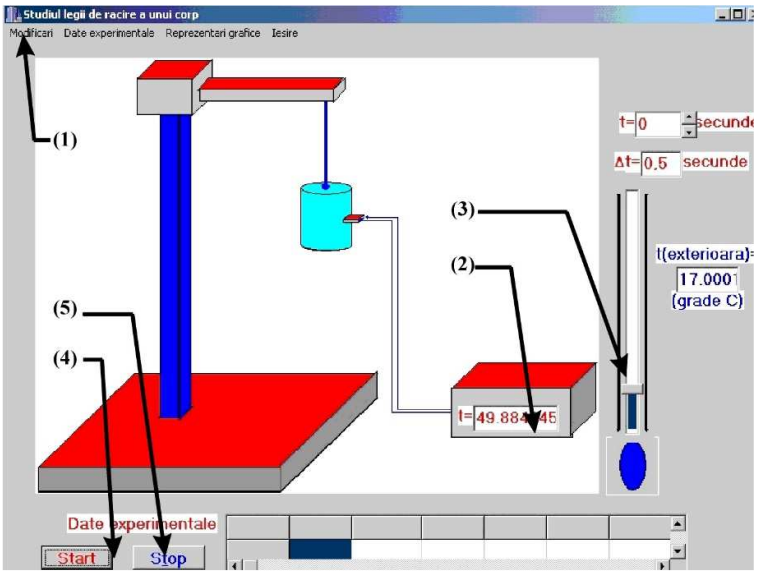


Fig. 4.10

Modul de operare a interfeței este extrem de simplu. Din meniul Modificări (1) se comandă coborârea corpului în vasul de încălzit și pornirea plitei electrice.
De asemenea, din controlul (4) și (5), se comandă demararea operațiunii de citire a temperaturii și înregistrării ei în funcție de timp. La momentul în care temperatura corpului este suficient de ridicată, se comandă ridicarea corpului și demararea procesului de înregistrare a temperaturii cu rezoluția temporală comandată din interfață. Temperatura mediului exterior este afișată în mod continuu cu autorul controlului (3).

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L04

Lucrarea 5

DETERMINAREA CĂLDURII SPECIFICE A UNUI LICHID PRIN METODA RĂCIRII

I. Consideraţii teoretice

Determinarea căldurii specifice a unui lichid prin această metodă are la bază legea răcirii corpurilor a lui Newton: cantitatea de căldură schimbată de un solid cu un fluid (gaz sau lichid) este proporţională cu diferenţa de temperatură dintre solid (T_s) şi fluid (T_f), cu suprafaţa S a solidului care schimbă căldură şi cu timpul τ, cât durează acest schimb de căldură:

$$Q = \alpha \left(T_s - T_f\right) S\, \tau \tag{5.1}$$

unde α este coeficientul de schimb de căldură.

Să considerăm un vas calorimetric, a cărui capacitate calorică o notăm cu C, în care se află un lichid de masă m a cărui căldură specifică c vrem să o măsurăm. Cantitatea de căldură necesară pentru a încălzi lichidul şi calorimetrul de la temperatura T_0 la temperatura T este dată de relaţia:

$$Q = \left(m\, c + C\right)\left(T - T_o\right) \tag{5.2}$$

Când acest sistem se răceşte de la temperatura T la T_0, el va ceda aceeaşi cantitate de căldură. Pentru variaţii infinitezimale de temperatură relaţia (2) devine:

$$\delta\, Q = (mc + C)\, dT \tag{5.3}$$

Dacă această cantitate de căldură este cedată unui fluid aflat într-o incintă închisă izotermă, ea poate fi exprimată cu ajutorul legii lui Newton (1):

$$\delta Q = -\alpha\, (T - T_f)\, S\, d\tau \tag{5.4}$$

Semnul (-) apare datorită faptului că această cantitate de căldură este cedată de sistem. Egalând relaţiile (3) şi (4), se obţine:

$$(mc + C)\, dT = -\alpha (T - T_f) S\, d\tau \tag{5.5}$$

Prin integrare rezultă:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T - T_f} = -\frac{\alpha\, S}{mc + C} \int_0^{\tau} d\tau$$

deci:

$$T_2 - T_f = \left(T_1 - T_f\right) e^{-\frac{\alpha\, S}{m\, c + C}\tau} \tag{5.6}$$

La momentul iniţial τ=0, s-a considerat că lichidul şi calorimetrul au temperatura T_1, până la care au fost încălzite în prealabil. După timpul τ , calorimetrul şi lichidul s-au răcit până la temperatura T_2, în incinta izotermă de temperatură T_f ($T_2 > T_f$).

Relaţia (6) este cunoscută sub denumirea de relaţia lui Richmann.

Dacă în vasul calorimetric se introduce un alt lichid de masă m_0 şi căldură specifică c_0, care se răceşte între aceleaşi temperaturi, dar în intervalul de timp τ_0, relaţia (6) devine:

$$T_2 - T_f = \left(T_1 - T_f\right) e^{-\frac{\alpha\, S}{m_o\, c_o + C}\tau_o} \tag{5.7}$$

Egalând relaţiile (6) şi (7), se poate calcula căldura specifică a primului lichid:

$$c = \frac{m_o c_o \tau}{m \tau_o} + \frac{\tau - \tau_o}{\tau_o} \frac{C}{m} \tag{5.8}$$

Capacitatea termică a calorimetrului este:

$$C = m_1 c_1 + 0{,}46V \tag{5.9}$$

unde: m_1 = masa vasului calorimetric, c_1 = căldura specifică a materialului din care este construit calorimetrul, V = volumul acelei părţi din termometru care intră în lichid, măsurată în cm^3.

2 Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental folosit este prezentat în figura 5.1. În vasul metalic (1) se pune apă la temperatura camerei, apoi se introduce vasul (2), care are pereţii interiori înnegriţi, pentru a forma o incintă izotermă. Temperatura în interiorul incintei trebuie să rămână constantă. În interiorul acestei incinte se introduce calorimetrul (3) prevăzut cu un capac şi un termometru (4).

Temperatura apei din vasul (1), indicată de termometrul T, va rămâne practic constantă, deoarece cantitatea de căldură primită este foarte mică, iar capacitatea calorică a ei este mare.

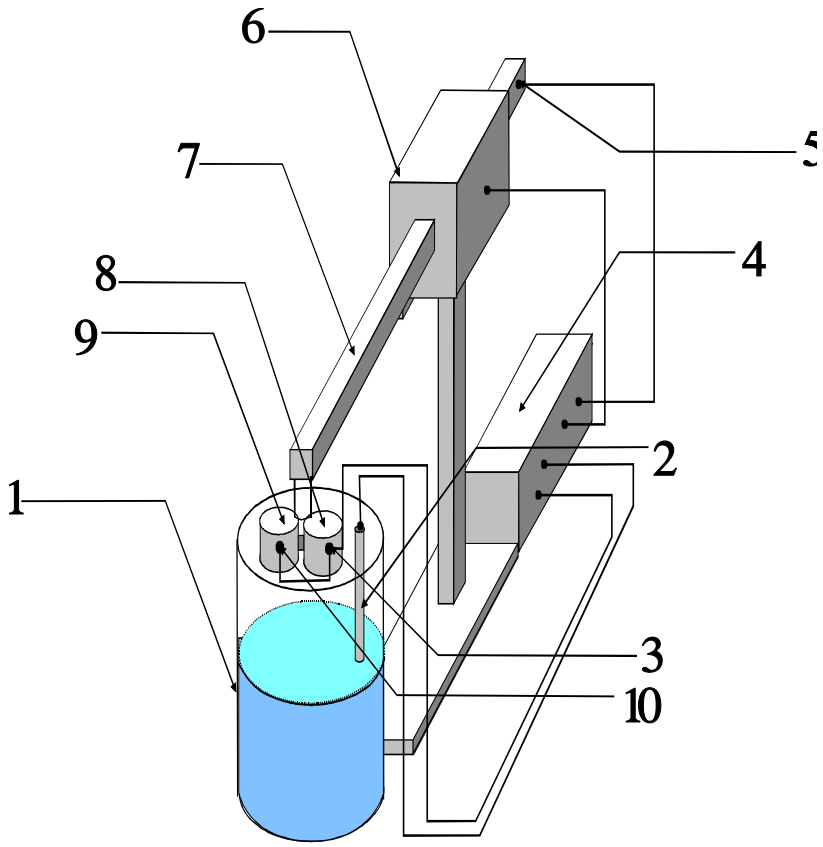


Fig. 5.1

3. Modul de lucru

1) Se determină masa vasului calorimetric (3) gol. Se umple aproximativ 2/3 din volumul său cu apă şi se cântăreşte din nou. Se determină masa apei m_0.

2) Se fixează dopul prevăzut cu termometru. Se introduce calorimetrul (3) în apă încălzită până când termometrul indică temperatura $T_1 = 323K$.

3) Se scoate calorimetrul şi se introduce în incinta izotermă. Se cronometrează timpul necesar ca temperatura calorimetrului şi a apei din el să scadă până la $T_2 = 313K$.

4) Operaţia se repetă identic pentru o masă m de lichid a cărui căldură specifică trebuie determinată.

5) Căldura specifică a lichidului se calculează cu ajutorul relaţiei (8), în care τ este timpul în care acesta s-a răcit de la temperatura T_1 la T_2, iar τ_0 este timpul în care calorimetrul şi apa s-au răcit între aceleaşi limite de temperatură.

Volumul V din relaţia (9) se determină astfel: într-o mensură se pune apă până în dreptul unei anumite diviziuni. Se introduce partea din termometru care a intrat în lichid. Diferenţa dintre cele două diviziuni reprezintă volumul V.

Nr. crt.	m_0 (kg)	m (kg)	c_0 (J/kg.K)	τ_0 (s)	τ (s)	c (J/K)	c (J/kg.K)
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							
7.							
8.							
9.							

4. Modelarea numerică

Modelarea numerică constă în a obţine evoluţia în timp a temperaturii sistemului considerat, cunoscand constantele de material, temperatura iniţială a corpului, temperatura exterioară (considerată a fi constantă) şi valoarea coeficientului de transfer α anterior determinat.

In acest sens, tabelul foii de calcul va putea fi organizat în felul următor (Fig. 5.2.a şi Fig. 5.2.b):

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Dt(s)	t(s)	Lung (mm)	Diam (mm)	S (m^2)	m(kg)	c (J/kgK)	α (W/m^2)	$T_{exterior}$ (^{0}C)
0.2	0	40	25	0.0041213	0.257	925	650	18
0.2	0.2	40	25	0.0041213	0.257	925	650	18

Fig. 5.2.a – Setul de parametrii care descriu sistemul termic pentru simulare numerică

J	K	L	M	N	O	P	Q
T crt (^{0}C)	ΔQ (J)	ΔT (^{0}C)	T_{final} (^{0}C)	(T_0(^{0}C) -T_{mediu} (^{0}C)	(T_{crt} (^{0}C) -T_{mediu} (^{0}C))	A	A*(m*c)/S
80	-33.2173	-0.13973	79.86027	62	61.86027017	0.011281252	650.7335571
79.86027	-33.1424	-0.139415	79.720855	62	61.72085524	0.011281252	650.7335571

Fig. 5.2.b – Setul de parametrii care descriu evoluția sistemului termic pentru simulare numerică

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare:

Nr. crt.	Coloana	Variabila	Descriere	Mod de utilizare
1.	A.	$\Delta t(s)$	Specifică intervalul de timp dintre două stări succesive.	Se introduce in căsuța A2 o valoare numerică (de exemplu 0.01 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă) =A2 ↵
2.	B.	$t(s)$	Reprezintă timpul curent i.e. ordonează stările sistemului. $t_k = t_{k-1} + \Delta t$	La fiecare pas, se face incrementarea cu intervalul de timp introdus în coloana A. B3=B2+A2 ↵

3.	C.	$Lung(mm)$	Lungimea corpului considerat. Valoarea considerată este de 40 mm in cazul laboratorului.	Se introduce în căsuța C2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusa: =C2 ↵
4.	D.	$Diam(mm)$	Diametrul corpului considerat. Valoarea considerată este de 20 mm in cazul laboratorului.	Se introduce în căsuța D2 valoarea numerică corespunzătoare şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă: =C2 ↵
5.	E.	$S(m^2)$	Reprezintă suprafaţa exterioară a corpului considerat. Valoarea este calculată folosind relaţia (4.9).	Se calculează prin utilizarea relaţiei (4.9) Expresia este =3.14*(C2/1000*D2/1000+1/2* D2/1000* D2/1000). Se copiază apoi în toată coloana expresia introdusă: =E2 ↵
6.	F.	$m(kg)$	Reprezintă valoarea masei corpului de pe planul înclinat.	Se introduce în căsuța F2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă: =F2 ↵
7.	G.	$c(J/kgK)$	Reprezintă valoarea căldurii specifice masice corpului suspendat.	Se introduce în căsuța G2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă: =G2 ↵
8.	H.	$\alpha(W/m^2)$	Reprezintă valoarea coeficientului de transfer.	Se introduce în căsuța H2 valoarea numerică anterior determinată la punctul 3 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă: =H2 ↵
9.	I.	$T_{exterior}(^0C)$	Reprezintă valoarea temperaturii exterioare.	Se introduce în căsuța I2 valoarea inţială şi această valoare va fi incrementată la fiecare pas.
10.	J.	$T_{crt}(^0C)$	Reprezintă valoarea temperaturii curente a corpului.	Se introduce în căsuța I2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă: =I2 ↵
11.	K.	$\Delta Q(J)$	Reprezintă valoarea transferului energetic sub formă de căldură în intervalul de timp considerat, folosind expresia (4.1).	Se introduce în căsuța K2 valoarea transferului energetic sub formă de căldură în intervalul de timp considerat, folosind expresia (4.1) =-H2*E2*(J2-I2)*A2 ↵ şi apoi se copiază expresia în toată coloana, folosind =K2 ↵
12.	L.	$\Delta T(^0C)$	Reprezintă valoarea variaţiei temperaturii corpului datorată transferului energetic sub formă de căldură în intervalul de timp considerat, folosind	Se introduce în căsuța L2 expresia variaţiei temperaturii datorată transferului energetic sub formă de căldură în intervalul de timp considerat, folosind expresia (4.3) =K*(F2*G2) ↵ şi apoi se copiază expresia în toată

			expresia (4.3).	coloana, folosind =L2 ↵
13.	M.	$T_{final}(^0C)$	Reprezintă valoarea temperaturii corpului la finalul intervalului de timp considerat.	Se introduce în căsuța M2 expresia de calcul a temperaturii finale =J2+L2. Se copiază în toată coloana valoarea introdusă: =M2 ↵
14.	N.	$(T_0 - T_{mediu})$	Reprezintă diferenţa dintre temperatura inţială a corpului şi cea a mediului. Această valoare nu se va modifica în timpul experimentului.	Se introduce in căsuța N2 valoarea numerică calculat~a cu expresia =J2-I2 şi se copiază valoarea calculată în toată coloana: =N2 ↵
15.	O.	$(T_{crt} - T_{mediu})$	Reprezintă diferenţa dintre tempertura *curentă* a corpului şi cea a mediului. Această valoare se va modifica în timpul experimentului la fiecare pas al simulării.	Se introduce în căsuța O2 valoarea numerică calculată cu expresia =M2-I2 şi se copiază relaţia de calcul în toată coloana.
16.	P.	$A(s^{-1})$	Reprezintă panta graficului şi mărimea care este calculată cu ajutorul relaţiei (4.7).	Se introduce în căsuța P2 formula dată de expresia (4.7): =1/B2*ln(N2/O2) şi se copiază relaţia de calcul în toată coloana.
17.	Q.	$A*(mc)/S$	Reprezintă coeficientul obţinut din panta graficului care este calculat cu ajutorul relaţiei (4.8).	Se introduce în căsuța Q2 formula dată de expresia (4.8): =P2*(F2*G2)/E2 şi se copiază relaţia de calcul în toată coloana.

Observație: pentru fiecare iterație în parte, parametrul final T_{crt} reprezintă parametrii inițiali pentru următoarea iterație. Acest fapt implică necesitatea ca la fiecare iterație să fie adăugate următoarele relații de transfer:

J3=M2 ↵

Apoi aceste relații pot fi copiate in toată foaia de calcul.

In mod analog, se vor introduce valorile pentru cel de al doilea lichid.

La final se compară rezultatele obținute numeric, pe baza integrațiilor efectuate pas cu pas cu cele determinate analitic, folosind relația (5.8) şi se evaluează precizia rezultată.

5. Identificare sistem

Procesul de identificare a sistemului termic are ca scop determinarea constantelor ce permit descrierea legii de evoluţie a temperaturii. In acest scop, pentru a putea obține legea de evolutie în timp, se va utiliza o interfață digitală şi un set de senzori corespunzători, montajul fiind acelaşi ca în cazul lucrării precendente.

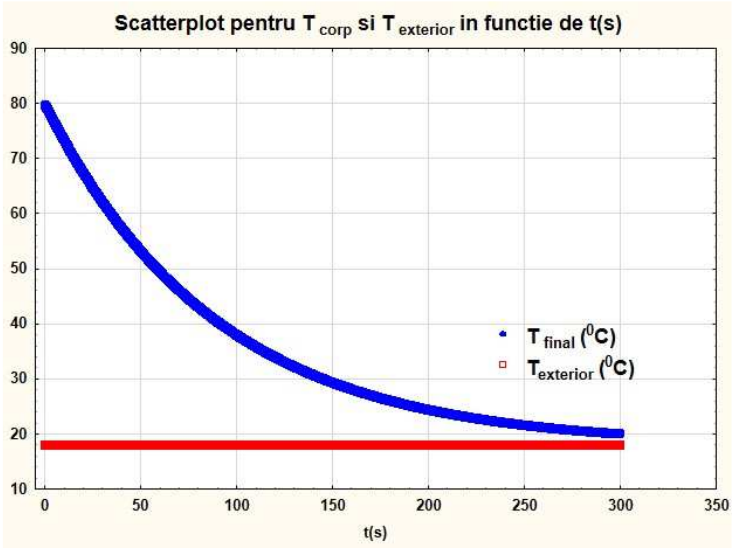


Fig. 5.3 – Rezultatele obţinute pentru simularea numerică

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L05

Lucrarea 6

DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE CONDUCTIBILITATE TERMICĂ AL UNEI BARE PRINTR-O METODĂ STAŢIONARĂ

I. Considerații teoretice

Fenomenul de conductibilitate termică constă în transmisia energiei sub formă de căldură printr-un mediu în care repartiția temperaturii nu este uniformă. Procesul se caracterizează prin existenţa în interiorul corpului respectiv a unui flux termic a cărui densitate q este definită prin cantitatea de căldură care trece normal prin unitatea de arie izotermă, în unitatea de timp:

$$\vec{q} = \frac{\delta Q}{dS\, d\tau}\vec{n} \tag{6.1}$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la elementul de arie dS. Densitatea fluxului termic într-o anumită direcție depinde de gradientul temperaturii pe acea direcție, în conformitate cu legea lui Fourier:

$$\vec{q} = -\chi\, grad\, T = -\chi \frac{dT}{dx}\vec{n} \tag{6.2}$$

Semnul (-) arată că propagarea căldurii se face în sensul descreșterii temperaturii. Mărimea χ (W/m.K) reprezintă coeficientul de conductibilitate termică al mediului. În general, acesta depinde de temperatură, iar în mediile neomogene și anizotrope, de punct și direcție.

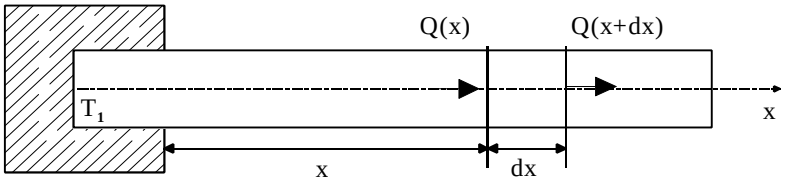


Fig. 6.1

Pentru simplitate, se consideră corpul studiat omogen și izotrop (χ = constant), sub formă de bară (Fig. 1), de secțiune transversală S mică, având perimetrul p și un coeficient de transmisie termică a căldurii în mediul înconjurător α = 4,5 W/m^{2}K.

Alegând sistemul de coordonate cu axa Ox în lungul barei, pe orice secțiune transversală în regim staționar, temperatura variază doar în funcție de distanţa de la sursa de căldură: $T = T(x)$. Se presupune că un capăt al barei ($x = 0$) se găsește la temperatura constantă T_1, iar temperatura mediului ambiant este T_0. Căldura se propagă atât în lungul barei cât și prin suprafața sa laterală în mediul înconjurător. Lungimea barei fiind suficient de mare se poate presupune că cea de a doua extremitate se găsește la temperatura mediului T_0. Conform relațiilor (6.1) și (6.2), cantitatea de căldură ce trece în unitatea de timp prin secțiunea S situată la distanta x de capătul încălzit este:

$$Q(x) = -\chi\left(\frac{dT}{dx}\right)_x S \tag{6.3}$$

iar cantitatea de căldură ce trece printr-o secțiune aflată la distanţa ($x+dx$) de extremitatea caldă este:

$$Q(x+dx) = -\chi\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} S \tag{6.4}$$

Cantitatea de căldură, δQ, ce se pierde prin suprafața laterală este:

$$\delta Q = \alpha(T_i - T_0)pdx \tag{6.5}$$

unde T_i este temperatura barei în punctul de coordonată x_i. În regim staționar

$$\delta Q = Q(x) - Q(x+dx)$$

sau:

$$\alpha(T_i - T_o)pdx = \chi S\left[\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x\right] \tag{6.6}$$

Dezvoltând în serie Taylor $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}$ se obține:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} = \left(\frac{dT}{dx}\right)_x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)dx + \ldots$$

Luând numai primii doi termeni ai dezvoltării în serie, relația (9.6) poate fi scrisă:

$$\alpha\,(T_i - T_o)\,p\,dx = \chi\,S\,\frac{d^2T}{dx^2}\,dx$$

de unde rezultă:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{\alpha\,p}{\chi S}\,(T_i - T_o) \tag{6.7}$$

Notând $\frac{\alpha\,p}{\chi S} = a^2$ ecuația diferențială (6.7) devine:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = a^2(T_i - T_o) \tag{6.8}$$

Soluția acestei ecuații poate fi pusă sub forma:

$$T - T_o = A\,e^{ax} + B\,e^{-ax} \tag{6.9}$$

Constantele de integrare A și B pot fi determinate din condițiile inițiale:

- pentru $x = 0$, $T = T_1$ și din relația (6.9) rezultă:

$$T_1 - T_o = A + B \tag{6.10}$$

- pentru $x \to \infty$ (bară suficient de lungă), $T \to T_0$ și deci din relațiile (6.9) și (6.10) se obține:

$$B = T_1 - T_o \tag{6.11}$$

deoarece $A = 0$. Soluția ecuației diferențiale (6.8) va fi de forma:

$$T_i - T_o = (T_1 - T_o)e^{-ax} \tag{6.12}$$

Logaritmând această relație rezultă:

$$\ln\frac{T_1 - T_o}{T_i - T_o} = a x_i \tag{6.13}$$

unde T_i este temperatura în punctul de coordonate x_i.

2. Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental este prezentat în figura 6.2 montat pe un banc de studiu (1) și constă dintr-o bară de alamă (2) cu lungimea $\ell \cong 40$ cm și secțiunea S, montată pe un suport (4). La capătul barei se află cuptorul electric (5), alimentat la o tensiune de 220V.

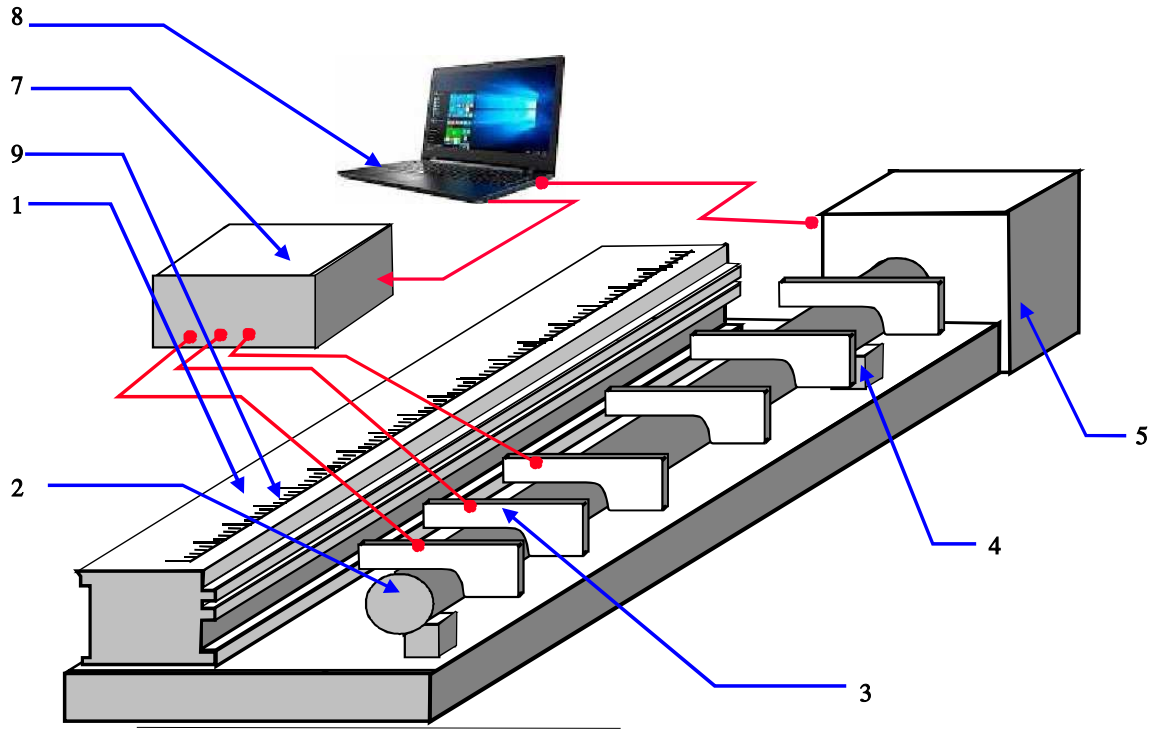


Fig. 6.2

Capătul liber al barei se află la temperatura mediului înconjurător T_0. Temperatura barei, la diferite distanțe x_i de capătul cuplat la cuptorul electric, se măsoară cu ajutorul unui sistem de termocupluri digitale (3) care poate fi deplasat pe una din generatoarele barei. Pozițiile senzorilor pot fi determinate cu ajutorul sectorului gradat (9), iar măsurătorile sunt înregistrate continuu cu ajutorul interfeței 7 care integrează sistemul de senzori şi care oferă fluxul de date computerului (8). Determinările experimentale clasice se prelucrează doar după ce se stabilește starea staționară. În acest fel se stabilesc condițiile care justifică forma (9.12) a soluției ecuației de propagare a căldurii (7).

3 Modul de lucru

1) Se alimentează rezistența de încălzire a cuptorului (5) cu ajutorul aplicației.
2) După stabilirea regimului staționar, se notează indicațiile sistemului de termocupluri. Ca primă valoare pentru T se va considera indicația termocuplului cel mai apropiat de cuptor.

3) Se reprezintă grafic $\ln\frac{T_1 - T_o}{T_i - T_o} = f(x)$ și se calculează panta dreptei rezultate, m.

4) Rezultatele se trec în tabelul de date experimentale.

5) Știind că $m = a = \sqrt{\frac{\alpha\, p}{\chi S}}$ se calculează χ cu ajutorul relației:

$$\chi = \frac{\alpha\, p}{a^2 S} = \frac{\alpha \cdot 2\pi r}{a^2 \cdot \pi r^2} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{2\,\alpha}{a^2\, r} \tag{6.14}$$

Se cunosc: $\alpha = 4{,}5$ W/m^{2}K, $r = 4.10^{-3}$m.
6) Se repetă măsurătorile încălzindu-se bara până la o altă valoare a lui T_1 (respectându-se condiția de regim staționar).

Nr. crt.	T_0 (K)	T_1 (K)	x_i (m)	T_i (K)	$\frac{T_1 - T_0}{T_i - T_0}$	$\ln\left(\frac{T_1 - T_o}{T_i - T_o}\right)$
1.						
2.						
3.						
4.						
....						

5. Identificare sistem

Procesul de identificare a sistemului mecanic are ca scop determinarea constantelor ce permit descrierea legii de mișcare. In acest scop, pentru a putea obține legea de mișcare și pentru a putea face o comparație cu legea mișcării rectilinii uniform variate (1.23b), se va utiliza o interfață digitală și un set de senzori corespunzători.

5.a Senzorii utilizați

Senzorii utilizați sunt de tip *Caracteristici tehnice:*

Tensiune de alimentare: 3V - 5V;
Curent de operare: 50mA;
Temperatură măsurată: 2°C – 102,4°C, cu o rezoluție de 0.25°C;
Rezoluție ADC de 12 biți;
Input diferențial cu impedanță mare;
Termocuplă tip K;
Comunicație SPI:
Detecție conexiune întreruptă termocuplă.

Dimensiuni: 15 x 25 mm.

Senzorul de temperatură poate măsura temperaturi înalte cu o rezoluție foarte mică, ce oferă precizie ridicată. Produsul poate lucra împreună cu plăcuțe de dezvoltare Arduino, comunicând pe magistrală SPI.

La adresa www.phys.ugal.ro/LaboratorMIS/Lucrare9 se poate descarcă foaia cu datele tehnice (datasheet - ITR9608-F.pdf).

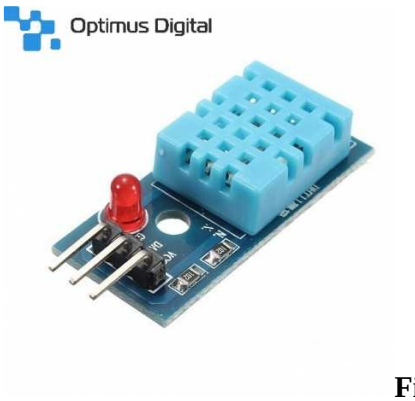


Fig. 6.3 – Senzor temperatură

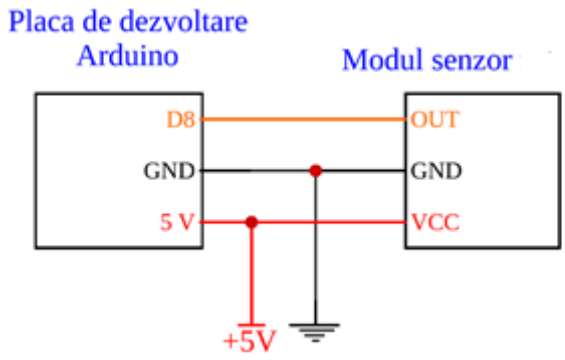


Fig. 6.4 – Schemă montaj

5b.Instrucțiuni de utilizare:

Modul de funcționare a modulului este simplu, returnează LOW atunci când nu se află niciun obiect între cele două brațe sau HIGH, în caz contrar.

Montajul senzorului în cadrul interfeței este prezentat în figura 1.6.b.

5.b Interfața hardware utilizată

Interfața cu unitatea centrală este asigurată cu ajutorul unei placi de tip Arduino Uno (Fig. 6.5)

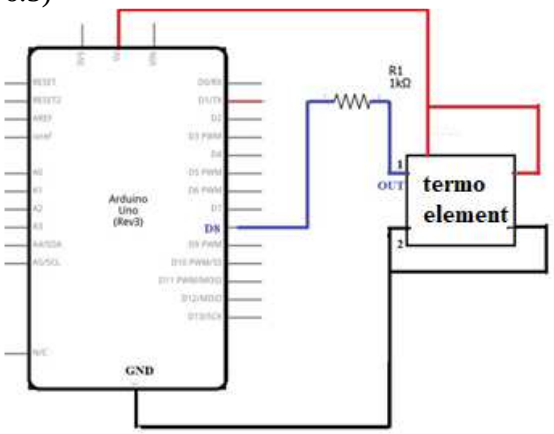


Fig. 6.5 – Schema interfeței cu Arduino Uno şi un termoelement

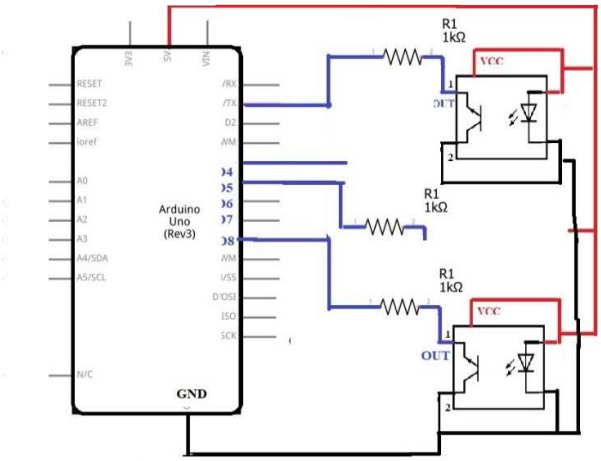


Fig. 6.6 – Schema interfeței cu Arduino Uno şi un set de termoelemente

5.c Aplicația utilizată pentru platforma Arduino

Pentru citirea şi preluarea datelor oferite de senzorii utilizați, se poate folosi următorul cod generic:

```
#define pin1=4  //acest pin digital este utilizat de
către senzor pentru a trimite date
#define pin2=5
.....
#define pin4=8
-----
void setup() {
//setați pin-ul definit anterior ca fiind de intrare
pinMode(pin1,INPUT);
pinMode(pin2,INPUT);
....
pinMode(pin4,INPUT);
.....
//se pornește comunicarea serială cu baud rates
9600
Serial.begin(9600);
}
void loop() {
  //daca se primește pe pin-ul pin1 semnalul HIGH
```

```
  //atunci se afișează în Serial Monitor
  //textul "1"
 if(digitalRead(pin1) == HIGH)
   Serial.println("1");
   Serial.println("t");
....
  //daca se primește pe pin-ul pin4 semnalul HIGH
  //atunci se afișează în Serial Monitor
  //textul "1"
 if(digitalRead(pin4) == HIGH)
   Serial.println("4");
   Serial.println("t");
}
```

5.c Interfața grafică utilizată

Interfața grafică a programului utilizat este realizată în mediul de programare Visual Studio C# şi este asemenatoare celei din lucrarea anterioară.

5.d Prezentarea interfeței grafice utilizate şi a modului de operare

In figura de mai jos, este prezentată schematic interfața grafică a programului utilizat. In panoul din dreapta sunt butoanele care introduc pozițiile senzorilor.

In partea stângă sunt prezentate butoanele de comandă a procedurilor de cuplare a interfeței cu placa de achiziție Arduino, butonul de comandă a rulării modulului de calcul şi respectiv de reprezentare grafică.

Ca în cazul lucrărilor anterioare, se introduc pozițiile senzorilor şi se bifează în cazul în care se consideră activi.

In mod analog, se selectează portul COM care va face citirea magistralei. Datele înregistrate vor fi prelucrate pentru a se face identificarea constantelor de sistem.

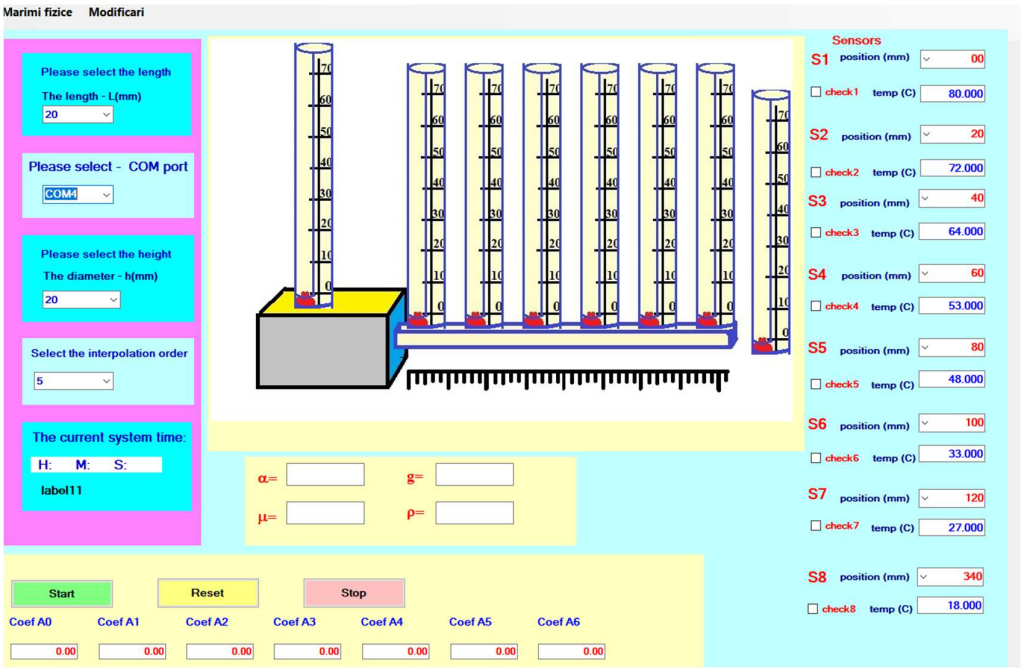


Fig. 6.8 – Interfața grafică

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L06

Lucrarea 7

VITEZEI SUNETULUI ÎN AER PRIN METODA COMPUNERII OSCILAŢIILOR PERPENDICULARE

1. Considerații teoretice

O undă elastică reprezintă procesul de propagare a unei oscilații elastice, din aproape în aproape, printr-un mediu elastic.

Pentru undele plane, putem evidenția legătura dintre legile de mișcare a două puncte diferite, aflate la o distanţă z **.**

Astfel, în cazul unei unde plane, dacă pentru un punct de referință – O, putem scrie ecuația de mișcare sub forma

$$x_O(t) = A\sin\omega t \tag{7.1}$$

atunci, pentru un alt punct M, aflat la distanţă **,** vom putea scrie expresia

$$x_M(t) = A\sin\omega(t-\Delta t) = A\sin\frac{2\pi}{T}(t-\Delta t) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{d}{V}\right) = A\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{T}\frac{d}{V}\right)$$

sau echivalent

$$x_M(t) = A\sin\left(\omega t-2\pi\frac{d}{\lambda_s}\right) = A\sin\left(2\pi\nu t-2\pi\frac{d}{\lambda_s}\right) = A\sin(\omega t-\Delta\varphi) \tag{7.2}$$

unde V este viteza sunetului, λ_s - lungimea de undă a undei sonore, iar ν frecvența oscilației.

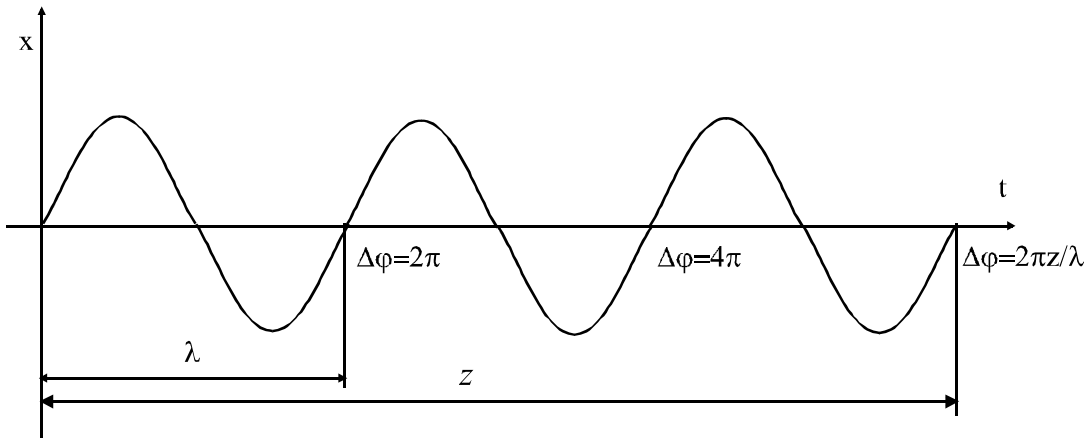


Fig. 7.1

Astfel, pentru o distanţă z intre cele două puncte considerate (Fig. 7.1), diferența de fază $\Delta\varphi$ se poate scrie sub forma:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{z}{\lambda_s}$$

ceea ce determină relația

$$\lambda_s = 2\pi\frac{z}{\Delta\varphi} \tag{7.3}$$

Ținând cont de expresia lungimii de undă

$$\lambda_s = VT$$

rezultă că mărimea vitezei sunetului în aer se poate determina cu ajutorul relației:

$$V = \frac{\lambda_s}{T} = \lambda_s \nu \qquad (7.4)$$

Relația (7.3) arată că lungimea de undă se poate determina relativ ușor, dacă se cunosc mărimile z și $\Delta\varphi$, adică distanţa dintre două puncte care oscilează sub acțiunea undei sonore și diferența de fază dintre aceste puncte.

Diferența de fază se poate determina folosind metoda compunerii oscilațiilor perpendiculare. Astfel, se poate arăta faptul că prin compunerea a două oscilații perpendiculare, de frecvenţe egale, traiectoria oscilației rezultante este o elipsă ale cărei formă și orientare depind de diferența de fază $\Delta\varphi$ a acestor oscilații (Fig. 7.2).

Forma și orientarea traiectoriilor, pentru diferite valori ale diferenței de fază $\Delta\varphi$, sunt date în figura 7.2. Prin urmare, după aspectul și poziția traiectoriei, se poate determina diferența de fază a două oscilații. O observație importantă este aceea că prin schimbarea diferenței de fază cu 2π, traiectoria efectuează o rotație completă și revine la forma inițială.

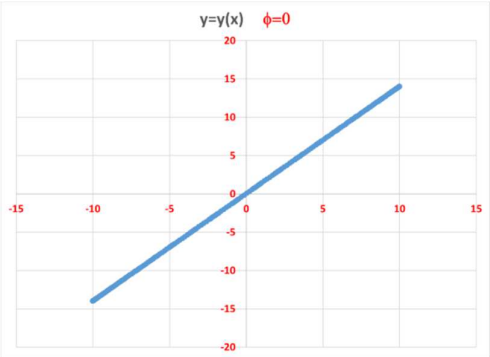


Fig. 7.1.a

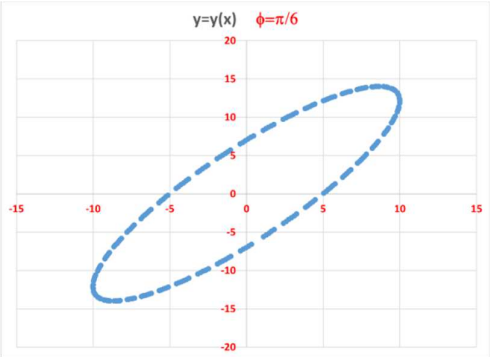


Fig. 7.1.b

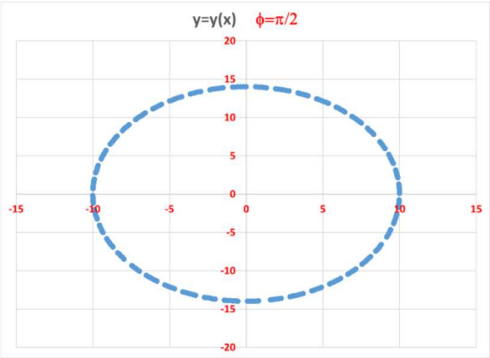


Fig. 7.1.c

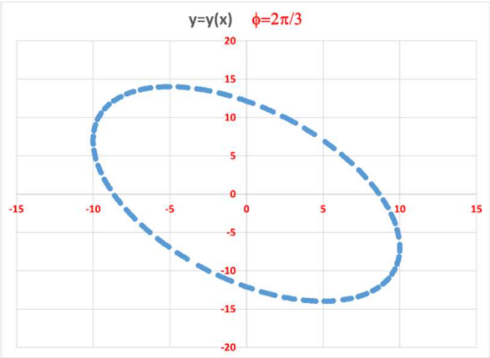


Fig. 7.1.d

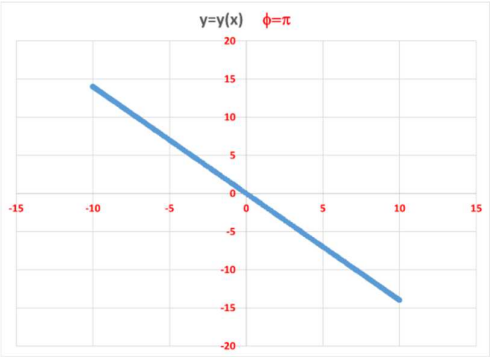


Fig. 7.1.e

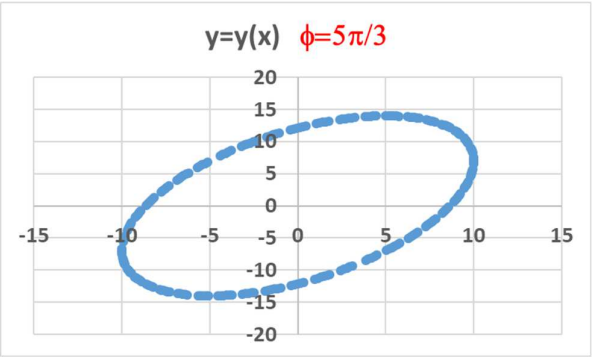


Fig. 7.1.f

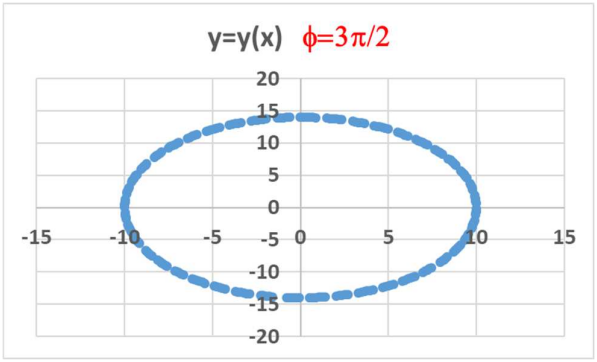


Fig. 7.1.g

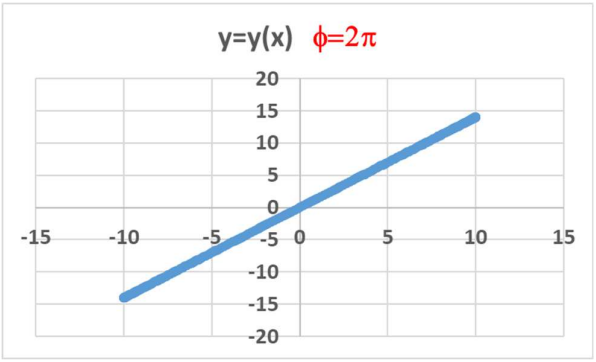


Fig. 7.1.h

Pentru valoarea $\varphi = 0\pi$ se obține o elipsă care degenerează într-o dreaptă (Fig. 7.1.a). Pentru valorile diferite ale acestui unghi de defazaj, orientarea elipsei se modifică, (Fig. 7.1.b - Fig. 7.1.g), semiaxele elipsei fiind orientate diferit, efectuând o rotație în jurul originii axelor. Când $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ elipsa este orientată cu semiaxele de-a lungul axelor Ox și Oy (Fig. 7.1.e și Fig. 7.1.g).

Pentru $\varphi = k\pi$ elipsa degenerează într-o dreaptă și pentru o variație a unghiului de defază cu $\varphi = 2\pi$ figura efectuează o rotație completă (Fig. 7.1.h).

2. Dispozitivul experimental

Cele două oscilații perpendiculare, necesare măsurării diferenței de fază $\Delta\varphi$ dintre două puncte separate prin distanța *z*, provin de la difuzorul (7) și microfonul (3) așezate pe un banc (4) cu sector gradat (2) pentru a se putea citi distanța dintre ele (Fig. 7.3).

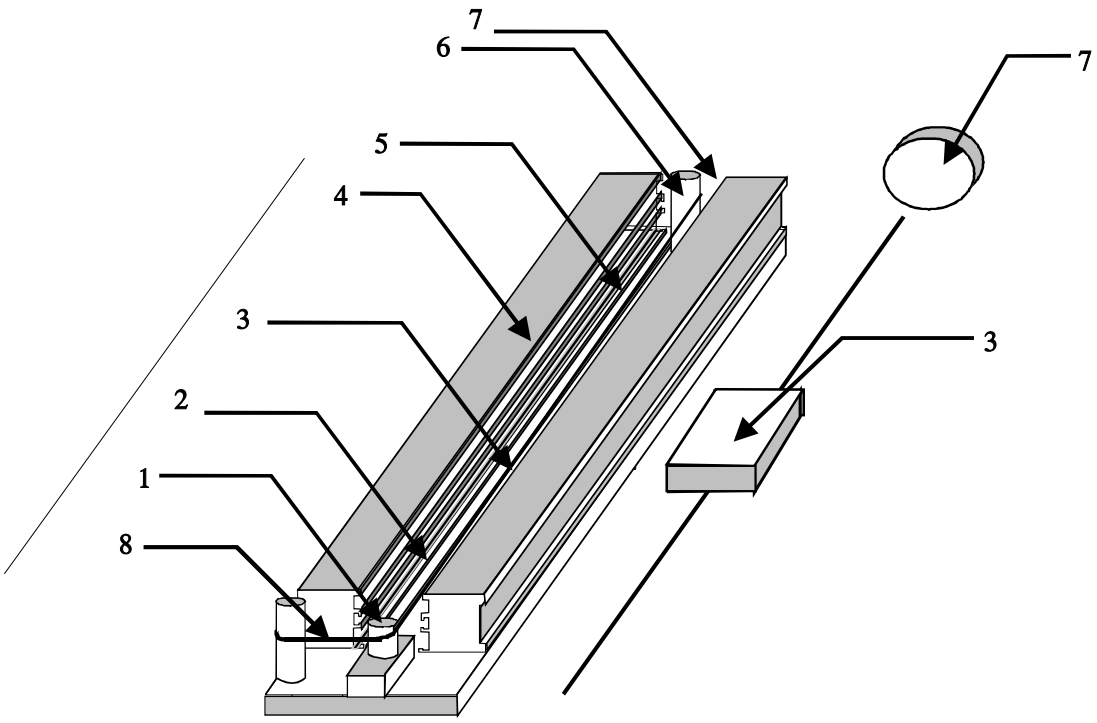


Fig. 7.3

Microfonul poate fi deplasat de-a lungul sectorului gradat, cu ajutorul unui motor de tip pas

cu pas (1) care deplasează echipamentul prin intermediul unui fir (8) întins şi tensionat. Echipamentul mobil culisează cu ajutorul unor ghidaje (5), fiind direcționat cu ajutorul unor elemente fixe (6).

Difuzorul (7) se leagă la generatorul de semnal G.S. (fig. 3), iar în faţa difuzorului se așază microfonul M.

Undele sonore, care ajung la microfon, produc oscilații de natură electrică, a căror frecvență este egală cu frecvența oscilațiilor electrice date de difuzor. Oscilațiile electrice, date de microfon și difuzor, se aplică, prin intermediul unor amplificatoare A, plăcilor de deviație pe orizontală și pe verticală ale unui osciloscop.

Ca urmare, pentru o distanţă oarecare z_0 dintre difuzor și microfon, va apărea pe ecranul osciloscopului o elipsă a cărei formă va depinde de diferența de fază dintre oscilații. Dacă această distanţă se schimbă, deplasând microfonul, traiectoria se va schimba (se va roti). Prin mărirea distanței dintre microfon și difuzor cu o distanţă egală cu lungimea de undă a undei sonore, diferența de fază a oscilațiilor aplicate la osciloscop se va mări cu 2π. Așadar, dacă distanta dintre microfon și difuzor este:

$$z_1 = z_0 + \lambda, \qquad (7.6)$$

elipsa de pe ecranul osciloscopului va fi identică cu cea obținută pentru distanta z_0.

În felul acesta, cea mai mică distantă, z_{min} dintre două poziții succesive ale microfonului, pentru care pe ecranul osciloscopului traiectoria efectuează o rotație completă, este lungimea de undă a sunetului în aer:

$$\lambda_S = z_{min} = z_1 - z_0 \qquad (7.7)$$

Dacă prin mărirea distanței dintre difuzor și microfon de la z_0 la z_n traiectoria efectuează n rotații complete, distanţa dintre prima și ultima poziție a microfonului este:

$$z_{max} = n\lambda_s = z_n - z_0 \qquad (7.8)$$

Introducând această expresie a lui λ_S în relația (7.4), vom obține:

$$v = \lambda_S \nu = z_{min}\,\nu = \frac{z_{max}}{n}\,\nu\,. \qquad (7.9)$$

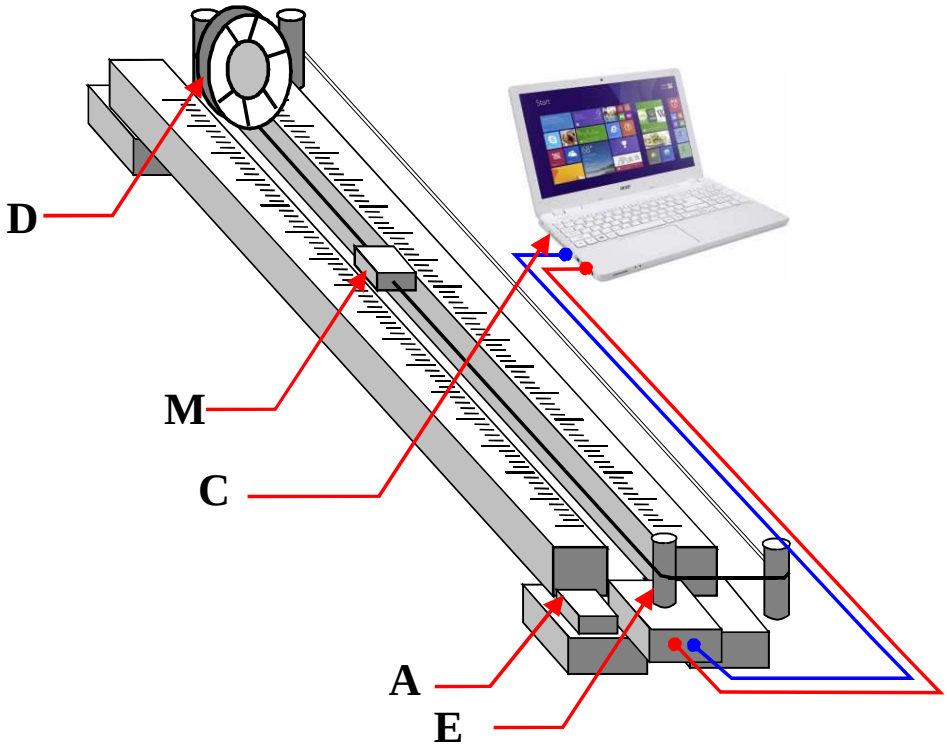


Fig. 7.4

3. Modul de lucru

1) Se montează dispozitivul din figura 7.4, poziționând microfonul pe bancul din apropierea difuzorului, folosind interfața dedicată.
2) Se pun în funcțiune osciloscopul, generatorul de semnal din cadrul interfeței și se reglează luminozitatea și claritatea imaginii pe osciloscop.
3) Se setează generatorul de semnal la o frecvență de 2000 Hz și se reglează amplitudinea semnalului cu ajutorul controlului interfeței.
4) Cu ajutorul interfeței care rulează pe computer, se deplasează microfonul M până când se obține pe ecranul osciloscopului o elipsă raportată la axele de coordonate. Pentru acuratețea măsurătorilor, se alege poziția pentru care elipsa se reduce la un segment de dreaptă. Se citește poziția z_0 a microfonului pe banc, la reperul fixat pe tija acestuia şi se introduce această valoare în programul ce controlează dispozitivul experimental.
5) Se îndepărtează microfonul de difuzor până când se regăsește același segment de dreaptă, altfel spus, până când traiectoria a efectuat o rotație completă. Se notează poziția acestuia pe banc, z_1.
6) Depărtând, în continuare, microfonul de difuzor, se notează pozițiile de pe banc ale microfonului pentru care traiectoria a efectuat *n* rotații complete.
7) Se determină z_{min} și z_{max}.
8) Se repetă măsurătorile de la punctele anterioare pentru frecvenţe cuprinse între 2000 Hz și 3000 Hz.
9) Cu relația (7.9) se calculează viteza sunetului folosind valorile medii pentru z_{min} și z_{max}.
10) Rezultatele se trec în tabel. Se calculează valoarea medie a vitezei $\bar{v}$.

Nr. crt.	υ (Hz)	z_0 (m)	n	z_n (m)	z_{min} (m)	z_{max} (m)	v (m/s)
1							
2							
3							
4							
5							
6							

4. Modelarea numerică

Modelarea numerică a unui astfel de sistem supus la oscilații perpendiculare se bazează pe construirea unui model dinamic pentru ecuațiile (7.1) la care să se ţină cont de defazajul descris de relația (7.3).

Astfel, considerând ecuația unui oscilator armonic linear, procedeul descris mai jos se bazează pe considerarea unui algoritm matematic de integrare a ecuațiilor de mișcare, ținând cont de defazajul creat de distanţa suplimentară dintre generator şi receptor.

Astfel, vom lua în considerare o valoare de eșantionare a timpului - Δt suficient de mică şi acceptabilă pentru a putea calcula, pas cu pas, pornind de la o stare inițială descrisă la un moment de timp inițial t_0 de elongațiile x_0 şi y_0 respectiv de vitezele momentane aferente pe cele două axe Ox şi respectiv Oy, elongațiile şi vitezele la orice alt moment de timp ulterior: $x = x(t)$, $y = y(t)$ respectiv $v_x = v_x(t)$ si $v_y = v_y(t)$.

In acest sens, pentru a descrie numeric şi mecanic evoluția stării de mișcare a sistemului – elongaţiile şi vitezele momentane ale oscilatiilor la un anumit moment de timp ulterior, este necesară precizarea următoarelor mărimi fizice: masa corpului de proba m_1, constanta de elasticitate aferentă mediului prin care se propagă unda trasnmisă (această propagare fiind modelată cu ajutorul ecuației undei plane şi folosind constante de elasticitate egale pentru un sistem de resorturi k_1 respectiv k_2 considerate din motive de comoditate identice, elongaţiile inițiale de-a lungul axei Ox - x_0 respectiv de-a lungul axei Oy - y_0, și respectiv vitezele inițiale ale oscilatiilor de-a lungul axei Ox - v_{0x} respectiv de-a lungul axei Oy - v_{0y}.

Neglijând pentru început forțele de frecare şi rezistență, vom putea calcula cu ajutorul mărimilor fizice mai sus precizate, valorile forțelor elastice echivalente de-a lungul axei Ox: folosind relația $F_{el1} = k_1 x_0$ respectiv de-a lungul axei Oy folosind relația $F_{el2} = k_1 y_0$ și mai departe, valorile acceleraţiilor momentate pe fiecare axă $a_x = F_{el1}/m$ - respectiv $a_y = F_{el2}/m$.

Considerând starea inițială a sistemului la momentul de timp t descrisă de elongațiile considerate a fi ? coordonatele $x_0(m)$ şi $y_0(m)$respectiv vitezele momentane $v_{0x}(m/s)$ şi respectiv $v_{0y}(m/s)$, vom putea calcula, pentru intervalul de timp Δt ales ca interval de timp pentru rezoluția temporală, valorile vitezelor momentate şi respectiv valorile elongaţiilor corpului la momentul de timp $t + \Delta t$ folosind expresia:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad v_x = v_{0x} + a_x \Delta t \tag{7.10}$$

şi, în mod echivalent,

$$a_y = \frac{v_y - v_{0y}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad v_y = v_{0y} + a_y \Delta t \tag{7.11}$$

Vom putea calcula apoi distanţele parcurse pe cele două axe între cele două momente de timp

$$v_{med} = d_x / \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad d_x = v_{med} \Delta t = (v_x + v_{0x})/2\Delta t \tag{7.12}$$

şi, în mod echivalent,

$$v;_{med} = d_y / \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad d_y = v;_{med}\, \Delta t = (v_y + v_{0y})/2\Delta t \tag{7.13}$$

Cu ajutorul expresiilor (7.12) şi (7.13), vom putea apoi calcula elongaţiile finale la momentul de timp $t + \Delta t$.

In acest sens, folosind programul de calcul tabelar Excel, foaia de calcul va putea fi organizată în felul următor (Fig. 7.5.a si Fig. 7.5.b):

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile de calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Dt [s]	t[s]	m[kg]	k1 [N/m]	ω 1 (rad/s)	x[m]	v x [m/s]	F el1 [N]	a1 [m/s^2]	v f [m/s]	d [m]	x f [m]
0.001	0	0.1	2	4.47214	0.05	0	0.1	1	0.001	0.0000005	0.05
0.001	0.001	0.1	2	4.47214	0.05	0.001	0.1	0.99999	0.002	1.5E-06	0.05

Fig. 7.5.a – Setul de parametrii care descriu starea sistemului mecanic pentru simulare numerică

L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
x f [m]	k 2 [N/m]	w 2 [rad/s]	y [m]	v y [m/s]	F el2 [N]	a y [m/s^2]	v yf [m/s]	d y [m]	y f [m]
0.05	5	7.07107	0.05	-0.001	0.25	2.5	0.0015	0.00000025	0.05
0.05	5	7.07107	0.05	0.0015	0.25	2.49999	0.004	2.75E-06	0.05

Fig. 7.5.b - Setul de parametrii care descriu starea sistemului mecanic pentru simulare numerică

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile de calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare (Fig. 7.5.a si Fig. 7.5.b):

Nr. crt.	Coloana	Variabila	Descriere	Mod de utilizare
1.	A.	$\Delta t(s)$	Specifică intervalul de timp dintre două stări succesive.	Se introduce în căsuța A2 o valoare numerică (de exemplu 0.01 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă) =A2 ↵
2.	B.	$t(s)$	Reprezintă timpul curent i.e. ordonează stările sistemului $t_k = t_{k-1} + \Delta t$	La fiecare pas, se face incrementarea cu intervalul de timp introdus în coloana A B3=B2+A2 ↵
3.	C.	$m(kg)$	Valoarea masei corpului supus oscilațiilor.	Se introduce în căsuța C2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă): =C2 ↵
4.	D.	$k_1(N/m)$	Reprezintă valoarea constantei elastice pentru resort pe axa Ox.	Se introduce în căsuța D2 valoarea numerică corespunzătoare şi se copiază în toată coloana relatia introdusă: =C2 ↵
5.	E.	$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$	Reprezintă valoarea constantei elastice pentru resort pe axa Ox.	Se calculează prin evaluarea radicalului raportului dintre valoarea introdusă în căsuța D2 şi cea înregistrată în căsuța C2, respectiv prin introducerea funcției necesare în cazul unui coeficient de frecare cunoscut. Relatia introdusa se copiază în toată coloana: =sqrt(D2/C2)↵
6.	F.	$x_1(m)$	Reprezintă poziția din care va fi lăsat liber corpul ce oscilează.	Se introduce în căsuța J2 valoarea numerică : =J2 ↵
7.	G.	$v_1(m/s)$	Reprezintă valoarea vitezei inițiale pentru corpul ce oscilează liber. Această valoare va fi considerată a fi nulă.	Se introduce în căsuța K2 valoarea numerică : =K2 ↵
8.	H.	$F_{el1}(N)$	Reprezintă valoarea forței elastice ce acționează asupra corpului care oscilează liber.	Se calculează produsul radicalului dintre valoarea introdusă în căsuța D2 şi cea înregistrată în căsuța F2: Relatia introdusa se copiază în toată coloana : = D2F2 ↵
9.	I.	$a_{teor}(m/s^2$	Reprezintă valoarea accelerației de-a lungul axei Ox a corpului care oscilează liber.	Se introduce în căsuța I2 relația de calcul pentru accelerația teoretică : =H2/c2↵

10.	J.	$v_f(m/s)$	Reprezintă viteza *finala* pe axa Ox pe care o va avea corpul lăsat sa oscileze liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Aceasta viteza se va actualiza la fiecare pas si va reprezenta *cel de al doilea parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce in căsuța P2 formula de calcul pentru viteza finala aferenta intervalului de timp Δt din iterația curenta: $v_f = v_{crt} + a\Delta t$ care corespunde valorii vitezei finale =G2+I2*A2 ┘
11.	K.	$d(m)$	Reprezintă distanta parcursă pe axa Ox in intervalul de timp Δt *din iterația curenta,* Aceasta distanta se va actualiza la fiecare pas	Se introduce in căsuța Q2 formula de calcul distanta parcursă in intervalul de timp Δt *din iterația curenta,*: $d_x = \frac{(v_x + v_{0x})}{2}\Delta t$ (8.10) care corespunde valorii vitezei medii pe acest interval =(G2+J2)/2*A2 ┘
12.	L.	$x_f(m)$	Reprezintă poziția *finala* pe axa Ox pe care o va avea corpul de masa lăsat liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Aceasta poziție se va actualiza la fiecare pas si va reprezenta *primul parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce in căsuța L2 formula de calcul pentru poziția *finala* pe care o va avea corpul de masa m_1 *din iterația curenta,*: $x_f = x_{crt} + d$ (8.11) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =K2+F2 ┘
13.	M.	$k_2(N/m)$	Reprezintă valoarea constantei elastice pentru resortul pe axa Oy	Se introduce in căsuța M2 valoarea numerica corespunzătoare si se copiază in toata coloana relatia introdusa: =C2 ┘
14.	N.	$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$	Reprezintă valoarea constantei elastice pentru resortul pe axa Oy	Se calculează prin evaluarea radicalului raportului dintre valoarea introdusa in căsuța M2 si cea înregistrata in căsuța C2, respectiv prin introducerea funcției necesare in cazul unui coeficient de frecare cunoscut. Relația se copiază in toata coloana valoarea introdusa): =sqrt(M2/C2)┘
15.	O.	$y_0(m)$	Reprezintă poziția de a lungul axei Oy din care va fi lăsat liber corpul ce oscilează.	Se introduce in căsuța O2 valoarea numerica : =O2 ┘

16.	P.	$v_{0y}(m/s)$	Reprezintă valoarea vitezei inițiale de-a lungul axei Oy pentru corpul ce oscilează liber. Această valoare va fi considerată a fi nulă.	Se introduce în căsuța P2 valoarea numerică : =P2 ↵
17.	Q.	$F_{el2}(N)$	Reprezintă valoarea forței elastice ce acționează asupra corpului care oscilează liber.	Se calculează prin produsul radicalului dintre valoarea introdusă în căsuța M2 şi cea înregistrată în căsuța O2: Relația se copiază în toată coloana: = M2O2 ↵
18.	R.	$a_y(m/s^2)$	Reprezintă valoarea accelerației de-a lungul axei Oy a corpului care oscilează liber.	Se introduce în căsuța R2 relația de calcul pentru accelerația teoretică : =Q2/C2↵
19.	S.	$v_{yf}(m/s)$	Reprezintă viteza *finală* pe axa OY pe care o va avea corpul lăsat să oscileze liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această viteză se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *cel de al doilea parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța P2 formula de calcul pentru viteza finală aferentă intervalului de timp Δt din iterația curentă: $v_{yf} = v_{0y} + a_y \Delta t$ care corespunde valorii vitezei finale =P2+R2*A2 ↵
20.	T.	$d_y(m)$	Reprezintă distanţa parcursă pe axa Ox în intervalul de timp Δt *din iterația curentă.* Această distanţă se va actualiza la fiecare pas.	Se introduce în căsuța T2 formula de calcul, distanta parcursă în intervalul de timp Δt *din iterația curentă*: $d_y = \frac{(v_y + v_{0y})}{2}\Delta t$ (8.11) care corespunde valorii vitezei medii pe acest interval =(S2+P2)/2*A2 ↵
21.	U.	$y_f(m)$	Reprezintă poziția *finală* pe axa Oy pe care o va avea corpul de masă lăsat liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această poziție se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *primul parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța L2 formula de calcul pentru poziția *finală* pe care o va avea corpul de masa m_1 *din iterația curentă*: $y_f = y_0 + d_y$ (8.11) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =O2+T2 ↵

Observație: pentru fiecare iterație în parte, parametrii finali x_f şi respectiv v_f reprezintă

parametrii inițiali x_f respectiv v_f pentru următoarea iterație. Acest fapt implică necesitatea ca la fiecare iterație să fie adăugate următoarele relații de transfer:

E3=L2;┘ G3=J2;┘ respectiv O3=U2┘ ; P3=S2┘ ;

Si apoi aceste relații pot fi copiate în toată foaia de calcul.

La final se compară rezultatele obținute numeric, pe baza integrațiilor efectuate pas cu pas cu cele determinate analitic, folosind relațiile (7.10) şi (7.11) şi se evaluează precizia rezultată.

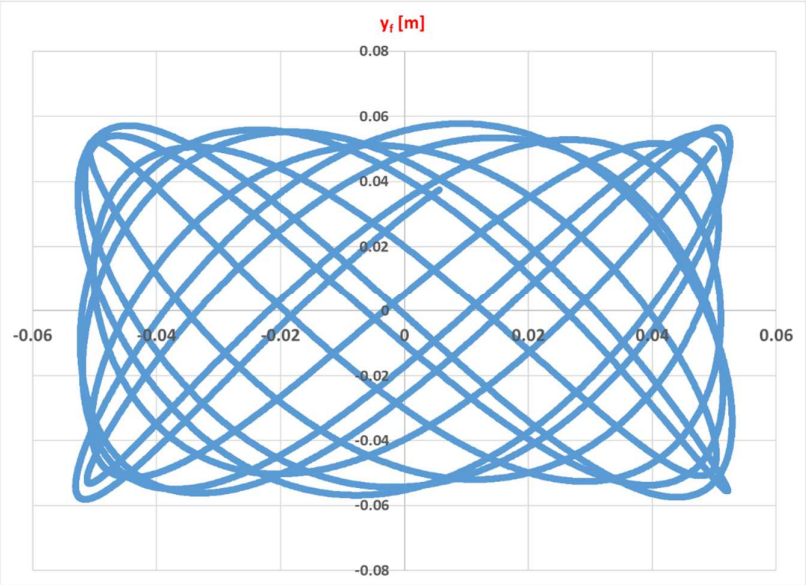


Fig. 7.6.a – Reprezentarea rezultatului obținut pe baza simulării numerice

K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
v_1(m/s)	X crt (m)	v crt(m/s)	X start(m)	X stop (m)	vf (m/s)	d (m)	x_{fin} (m)	Δt_1(s)	Δt_2(s)
0	1.39473	0.58947	1.4	1.85	0.59536	0.00592	1.40066	1.00889	1.5952
0	1.40066	0.59536	1.4	1.85	0.60126	0.00598	1.40664	1.00889	1.5952
0	1.79899	0.90778	1.4	1.85	0.91368	0.00911	1.80810	1.00889	1.5952
0	1.80810	0.91368	1.4	1.85	0.91957	0.00917	1.81726	1.00889	1.5952

Fig. 7.6.b – Setul de parametrii care descriu sistemul mecanic pentru comparația dintre simularea numerică şi valorile exacte obținute pentru configurația dată

5. Identificare de sistem

Procesul de identificare a sistemului mecanic are ca scop determinarea constantelor ce permit descrierea legii de mișcare şi obținerea diagramelor caracteristice.

5.a. Senzorii utilizații

Se folosește un generator de semnal folosind o placă de dezvoltare Arduino, un difuzor şi un microfon. Generatorul de semnal poate fi un dispozitiv separat (Fig. 7.7) sau poate fi un generator realizat cu ajutorul unui software dedicat (pentru acest aspect se va consulta documentația pe site-ul laboratorului) sau cu ajutorul unui player media integrat în interfața programului cu ajutorul căruia se generează sunete de frecvenţe controlate.

In cele ce urmează, vom considera ultima soluție, şi anume interfața care controlează frecvenţa şi amplitudinea semnalului generat.

Elementul folosit pentru captarea semnalului este un microfon care este cuplat prin intermediul unui preamplificator la o placă de achiziții Arduino.

Amplificatorul de microfon combină un microfon cu capsulă Electret cu un amplificator operațional MAX4466 optimizat pentru a fi utilizat în aplicațiile pre-amplificatorului de microfon.

Specificații:

Tensiune de alimentare: 2.4v-5v
Ieșire: Rail-to-Rail - până la 5Vp-p
Răspunsul de frecvență: 20Hz - 20 KHz
Valoare reglabilă 25x-125x

Asamblare:

Placa vine cu toate componentele de montare pe suprafață pre-lipite. Banda de antet inclusă poate fi lipită pentru o utilizare convenabilă pe panou de bord sau cu conectori de 0,1 țoli.

Cablarea:

Amplificatorul are doar 3 conexiuni, astfel încât cablarea este simplă:

GND -> GND
VCC -> 3.3V
OUT -> AIN0

Tensiunea VCC poate fi în intervalul 2,4-5VDC. Pentru cea mai bună performanță, folosim pinul de 3.3V pentru că este cea mai "cea mai silențioasă" sursă de alimentare de pe Arduino.



Fig. 7.7 – Generatorul utilizat pentru producerea semnalului audio

5b. Instrucțiuni de utilizare

Măsurarea nivelurilor de zgomot

Semnalul audio de la ieșirea amplificatorului este o tensiune variabilă. Pentru a măsura nivelul sunetului, trebuie să luăm mai multe măsurători pentru a găsi întinderea minimă și maximă sau "amplitudinea vârf la vârf" a semnalului.

În exemplul de mai jos, alegem o fereastră de probă de 50 de milisecunde. Acest lucru este suficient pentru a măsura nivelurile sonore ale frecvențelor de la 20 Hz până la limita inferioară a auzului uman.

Mai jos este prezentată structura programului de analiză a nivelului semnalului audio

```
/*****************************************
Example Sound Level Sketch for the
Microphone Amplifier
*****************************************/

const int sampleWindow = 50; // Sample window width in mS (50 mS = 20Hz)
unsigned int sample;

void setup()
  {
     Serial.begin(9600);
  }


  void loop()
  {
     unsigned long startMillis= millis();  // Start of sample window
```

```
18.      unsigned int peakToPeak = 0;   // peak-to-peak level
19.
20.      unsigned int signalMax = 0;
21.      unsigned int signalMin = 1024;
22.
23.      // collect data for 50 mS
24.      while (millis() - startMillis < sampleWindow)
25.      {
26.         sample = analogRead(0);
27.         if (sample < 1024)  // toss out spurious readings
28.         {
29.            if (sample > signalMax)
30.            {
31.               signalMax = sample;  // save just the max levels
32.            }
33.            else if (sample < signalMin)
34.            {
35.               signalMin = sample;  // save just the min levels
36.            }
37.         }
38.      }
39.      Serial.println(volts);
}
```

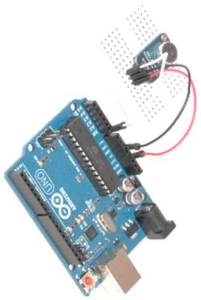


Fig. 7.8 – Cuplarea microfonului

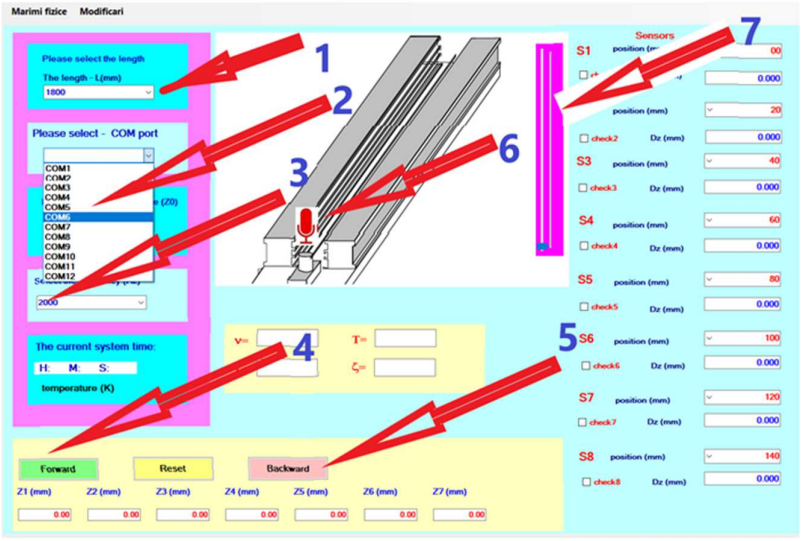


Fig. 7.9 – interfata grafica

5.b Interfața hardware utilizată

Interfața este prezentată în figura 7.7. Elementele de control mecanic din dispozitivul experimental sunt controlate cu ajutorul interfeței grafice.

5.c Interfața grafică utilizată

Interfața grafică a programului utilizat este realizată în mediul de programare Visual Studio C#. Rolurile interfeței grafice sunt următoarele:

a) *preia datele de pe magistrala serială (Serial Monitor) de la placa de achiziție Arduino –i.e. memorează momentele de timp la care este activat senzorul microfon* existent și se construiește o reprezentare grafică pentru nivelul semnalului recepționat și în funcție de defazajul identificat.

5.d Prezentarea interfeței grafice utilizate şi a modului de operare

In figura de mai jos este prezentată schematic interfața grafică a programului utilizat. In panoul din dreapta sunt butoanele care introduc pozițiile senzorilor.

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L07

Lucrarea 8

COMPUNEREA OSCILAȚIILOR PERPENDICULARE

I. Considerații teoretice

Considerând două oscilații armonice perpendiculare de aceeași frecvență, descrise de ecuațiile:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi) \qquad şi \qquad y = b\cos\omega t\,, \tag{8.1}$$

Considerând cazul unui punct material supus simultan la cele două legi de mișcare, prima în lungul axei Ox şi a doua în lungul axei Oy, vom putea scrie, în mod echivalent

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t + \varphi) \\ y = a\cos\omega t \end{cases},$$

Sau, echivalent,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi \\ \dfrac{y}{b} = \cos\omega t \end{cases}$$

Din relațiile (8.2), vom putea scrie expresiile echivalente

$$\begin{cases} \sin\omega t\sin\varphi = \cos\omega t\cos\varphi - \dfrac{x}{a} \\ \cos\omega t\sin\varphi = \dfrac{y}{b}\sin\varphi \end{cases}$$

Care va determina, prin ridicare la pătrat şi adunare, expresia

$$(\sin\omega t\sin\varphi)^2 + (\cos\omega t\sin\varphi)^2 = \left(\cos\omega t\cos\varphi - \frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\sin\varphi\right)^2$$

Sau, echivalent

$$\left(\cos\omega t\cos\varphi - \frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\sin\varphi\right)^2 = (\sin\varphi)^2$$

Ceea ce determină scrierea unei relații finale sub forma:

$$\left(\frac{y}{b}\cos\varphi - \frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\sin\varphi\right)^2 = (\sin\varphi)^2$$

Echivalent

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2\cos^2\varphi + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\frac{x}{a}\frac{y}{b}\cos\varphi + \left(\frac{y}{b}\right)^2\sin^2\varphi = (\sin\varphi)^2 \tag{8.2}$$

Ceea ce determină posibilitatea scrierii oscilației rezultante obținută prin eliminarea timpului sub forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi \tag{8.3}$$

Această relație este ecuația unei elipse înscrisă în dreptunghiul cu laturile 2a și 2b, astfel încât $-a \le x \le +a$ - și $-b \le y \le +b$. In figurile de mai jos sunt reprezentate câteva cazuri particulare în funcție de unghiul de defazaj φ

Pentru valoarea $\varphi = 0\pi$, se obține o elipsă care degenerează într-o dreaptă (Fig. 8.1.a). Pentru valorile diferite ale acestui unghi de defazaj, orientarea elipsei se modifică, (Fig. 8.1.b - Fig. 8.1.i), semiaxele elipsei fiind orientate diferit. Când $\varphi = \pi/2$ elipsa este orientată cu semiaxele de-a lungul axelor Ox și Oy (Fig. 8.1.e).

Pentru $\varphi = k\pi$, elipsa degenerează într-o dreaptă.

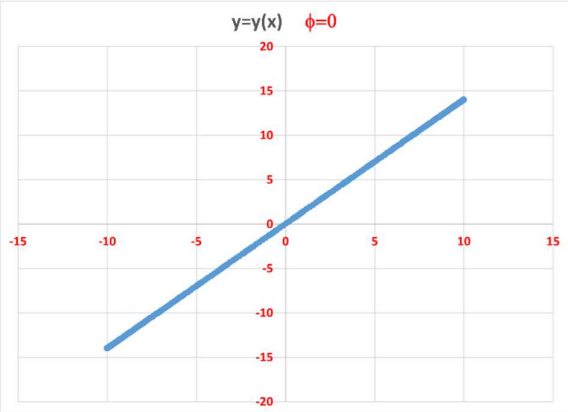


Fig. 8.1.a

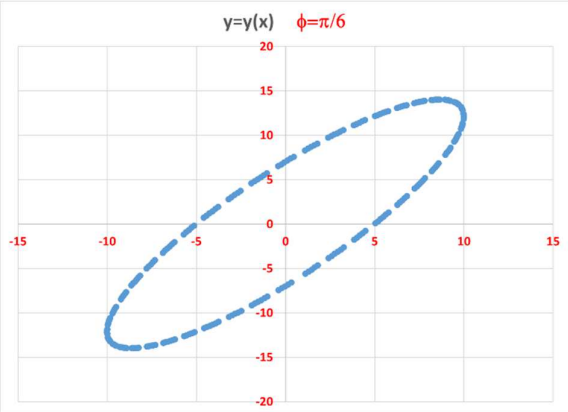


Fig. 8.1.b

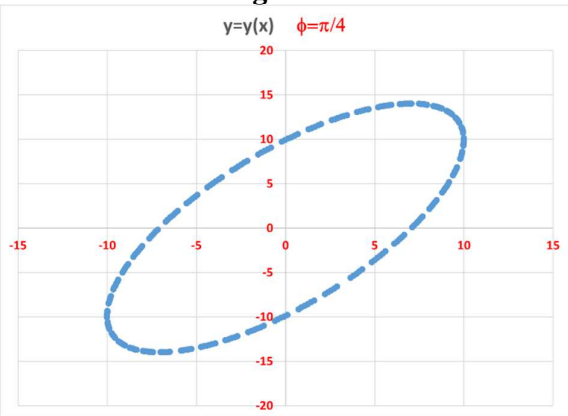


Fig. 8.1.c

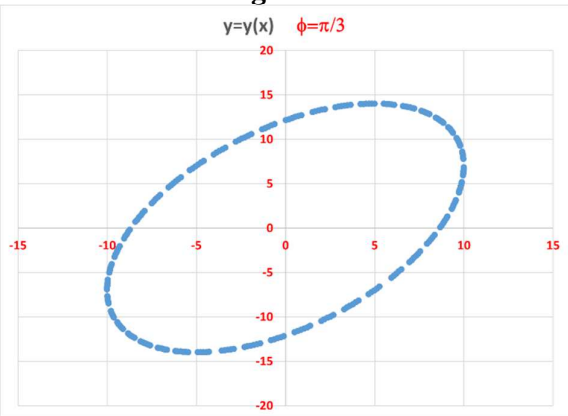


Fig. 8.1.d

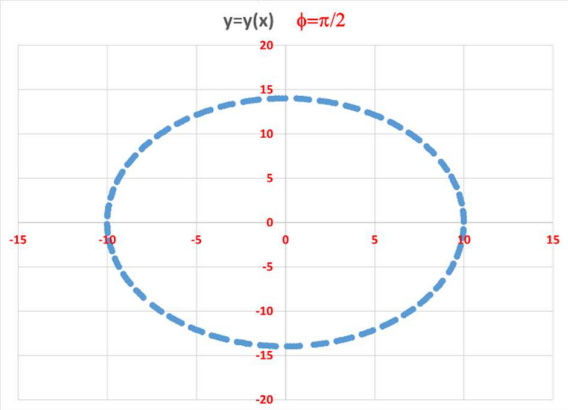


Fig. 8.1.e

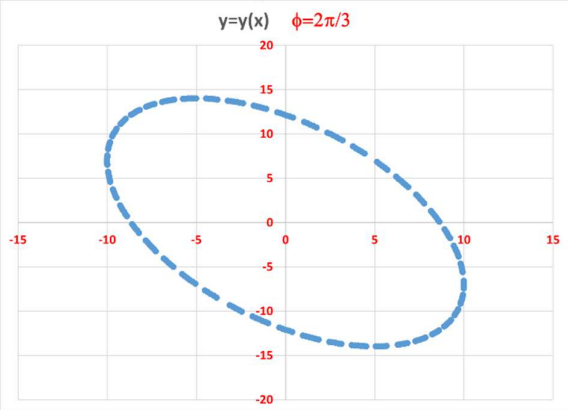


Fig. 8.1.f

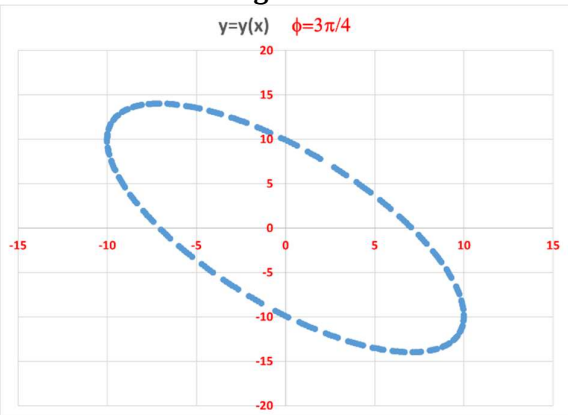


Fig. 8.1.g

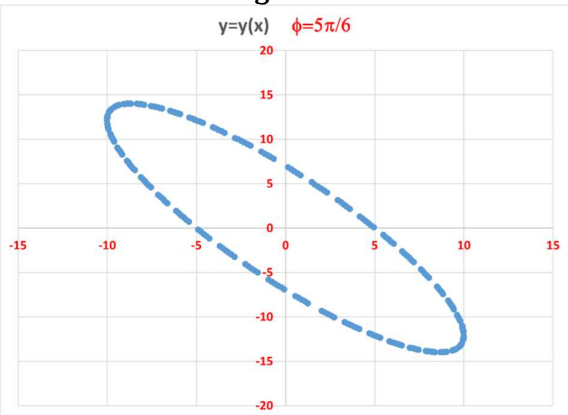


Fig. 8.1.h

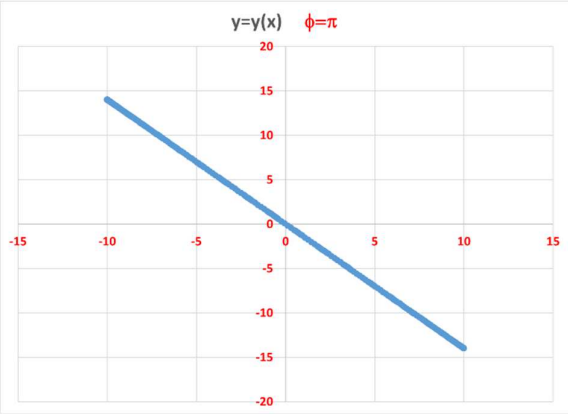


Fig. 8.1.i

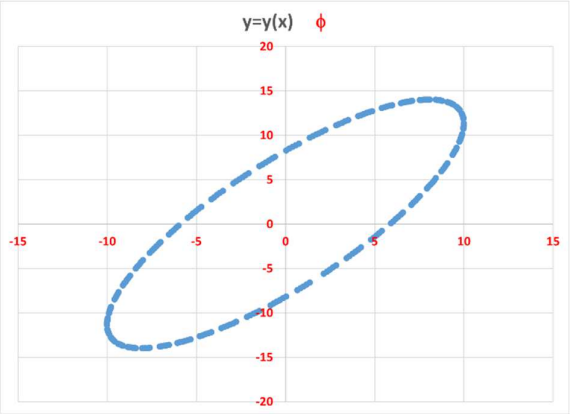


Fig. 8.1.j

Forma concretă a elipsei depinde de defazajul φ.

In cazul general, dacă se compun două oscilații armonice perpendiculare având frecvențe diferite :

$$x = a\sin(\omega_x t + \varphi) \qquad \text{şi} \qquad y = b\sin(\omega_y t + \varphi) \tag{8.4}$$

se obține o oscilație rezultantă de formă complicată. Dacă însă raportul frecvențelor este un număr rațional

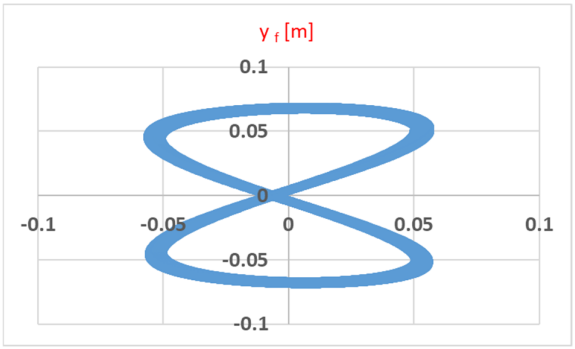


Fig. 8.2.a

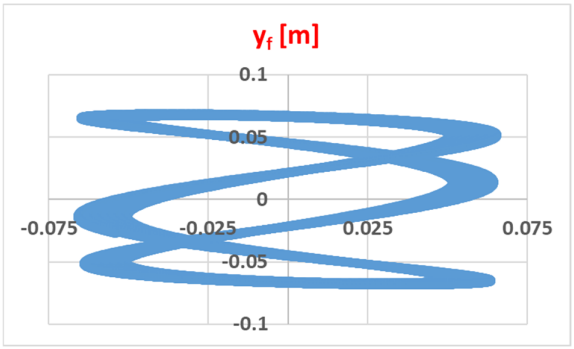


Fig. 8.2.b

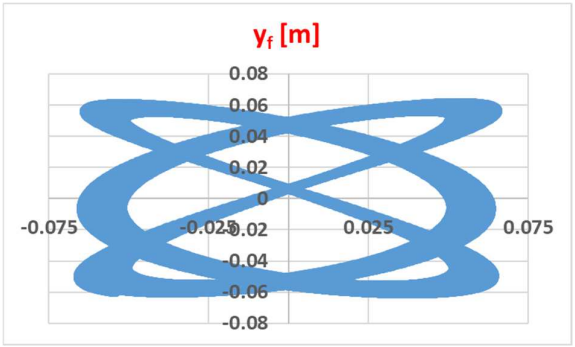


Fig. 8.2.c

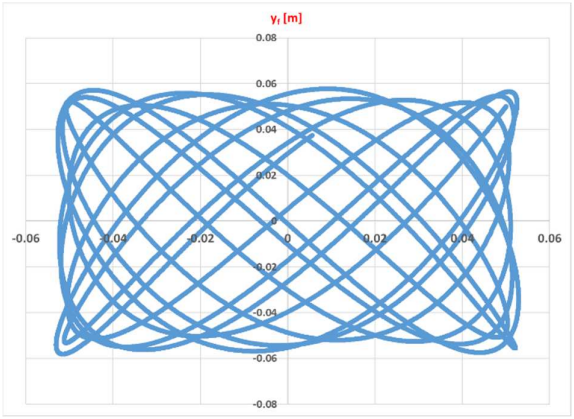


Fig. 8.2.d

$$\frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{n_y}{n_x} \qquad , n_x, n_y \in \mathrm{N} \tag{8.5}$$

traiectoria rezultantă este o curbă închisă. Asfel, când $\nu_x / \nu_y = 2$, se obţine o figură ce prezintă o

traiectorie rezultantă sub forma unei curbe închise cu doi lobi (Fig. 8.2.a). Când $\nu_x/\nu_y = 3$, se obţine o traiectorie rezultantă sub forma unei curbe închise cu trei lobi (Fig. 8.2.b). Când $\nu_x/\nu_y = 3/2$ respectiv $\nu_x/\nu_y = 5/3$, se obţine o traiectorie rezultantă sub forma unei curbe închise cu complexe (Fig. 8.2.c si Fig. 8.2.d).

O caracteristică importantă a curbelor închise obținute, numite figuri Lissajous, este aceea că ating de n_y ori extremităţile $x = \pm a$ şi de n_x ori extremităţile $y = \pm b$. Astfel, cunoscându-se raportul n_y/n_x, din relaţia (8.5), se poate determina frecvenţa ν_y a unei oscilaţii, atunci când este cunoscută valoarea ν_x.

2. Dispozitivul experimental

Vizualizarea oscilaţiei rezultante prin compunerea a două oscilaţii perpendiculare este realizată cu ajutorul unui osciloscop catodic. Pentru vizualizarea figurilor Lissajous şi determinarea unei frecvenţe necunoscute a unui semnal sinusoidal, se realizează montajul din figura 8.3. Cele două generatoare se conectează la bornele Y şi respectiv X, ale unui osciloscop catodic. Primul generator este un emițător de laborator de joasă frecvenţă (Fig 8.4), iar al doilea este un generator simulat, folosind un laptop/computer şi aplicaţia dedicată.

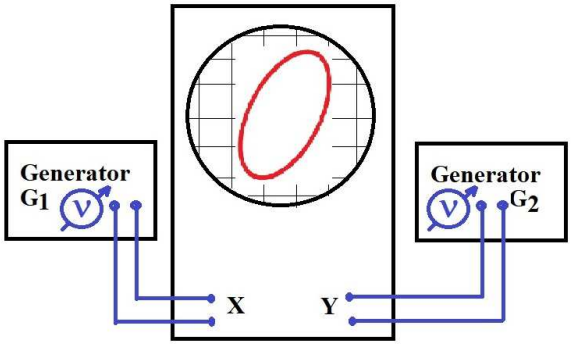


Fig. 8.3

3. Modul de lucru

1) Se realizează montajul din figura 8.3 pentru vizualizarea figurilor Lissajous. Se porneşte aplicaţia pentru generarea unui semnal de frecvenţă cunoscută pentru generatorul G_2. Se consideră valori ale frecvenţei în domeniul 10Hz - 200 Hz (de preferat valorile care pot forma rapoarte uşor de evaluat $\nu_y = 20Hz, 25Hz, 30Hz, 40Hz, 50Hz$, etc) (Fig.8.4).

2) Se reglează frecvenţa generatorului cu frecvenţă cunoscută până se obţine o imagine stabilă pe ecranul osciloscopului.

3) Se determină punctele de intersecţie n_y ale figurii Lissajous cu o dreaptă care trece prin $x = x_{max}$ şi punctele n_x cu o dreaptă care trece prin $y = y_{max}$.

4) Se determină frecvenţa necunoscută ν_x aplicând relaţia (8.5).

5) Rezultatele se trec în tabelul următor:

Nr. crt.	ν_x (Hz)	n_x	n_y	ν_y (Hz)
1.				
2.				
3.				
4.				

5.				
6.				
7.				



Fig. 8.4

4. Modelarea numerică

Modelarea numerica a unui sistem supus la oscialţii perpendiculare se bazează pe construirea unui model dinamic pentru ecuaţiile (8.1).

Astfel, la fel ca în cazul lucrării anterioare, considerând faptul că integrarea numerică a ecuației unui oscilator linear se bazează pe considerarea unui procedeu matematic care poate realiza calcularea stării de mișcare a unui corp supus la două oscilatii perpendiculare, vom descrie modul în care se poate face determinarea pentru un moment de timp ulterior t_f a poziției corpului x_f şi respectiv a vitezei v_f sale cunoscând poziția corpului x_0 şi respectiv viteza inițială v_0 la un moment de timp anterior t_0.

In acest sens, pentru a descrie numeric evoluția stării de mișcare sistemului – poziția şi viteza corpului la un anumit moment de timp ulterior, este necesară precizarea următoarelor mărimi fizice: masa corpului m, constantele de elasticitate ale celor două resorturi k_1 respectiv k_2, poziţiile iniţiale ale corpului de-a lungul axei Ox - x_0 respectiv de-a lungul axei Oy - y_0, vitezele iniţiale ale corpului de-a lungul axei Ox v_{0x} respectiv de-a lungul axei Oy - v_{0y}. Nu în ultimul rând, trebuie precizată mărimea intervalului de timp Δt (rezoluția temporală) dintre stările succesive ale sistemului.

Neglijând forțele de frecare şi rezistență, vom putea calcula cu ajutorul mărimilor fizice mai sus precizate, valorile forţelor elastice de-a lungul axei Ox: $F_{el1} = k_1 x_0$ respectiv de-a lungul axei Oy - $F_{el2} = k_1 y_0$ şi mai departe, valoarele acceleraţiilor corpului pe fiecare ax¬a $a_x = F_{el1}/m$ - respectiv $a_y = F_{el2}/m$.

Considerând starea inițială a sistemului descrisă de coordonatele $x_0(m)$ şi $y_0(m)$respectiv vitezele inițiale ale corpului $v_{0x}(m/s)$ şi respectiv $v_{0y}(m/s)$, vom putea calcula, pentru intervalul de timp Δt ales ca interval de timp pentru rezoluția temporală, valorile vitezei curente și respectiv ale poziției curente a corpului după fiecare astfel de interval de timp (Fig. 1.5.a si Fig. 1.5.b):

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad v_x = v_{0x} + a_x \Delta t \tag{8.6}$$

Şi, în mod echivalent,

$$a_y = \frac{v_y - v_{0y}}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad v_y = v_{0y} + a_y \Delta t \tag{8.7}$$

In mod analog, vom putea calcula distanţele parcurse pe cele două axe

$$v_{med} = d_x / \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad d_x = v_{med} \Delta t = (v_x + v_{0x})/2\Delta t \tag{8.8}$$

Şi, în mod echivalent,

$$v;_{med} = d_y / \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad d_y = v;_{med} \Delta t = \left(v_y + v_{0y}\right)/ 2\Delta t \tag{8.9}$$

In care am considerat viteza medie ca fiind egală cu media vitezelor –inițială şi finală din acest interval de timp.

In acest sens, folosind programul de calcul tabelar Excel, foaia de calcul va putea fi organizată în felul următor (Fig. 8.5.a si Fig. 8.5.b):

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Dt [s]	t[s]	m[kg]	k1 [N/m]	ω_1 (rad/s)	x[m]	v_x [m/s]	F_{el1} [N]	a1 [m/s^2]	v_f [m/s]	d [m]	x_f [m]
0.001	0	0.1	2	4.47214	0.05	0	0.1	1	0.001	0.0000005	0.05
0.001	0.001	0.1	2	4.47214	0.05	0.001	0.1	0.99999	0.002	1.5E-06	0.05

Fig. 8.5.a – Setul de parametrii care descriu starea sistemului mecanic pentru simulare numerică

L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
x_f [m]	k 2 [N/m]	w 2 [rad/s]	y [m]	v_y [m/s]	F_{el2} [N]	a_y [m/s^2]	v_{yf} [m/s]	d y [m]	y_f [m]
0.05	5	7.07107	0.05	-0.001	0.25	2.5	0.0015	0.00000025	0.05
0.05	5	7.07107	0.05	0.0015	0.25	2.49999	0.004	2.75E-06	0.05

Fig. 8.5.b - Setul de parametrii care descriu starea sistemului mecanic pentru simulare numerică

Astfel, pentru realizarea unei simulări numerice folosind facilitățile calcul tabelar Excel, se vor defini următoarele variabile necesare (Fig. 8.5.a şi Fig. 8.5.b):

Nr. crt.	Coloana	Variabila	Descriere	Mod de utilizare
1.	A.	$\Delta t(s)$	Specifică intervalul de timp dintre două stări succesive.	Se introduce în căsuța A2 o valoare numerică (de exemplu 0.01 şi se copiază în toată coloana valoarea introdusă) =A2 ↵
2.	B.	$t(s)$	Reprezintă timpul curent i.e. ordonează stările sistemului $t_k = t_{k-1} + \Delta t$	La fiecare pas, se face incrementarea cu intervalul de timp introdus în coloana A B3=B2+A2 ↵
3.	C.	$m(kg)$	Valoarea masei corpului supus oscilaţiilor.	Se introduce în căsuța C2 valoarea numerică şi se copiază în toată coloana: =C2 ↵
4.	D.	$k_1(N/m)$	Reprezintă valoarea constantei elastice pentru resort pe axa Ox.	Se introduce în căsuța D2 valoarea numerică corespunzătoare şi se copiază în toată coloana: =C2 ↵

5.	E.	$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$	Reprezintă valoarea constantei elastice pentru resort pe axa Ox.	Se calculează prin evaluarea radicalului raportului dintre valoarea introdusă în căsuța D2 şi cea înregistrată în căsuța C2, respectiv prin introducerea funcției necesare în cazul unui coeficient de frecare cunoscut. Relația se copiază în toată coloana: =sqrt(D2/C2)┘
6.	F.	$x_1(m)$	Reprezintă poziția din care va fi lăsat liber corpul ce oscilează.	Se introduce în căsuța J2 valoarea numerică : =J2 ┘
7.	G.	$v_1(m/s)$	Reprezintă valoarea vitezei inițiale pentru corpul ce oscilează liber. Această valoare va fi considerată a fi nulă.	Se introduce în căsuța K2 valoarea numerică : =K2 ┘
8.	H.	$F_{el1}(N)$	Reprezintă valoarea forţei elastice ce acţionează asupra corpului care oscilează liber.	Se calculează prin produsul radicalului dintre valoarea introdusă în căsuța D2 şi cea înregistrată în căsuța F2: Relația se copiază în toată coloana: = D2F2 ┘
9.	I.	$a_{teor}(m/s^2$	Reprezintă valoarea accelerației de-a lungul axei Ox a corpului care oscilează liber.	Se introduce în căsuța I2 relația de calcul pentru accelerația teoretică : =H2/c2┘
10.	J.	$v_f(m/s)$	Reprezintă viteza *finală* pe axa Ox pe care o va avea corpul lăsat să oscileze liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această viteză se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *cel de al doilea parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța P2 formula de calcul pentru viteza finală aferentă intervalului de timp Δt din iterația curentă: $v_f = v_{crt} + a\Delta t$ care corespunde valorii vitezei finale =G2+I2*A2 ┘
11.	K.	$d(m)$	Reprezintă distanţa parcursă pe axa Ox în intervalul de timp Δt *din iterația curentă.* Această distanţă se va actualiza la fiecare pas.	Se introduce în căsuța Q2 formula de calcul, distanţa parcursă în intervalul de timp Δt *din iterația curentă,*: $d_x = \frac{(v_x + v_{0x})}{2}\Delta t$ (8.10) care corespunde valorii vitezei medii pe acest interval =(G2+J2)/2*A2 ┘

12.	L.	$x_f(m)$	Reprezintă poziția *finală* pe axa Ox pe care o va avea corpul de masă lăsat liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această poziție se va actualiza la fiecare pas și va reprezenta *primul parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța L2 formula de calcul pentru poziția *finală* pe care o va avea corpul de masă m_1 *din iterația curentă*: $x_f = x_{crt} + d$ (8.11) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =K2+F2 ┘
13.	M.	$k_2(N/m)$	Reprezintă valoarea constantei elastice pentru resort pe axa Oy.	Se introduce în căsuța M2 valoarea numerică corespunzătoare şi se copiază în toată coloana: =C2 ┘
14.	N.	$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$	Reprezintă valoarea constantei elastice pentru resort pe axa Oy.	Se calculează prin evaluarea radicalului raportului dintre valoarea introdusă în căsuța M2 şi cea înregistrată în căsuța C2, respectiv prin introducerea funcției necesare în cazul unui coeficient de frecare cunoscut. Relația se copiază în toată coloana: =sqrt(M2/C2)┘
15.	O.	$y_0(m)$	Reprezintă poziția de-a lungul axei Oy din care va fi lăsat liber corpul ce oscilează.	Se introduce în căsuța O2 valoarea numerică : =O2 ┘
16.	P.	$v_{0y}(m/s)$	Reprezintă valoarea vitezei inițiale de-a lungul axei Oy pentru corpul ce oscilează liber. Această valoare va fi considerată a fi nulă.	Se introduce în căsuța P2 valoarea numerică : =P2 ┘
17.	Q.	$F_{el2}(N)$	Reprezintă valoarea forţei elastice ce acţionează asupra corpului care oscilează liber.	Se calculează prin produsul radicalului dintre valoarea introdusă în căsuța M2 şi cea înregistrată în căsuța O2: Relația se copiază în toată coloana: = M2O2 ┘
18.	R.	$a_y(m/s^2)$	Reprezintă valoarea accelerației de-a lungul axei Oy a corpului care oscilează liber.	Se introduce în căsuța R2 relația de calcul pentru accelerația teoretică : =Q2/C2┘

19.	S.	$v_{yf}(m/s)$	Reprezintă viteza *finală* pe axa OY pe care o va avea corpul lăsat să oscileze liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această viteză se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *cel de al doilea parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta*	Se introduce în căsuța P2 formula de calcul pentru viteza finală aferentă intervalului de timp Δt din iterația curentă: $v_{yf} = v_{0y} + a_y \Delta t$ care corespunde valorii vitezei finale =P2+R2*A2 ┘
20.	T.	$d_y(m)$	Reprezintă distanţa parcursă pe axa Ox în intervalul de timp Δt *din iterația curentă.* Această distanţă se va actualiza la fiecare pas.	Se introduce în căsuța T2 formula de calcul distanţa parcursă în intervalul de timp Δt *din iterația curentă*: $d_y = \frac{(v_y + v_{0y})}{2}\Delta t$ (8.11) care corespunde valorii vitezei medii pe acest interval =(S2+P2)/2*A2 ┘
21.	U.	$y_f(m)$	Reprezintă poziția *finală* pe axa Oy pe care o va avea corpul de masă lăsat liber la finalul intervalului de timp considerat Δt la finalul iterației. Această poziție se va actualiza la fiecare pas şi va reprezenta *primul parametru final al stării de mișcare care va fi transmis de la o iterație la alta.*	Se introduce în căsuța L2 formula de calcul pentru poziția *finală* pe care o va avea corpul de masa m_1 *din iterația curentă*: $y_f = y_0 + d_y$ (8.11) care corespunde unei expresii de calcul pentru acest interval =O2+T2 ┘

Observație: pentru fiecare iterație în parte, parametrii finali x_f şi respectiv v_f reprezintă parametrii inițiali x_f respectiv v_f pentru următoarea iterație. Acest fapt implică necesitatea ca la fiecare iterație trebuie adăugate următoarele relații de transfer:

E3=L2; ┘ G3=J2; ┘ respectiv O3=U2┘ ; P3=S2┘ ;

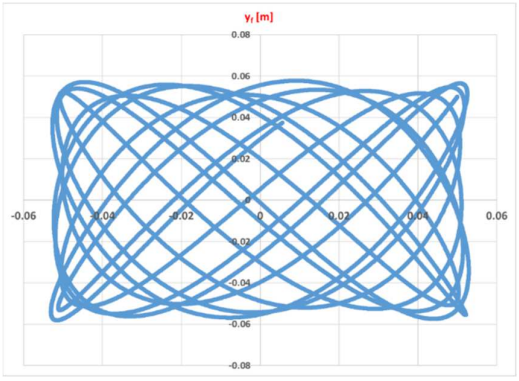


Fig. 8.6 – Reprezentarea rezultatului obţinut pe baza simularii numerice

5. Identificare de sistem

Procesul de identificare decurge ca în cazul lucrării anterioare.

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L08

Lucrarea 9

MĂSURAREA REZISTENŢELOR ELECTRICE LINIARE ŞI NELINIARE PRIN METODA AMPERMETRULUI ŞI A VOLTMETRULUI

I. Consideraţii teoretice

Metoda cea mai expeditivă pentru măsurarea rezistenţelor electrice se bazează pe aplicarea legii lui Ohm :

$$U = R\ I \tag{9.1}$$

Este deci necesar să se măsoare cu un voltmetru conectat în derivaţie cu rezistorul R, tensiunea electrică U şi curentul electric I cu un ampermetru în serie cu acesta. În cazul rezistenţelor liniare, legătura dintre U şi I este reprezintată de o dreaptă. În cazul rezistenţelor neliniare, legătura dintre U şi I este reprezintată de o curbă.

Conexiunea celor două instrumente de măsură se poate face în două moduri, rezultând două montaje numite: amonte (Fig. 9.1) şi aval (Fig. 9.2).

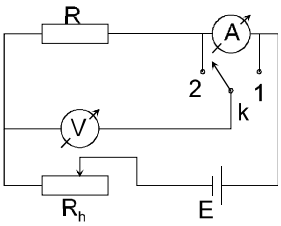


Fig. 9.1

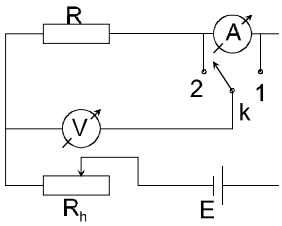


Fig. 9.2

Rezistenţele aparatelor de măsură introduc însă o eroare sistematică, diferită în cele două montaje. În montajul amonte voltmetrul măsoară nu numai tensiunea la bornele rezistorului R, ci şi tensiunea la bornele ampermetrului. În montajul aval, ampermetrul măsoară nu numai curentul ce trece prin rezistor, ci şi curentul consumat de voltmetru. Din aceste consideraţii rezultă corecţiile ce trebuie făcute în fiecare caz.

Montajul amonte. În acest montaj, ampermetrul indică intensitatea curentului ce trece prin R, iar voltmetrul măsoară suma căderilor de tensiune pe ampermetru şi pe rezistenţa R.

Valoarea aproximativă R' a rezistenţei de măsurat, valoare pe care o considerăm în acest montaj drept valoarea experimentală, este dată de relaţia:

$$R' = R_{aparent} = \frac{U}{I} \tag{9.2}$$

Se observă că prin această metodă se face sistematic o eroare, deoarece valoarea exactă a rezistenţei R este:

$$R = \frac{U - R_A I}{I} = \frac{U}{I} - R_A = \tag{9.3}$$

$$= R' - R_A; \quad R < R'$$

Eroarea sistematică va fi deci:

$$(\Delta R)_{amonte} = R_{aparent} - R = R_A \tag{9.4}$$

iar eroarea sistematică relativă este:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{amonte} = \frac{R_A}{R} \tag{9.5}$$

Deci, prin metoda amonte se face o eroare sistematică “prin adaos”, eroare care este cu atât mai mică, cu cât rezistenţa ampermetrului R_A este mai mică în raport cu rezistenţa de măsurat R. Astfel, montajul amonte se foloseşte în special la măsurarea rezistenţelor mari.

Montajul aval. În acest caz voltmetrul măsoară valoarea tensiunii U la bornele rezistorului

R, iar ampermetrul indică suma intensităţilor curenţilor I_R şi I_V care trec prin rezistenţa de măsurat şi respectiv prin voltmetru.

$$I = I_R + I_V \tag{9.6}$$

Dacă R este rezistenţa voltmetrului, atunci:

$$I_V = \frac{U}{R_V} \tag{9.7}$$

Valoarea măsurată a rezistenţei R va fi:

$$R' = R_{aparent} = \frac{U}{I} \tag{9.8}$$

iar valoarea exactă a rezistenţei R este:

$$R = \frac{U}{I_R} = \frac{U}{I - I_V} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}} = \frac{R'I}{I - \frac{R'I}{R_V}} \tag{9.9}$$

sau:

$$R = \frac{R'}{1 - \frac{R'}{R_V}}; \quad R > R' \tag{9.10}$$

Acest montaj este afectat de eroare sistematică “în minus”:

$$(\Delta R)_{aval} = R' - R = \frac{U}{I} - R \tag{9.11}$$

Eroarea relativă fiind:

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{aval} = \frac{R' - R}{R} = -\frac{R'}{R_V} \tag{9.12}$$

În cazul în care $R' << R_V$, rezultă $R' \cong R$ şi deci :

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{aval} \cong -\frac{R}{R_V} \tag{9.13}$$

Pentru necesităţi curente, unde precizia nu joacă un rol determinant, valoarea aproximativă R' este acceptabilă dacă se iau câteva precauţii pentru ca eroarea sistematică să scadă cât mai mult. Din relaţia (11) se vede că această eroare scade dacă valoarea rezistenţei de măsurat este mică, dacă consumul voltmetrului este minim (rezistenţa voltmetrului R_V trebuie să fie foarte mare) şi dacă intensitatea curentului folosit este mare. Deci montajul aval, ca procedeu expeditiv, este preferabil pentru măsurarea rezistenţelor mici în comparaţie cu rezistenţa voltmetrului.

Există o valoare critică R_0 a rezistenţei R pentru care eroarea sistematică relativă este aceeaşi în ambele montaje. Această valoare se determină egalând cele două erori relative.

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{amonte} = \left|\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{aval}\right| \tag{9.14}$$

$$\frac{R_A}{R_0} = \frac{R_0}{R_V}$$

sau

$$R_0 = \sqrt{R_A R_V} \tag{9.15}$$

2. Dispozitiv experimental

1) Se realizează montajul din figura 9.3.

2) Pentru montajul amonte se va trece /se comandă prin intermediul interfeţei comutatorul în poziţia 1, iar pentru montajul aval în poziţia 2.

3) Când comutatorul k este în poziţia 1 (montaj amonte) se citesc valorile tensiunii şi intensităţii

curentului electric la voltmetrul V şi respectiv la ampermetrul A.
4) Folosind relaţia (9.2), se determină valoarea măsurată R' a rezistenţei necunoscute R.
5) Cunoscând valoarea rezistenţei R_A a ampermetrului, se determină valoarea adevărată a rezistenţei R cu ajutorul relaţiei (9.3).

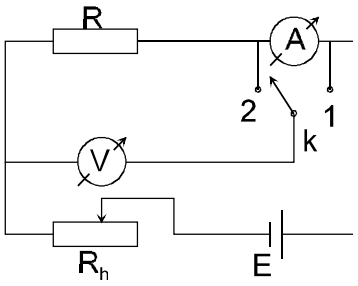


Fig. 9.3

6) Se trece /se comandă prin intermediul interfeţei comutatorul k în poziţia 2 (montaj aval) şi se citesc din nou valorile tensiunii şi ale intensităţii curentului din circuit.
7) Folosind relaţia (9.8), se determină valoarea măsurată R' a rezistenţei necunoscute R, prin metoda aval.
8) Cunoscînd rezistenţa internă a voltmetrului, corespunzătoare domeniului de măsură utilizat şi aplicând relaţia (9.10), se determină valoarea exactă a rezistenţei R.
9) Se vor calcula erorile relative sistematice ce afectează măsurătorile în montajul amonte cu ajutorul relaţiei (5) şi respectiv în montajul aval cu relaţia (9.13).
10) Se vor calcula erorile datorate metodei şi erorile datorate aparatelor de măsură utilizate. De aceea, se va calcula atât eroarea absolută ΔR cât şi eroarea relativă $\frac{\Delta R}{R}$.
11) Datele experimentale se vor trece în tabelele 1 şi 2.

Tabel 1 (montaj amonte)

Nr. crt.	I			U			R_A (Ω)	R' (Ω)	R (Ω)
	α (div)	K (A/div)	I (A)	α (div)	K (V/div)	U (div)			
1.									
2.									
3.									
4.									
5.									
6.									
7.									
8.									
9.									

Tabel 2 (montaj aval)

Nr. crt.	I			U			R_V (Ω)	R' (Ω)	R (Ω)
	α (div)	K (A/div)	I (A)	α (div)	K (V/div)	U (div)			
1.									
2.									
3.									

4.									
5.									
6.									
7.									
8.									
9.									
10.									
11.									

12. Pentru a observa variaţia neliniară a rezistenţei, se va trasa pe hârtie milimetrică curba I = f (U).
13. Se va trasa curba erorii relative sistematice în funcţie de valoarea rezistenţei R pentru fiecare metodă $\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = f(R)$, unde R este valoarea exactă a rezistenţei calculată cu relaţiile (9.3) şi (9.10).
14. Din grafic se determină apoi valoarea rezistenţei R_{0exp} pentru care erorile relative sistematice ale acelor două metode sunt egale. Se va compara valoarea astfel obţinută cu valoarea R_0 calculată cu relaţia (15).

3. Modul de utilizare

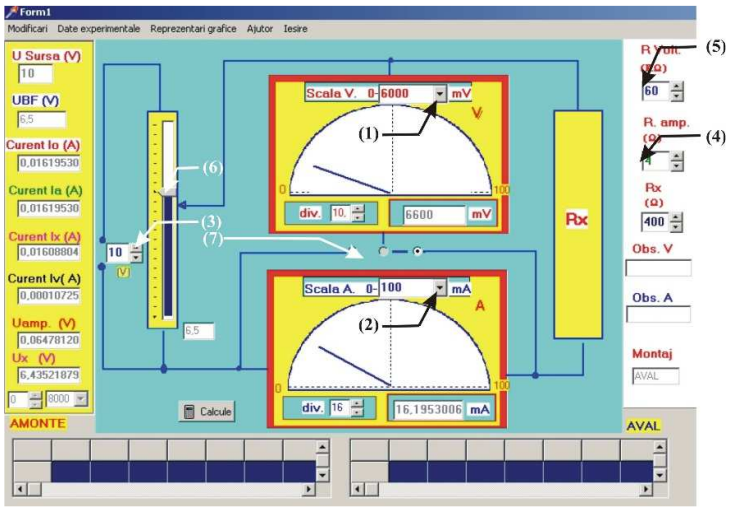


Fig. 9.4

a) Se selectează controlul (1) şi se fixează scala de lucru a voltmetrului.
b) Se selectează controlul (2) şi se fixează scala de lucru a ampermetrului.
a) Se selectează apoi controlul (3) şi se fixează valoarea tensiunii electrice.
c) Cu ajutorul controlului (4) se fixează valoarea rezistenţei interne a ampermetrului, iar cu ajutorul lui (5) se introduce valoarea rezistenţei voltmetrului.
d) Se stabileşte o valoare a tensiunii aplicate circuitului (cu ajutorul "reostatului" (6) şi apoi, cu ajutorul "comutatorului" (7) se realizează trecerea montajului în configuraţia "amonte", respectiv "aval".
e) Se notează de fiecare dată tensiunea aplicată circuitului şi intensitatea curentului pentru fiecare configuraţie în parte.
f) Se modifică tensiunea aplicată (folosind (6), realizându-se un număr cât mai mare de "determinări".
g) Datele notate se trec într-o foaie de calcul tabelar şi apoi se determină valorile rezistenţei R_x şi abaterile relative şi absolute ale "determinărilor" făcute.
Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L09

Lucrarea 10

STUDIUL CIOCNIRILOR ELASTICE

1. Consideraţii teoretice

Considerăm un sistem de două corpuri C_1 şi C_3, de mase m_1 şi respectiv m_3, legate printr-un fir ideal (inextensibil şi fără masă) (Fig. 1).

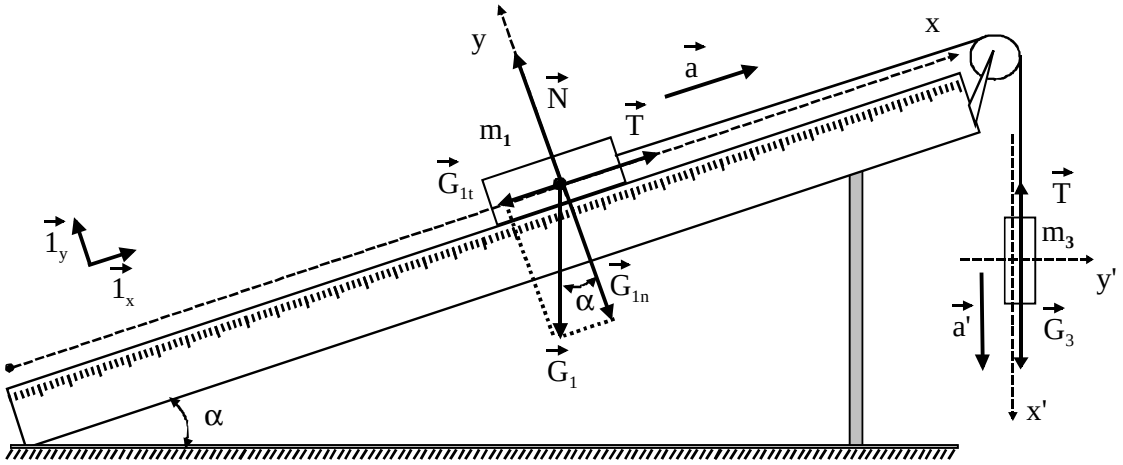


Fig. 10.1

Pentru corpul C_1, considerând sistemul de axe ca în figură, vom putea scrie ecuaţiile:

pe axa Ox: $T - G_{1t} = m_1 a$ (1)

pe axa Oy: $N - G_{1n} = 0$ (2)

unde

$$G_{1t} = G_1 \sin\alpha \quad (3)$$

iar

$$G_{1n} = G_1 \cos\alpha \quad (4)$$

În mod analog, pentru corpul C_3 vom obţine ecuaţia:

$$G_3 - T = m_3 a \quad (5)$$

Considerând sistemul format de ecuaţiile (1) şi (5), vom putea calcula acceleraţia sistemului mecanic:

$$\begin{cases} T - G_1 \sin\alpha = m_1 a \\ G_3 - T = m_3 a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{G_3 - G_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3} = g\frac{m_3 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3} \quad (6)$$

Dacă sistemul se află iniţial în repaus, după deplasarea pe distanţa d, viteza corpurilor va fi dată de relaţia:

$$v_1 = \sqrt{2ad} = \sqrt{2g\frac{m_3 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3}d} \quad (7)$$

Pentru o ciocnire elastică a sistemului format din C_1 şi C_3 cu un corp C_2 de masă m_2 aflat în repaus ($v_2 = 0$), viteza finală v_2' va fi:

$$v_2' = 2\frac{(m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}v_1 = 2\frac{(m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}\sqrt{2g\frac{m_3 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3}d} \quad (8)$$

Neglijând forţele de frecare şi forţele de rezistenţă ce acţionează asupra corpului C_2, distanţa parcursă până la oprire de-a lungul planului înclinat cu acceleraţia

$$a' = g\sin\alpha$$

va fi

$$d' = \frac{v_2'^2}{2a'} = \left(2\frac{m_1+m_3}{m_1+m_2+m_3}\right)^2 \frac{2g}{2g\sin\alpha}\left(\frac{m_3-m_1\sin\alpha}{m_1+m_3}\right)d \quad \Rightarrow$$

$$d' == 4\left(\frac{m_3-m_1\sin\alpha}{(m_1+m_2+m_3)^2}\right)\frac{(m_1+m_3)d}{\sin\alpha} \qquad (9)$$

Pe baza acestui rezultat, se poate face o comparaţie între distanţa parcursă în urma impactului de corpul C_2 şi distanţa calculată în relaţia (9).

Montând un cronometru optoelectronic cu poarta START plasată în dreptul poziţiei iniţiale ocupate de C_2, iar poarta STOP la o distanţă d_2 convenabil aleasă ($d_2 < d'$), vom putea evalua viteza iniţială v_2':

$$v_2' = \frac{2d_2 + a'\Delta t^2}{2\Delta t} = \frac{2d_2 + g\sin\alpha\Delta t^2}{2\Delta t} \qquad (10)$$

unde Δt reprezintă timpul determinat de cronometru.

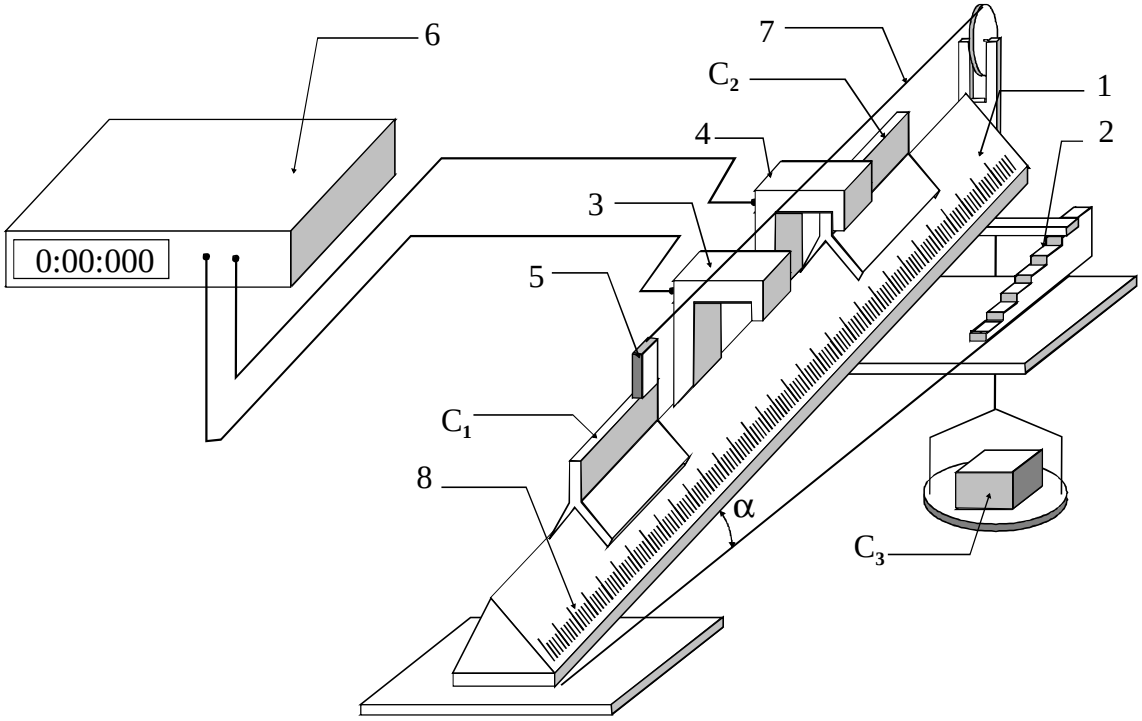


Fig. 10. 1.

2. Dispozitiv experimental

Dispozitivul experimental este prezentat în figura 1 şi este format din platforma cu pernă de aer (1) care se poate înclina cu ajutorul dispozitivului (2).

Corpurile C_1 şi C_3 sunt legate prin firul (7) şi iniţial sunt în repaus. Corpul C_1 are montat un opritor (5) cu ajutorul căruia cursa lui poate fi limitată. Intervalul de timp este măsurat cu ajutorul cronometrului (6) . Porţile START (3) şi STOP (4) vor fi declanşate de mişcarea corpului C2 (plasat iniţial în repaus).

3. Mod de lucru

a) Se montează dispozitivul experimental descris. Se notează masele corpurilor. Se înclină dispozitvul cu pernă de aer şi se notează unghiul α. Se notează poziţia iniţială x_1 a corpului C_1 şi

poziţia x_2 a corpului C_2. De asemenea, se plasează porţile cronometrului în aşa fel încât poarta START să fie în dreptul corpului C_2. Se notează poziţiile x_{START} şi x_{STOP} şi se calculează distanţa d_2 dintre ele.

b) Se determină acceleraţia sistemului format din C_1 şi C_3 pe baza relaţiei (6) şi viteza de ciocnire v_1 pe baza relaţiei:

$$v_1 = \sqrt{2g\frac{m_3 - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_3}(x_2 - x_1)} \qquad (11)$$

c) Se lasă sistemul liber şi se notează intervalul de timp înregistrat de cronometru. Se calculează viteza v_2' folosind relaţia (10) şi se compară valoarea obţinută cu:

$$v_{2t}' = 2\frac{(m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}\sqrt{2g\frac{m_3 - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_3}(x_2 - x_1)} \qquad (12)$$

d) Se modifică poziţia x_1 iniţială a corpului C_1 şi se reiau operaţiile de la subpunctele b) - c).

e) Datele se trec într-un tabel de forma:

Nr. crt.	x_1 (mm)	x_2 (mm)	m_1 (g)	m_2 (g)	m_3 (g)	d_2 (mm)	α	a (m/s^2)	v_1 (m/s)	Δt (s)	v_2' (m/s)	v_{2t}' (m/s)
1.												
2.												
3.												
4.												
5.												
6.												
7.												
8.												

f) Se modifică masa corpului 3 cu ajutorul unor mase adiţionale şi se reiau operaţiile de la punctele a) - e).

Metoda de identificare şi procedurile de simulare numerică se pot descărca de pe pagina laboratorului.

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L10

Lucrarea 11

STUDIUL CIOCNIRILOR PLASTICE

1. Consideraţii teoretice

Considerăm un sistem de două corpuri C_1 şi C_3, de mase m_1 şi respectiv m_3, legate printr-un fir ideal (inextensibil şi fără masă) (Fig. 1).

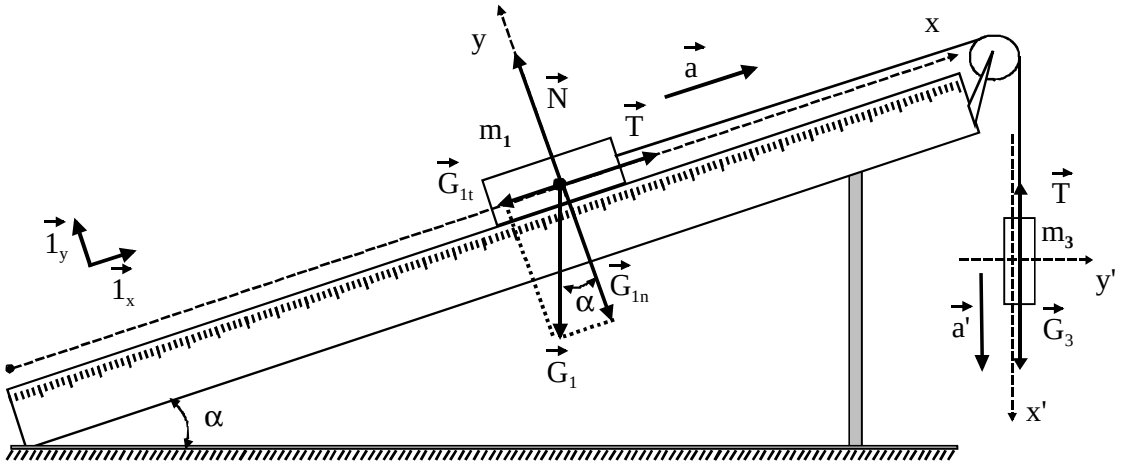


Fig. 11.1

Ecuaţiile pentru corpul C_1 sunt:

pe axa Ox: $T - G_1 \sin\alpha = m_1 a$ (1)

pe axa Oy: $N - G_1 \cos\alpha = 0$ (2)

În mod analog, pentru corpul C_3, vom obţine ecuaţia:

$$G_3 - T = m_3 a \quad (3)$$

Din relaţiile (1) şi (3) vom putea calcula acceleraţia sistemului mecanic:

$$\begin{cases} T - G_1 \sin\alpha = m_1 a \\ G_3 - T = m_3 a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{G_3 - G_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3} = g\frac{m_3 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3} \quad (4)$$

Dacă sistemul se află iniţial în repaus, după deplasarea pe distanţa d, viteza corpurilor va fi dată de relaţia:

$$v_1 = \sqrt{2ad} = \sqrt{2g\frac{m_3 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3}d} \quad (5)$$

Pentru o ciocnire plastică a sistemului format din C_1 şi C_3 cu un corp C_2 de masă m_2 aflat în repaus ($v_2 = 0$), viteza finală v'_t va fi:

$$v'_t = \frac{(m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} v_1 = \frac{(m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}\sqrt{2g\frac{m_3 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3}d} \quad (6)$$

Neglijând forţele de frecare şi forţele de rezistenţă ce acţionează asupra corpului C_2, distanţa parcursă până la oprire de-a lungul planului înclinat cu acceleraţia

$$a' = g\sin\alpha$$

va fi

$$d' = \frac{v'^{\,2}_t}{2a'} = \left(\frac{m_1 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right)^2 \frac{2g}{2g\sin\alpha}\left(\frac{m_3 - m_1\sin\alpha}{m_1 + m_3}\right)d \Rightarrow$$

$$d' = = \left(\frac{m_3 - m_1\sin\alpha}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}\right)\frac{(m_1 + m_3)d}{\sin\alpha} \qquad (7)$$

Pe baza acestui rezultat, se poate face o comparaţie între distanţa parcursă în urma impactului de corpul C_2 şi distanţa calculată în relaţia (7).

Montând un cronometru optoelectronic cu poarta START plasată în dreptul poziţiei iniţiale ocupate de C_2, iar poarta STOP la o distanţă d_2 convenabil aleasă ($d_2 < d'$) vom putea evalua viteza iniţială v':

$$v' = \frac{2d_2 + a'\Delta t^2}{2\Delta t} = \frac{2d_2 + g\sin\alpha\Delta t^2}{2\Delta t} \qquad (8)$$

unde Δt reprezintă timpul determinat de cronometru.

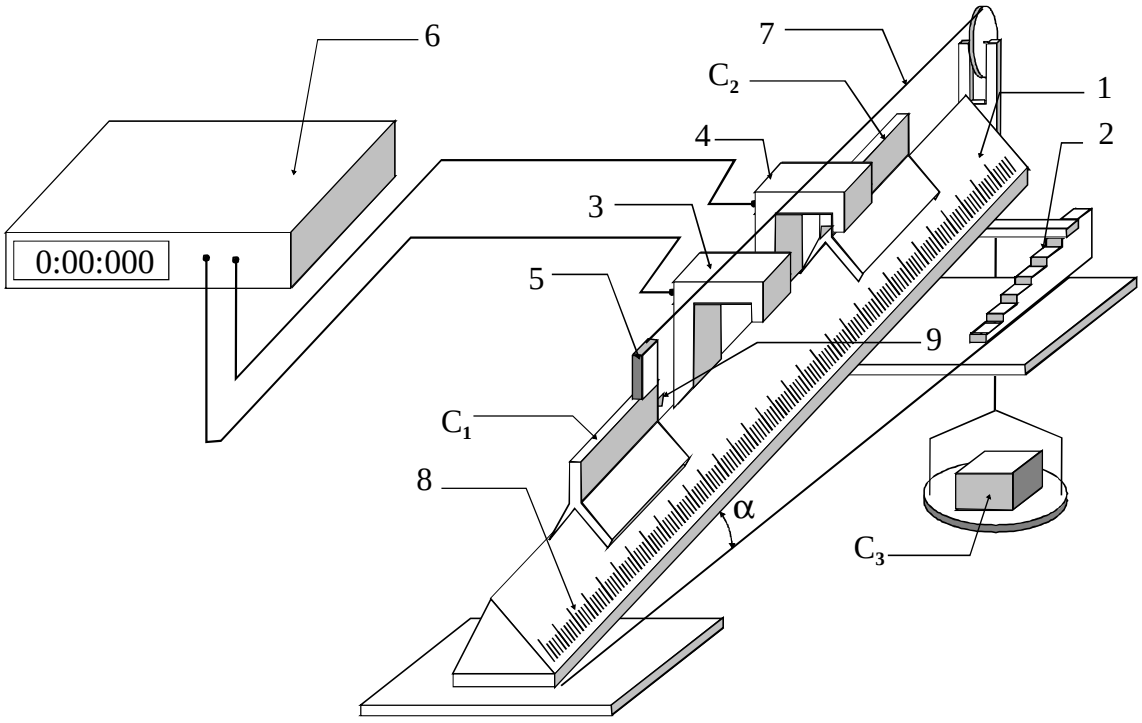


Fig. 11.2

2. Dispozitiv experimental

Dispozitivul experimental este prezentat în figura 1 şi este format din platforma cu pernă de aer (1) care se poate înclina cu ajutorul dispozitivului (2).

Corpurile C_1 şi C_3 sunt legate prin firul (7) şi iniţial sunt în repaus. Corpul C_1 are montat un opritor (5) cu ajutorul căruia cursa lui poate fi limitată. Intervalul de timp este măsurat cu ajutorul cronometrului (6) . Porţile START (3) şi STOP (4) vor fi declanşate de mişcarea corpului C2 (plasat iniţial în repaus).

3. Mod de lucru

a) Se montează dispozitivul experimental descris. Se notează masele corpurilor. Se înclină

dispozitivul cu pernă de aer şi se notează unghiul □. Se notează poziţia iniţială x_1 a corpului C_1 şi poziţia x_2 a corpului C_2. De asemenea, se plasează porţile cronometrului în aşa fel încât poarta START să fie în dreptul corpului C_2. Se notează poziţiile x_{START} şi x_{STOP} şi se calculează distanţa d_2 dintre ele.

b) Se determină acceleraţia sistemului format din C_1 şi C_3 pe baza relaţiei (4) şi viteza de ciocnire v_1 pe baza relaţiei:

$$v_1 = \sqrt{2g\frac{m_3 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3}(x_2 - x_1)} \qquad (9)$$

c) Se lasă sistemul liber şi se notează intervalul de timp înregistrat de cronometru. Se calculează viteza v' folosind relaţia (8) şi se compară valoarea obţinută cu:

$$v'_t = \frac{(m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}\sqrt{2g\frac{m_3 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_3}(x_2 - x_1)} \qquad (10)$$

d) Se modifică poziţia x_1 iniţială a corpului C_1 şi se reiau operaţiile de la subpunctele b) - c).

e) Datele se trec într-un tabel de forma:

Nr. crt.	x_1 (mm)	x_2 (mm)	m_1 (g)	m_2 (g)	m_3 (g)	d_2 (mm)	□	a (m/s^2)	v_1 (m/s)	□t (s)	v' (m/s)	v'_t (m/s)
1.												
2.												
3.												
4.												
5.												
6.												
7.												
8.												

f) Se modifică masa corpului C_3 cu ajutorul unor mase adiţionale şi se reiau operaţiile de la punctele a) - e).

g) Se trasează grafic dependenţa impulsului $p' = p'(p_1)$ în funcţie de mărimea impulsului p_1.

Metoda de identificare şi procedurile de simulare numerică se pot descărca de pe pagina laboratorului.

Pentru descrierea aplicatiei – http://www.phys.ugal.ro/Laborator /L11

Anexa 1

FUNCȚII POLINOMIALE DE REGRESIE OBȚINUTE PRIN METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

Cazul 1. Funcția de ordinul întâi

Consideram cazul unui set de date experimentale grupate în două coloane numerice, reprezentând valorile măsurate pentru mărimile X şi Y

Tabelul A.1.

Nr. crt.	X	Y
1.	x_1	y_1
2.	x_2	y_2
3.	x_3	y_3
..		
..		
N.		y_N

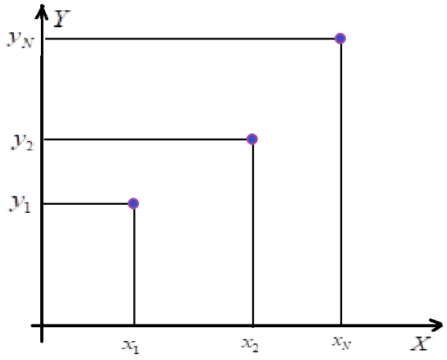


Fig. A. 1

In prima etapă de prelucrare a datelor experimentale, se va realiza o reprezentare grafică de tip scatter plot, în care pe coloana verticală vom considera valorile numerice ale mărimii Y de exemplu, iar pe orizontală vom considera valorile numerice ale mărimii X (Fig. A.1).

In anumite cazuri specifice, se poate identifica existenta unei dependente de tip linear şi în acest fel se poate investiga posibilitatea determinării unei funcții între cele două variabile, i.e. posibilitatea construirii unei expresii de forma

$$y = ax + b \tag{A1.1}$$

unde coeficienții a şi b vor putea fi determinați în baza unui criteriu de optimizare a expresiei de interpolare considerate (A1.1).

In general, pentru primul set de mărimi măsurate, vom putea scrie:

Nr. crt.	Valoare variabila	Valoare teoretică	Valoare măsurată	Eroare
1.	x_1	$y_{1t} = ax_1 + b$	y_1	$\Delta y_1 = y_1 - y_{1t} = y_1 - (ax_1 + b)$
2.	x_2	$y_{2t} = ax_2 + b$	y_2	$\Delta y_2 = y_2 - y_{2t} = y_2 - (ax_2 + b)$
3.	x_3	$y_{3t} = ax_3 + b$	y_3	$\Delta y_3 = y_3 - y_{3t} = y_3 - (ax_3 + b)$
...	...	....	...	.....
N.	x_N	$y_{Nt} = ax_N + b$	y_N	$\Delta y_N = y_N - y_{Nt} = y_N - (ax_N + b)$

In general, suma abaterilor

$$S = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + ... + \Delta y_N = [y_1 - (ax_1 + b)] + [y_2 - (ax_2 + b)] + .. + [y_N - (ax_N + b)]$$

poate prezenta o valoarea apropiată de zero, în special în cazul particular când erori foarte mari, cu valori semnificative, prezintă un efect de compensare.

In literatură se consideră criteriul legat de suma pătratelor erorilor considerate (*squares sum – SS*):

$$SS = (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 + ... + (\Delta y_N)^2 = \\ = [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + .. + [y_N - (ax_N + b)]^2 \tag{A1.2}$$

In acest caz, cu cât funcția de interpolare este mai bună, cu atât această sumă SS are valoare

mai mică. Un criteriu general acceptat de optimizare a funcției de interpolare este cel legat de condiția impusă ca valoarea sumei SS să prezinte valoarea cea mai mică i.e.

$$SS = (SS)_{\min im} \tag{A1.3}$$

Deoarece din expresia (A1.2) singurele mărimi necunoscute sunt parametrii coeficienților a şi b , rezultă că funcția SS este o funcție de două variabile:

$$SS = SS(a,b) \tag{A1.4}$$

Impunând condiția ca funcția SS să prezinte valoarea cea mai mică, de fapt se impune condiția numită „condiția celor mai mici pătrate” şi necesită respectarea condițiilor:

$$\frac{\partial}{\partial a}(SS) = \frac{\partial}{\partial a}(SS(a,b)) = 0 \tag{A1.5}$$

respectiv

$$\frac{\partial}{\partial b}(SS) = \frac{\partial}{\partial b}(SS(a,b)) = 0 \tag{A1.6}$$

In acest caz, condiția (A1.5) determină ecuaţia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}(SS) &= \frac{\partial}{\partial a}\left((\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 + ... + (\Delta y_N)^2\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial a}\left\{[y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + .. + [y_N - (ax_N + b)]^2\right\} = \\ &= 2[y_1 - (ax_1 + b)](-x_1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)](-x_2) + .. + 2[y_N - (ax_N + b)](-x_N) = \\ &= 0\end{aligned} \tag{A1.7}$$

respectiv

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}(SS) &= \frac{\partial}{\partial b}\left((\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 + ... + (\Delta y_N)^2\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial b}\left\{[y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + .. + [y_N - (ax_N + b)]^2\right\} = \\ &= 2[y_1 - (ax_1 + b)](-1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)](-1) + .. + 2[y_N - (ax_N + b)](-1) = \\ &= 0\end{aligned} \tag{A1.8}$$

Ecuația (A1.7) poate fi scrisă sub forma:

$$[y_1 - (ax_1 + b)](-x_1) + [y_2 - (ax_2 + b)](-x_2) + .. + [y_N - (ax_N + b)](-x_N) = 0$$

sau echivalent

$$\begin{aligned}a\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + ... + x_N^2\right) + b(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_N) = \\ = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + y_Nx_N\end{aligned} \tag{A1.9}$$

In mod echivalent, ecuația (A1.8) poate fi scrisă sub forma:

$$[y_1 - (ax_1 + b)](-1) + [y_2 - (ax_2 + b)](-1) + .. + [y_N - (ax_N + b)](-1) = 0$$

sau echivalent

$$a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_N) + bN = y_1 + y_2 + ... + x_N \tag{A1.10}$$

Introducând notațiile:

$$\begin{cases} S_{2x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + ... + x_N^2 \\ S_x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_N \\ M_{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + y_Nx_N \\ S_y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + ... + y_N \end{cases} \tag{A1.11}$$

Sistemul de ecuații format de expresiile (A1.9) şi (A1.10) devine, în baza notațiilor (A1.11), un sistem linear care poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases} aS_{2x} + bS_x = M_{xy} \\ aS_x + bN = S_y \end{cases} \quad \text{(A1.12)}$$

Determinantul sistemului de ecuații (A1.12) este dat de expresia:

$$\Delta = S_{2x}N - S_x^{\,2} \quad \text{(A1.13)}$$

Folosind regula Kramer, vom putea obține

$$\Delta_a = M_{xy}N - S_xS_y \quad \text{(A1.14)}$$

Respectiv

$$\Delta_b = S_{2x}S_y - S_xM_{xy} \quad \text{(A1.15)}$$

Ceea ce va permite determinarea valorile coeficienților a şi b cu ajutorul expresiilor

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{M_{xy}N - S_xS_y}{S_{2x}N - S_x^{\,2}} \quad \text{(A1.16)}$$

Respectiv

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{S_{2x}S_y - S_xM_{xy}}{S_{2x}N - S_x^{\,2}} \quad \text{(A1.17)}$$

La adresa www.phys.ugal.ro/LaboratorMIS/Anexa1 se poate descărca fișierul Excel pentru un calcul explicit.

Cazul 2. Funcția de ordinul doi

Ca şi in cazul anterior, considerăm cazul unui set de date experimentale grupate în două coloane numerice, reprezentând valorile măsurate pentru mărimile X şi Y

Tabelul A.2.

Nr. crt.	X	Y
1.	x_1	y_1
2.	x_2	y_2
3.	x_3	y_3
..		
..		
N.		y_N

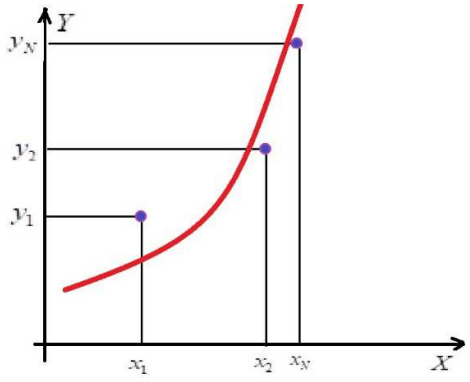


Fig. A. 2

In etapa preliminară de prelucrare a datelor experimentale, se va realiza o reprezentare grafică de tip scatter plot, în care pe coloana verticală vom considera valorile numerice ale mărimii Y, de exemplu, iar pe orizontală vom considera valorile numerice ale mărimii X (Fig. A.2).

In anumite cazuri specifice, se poate identifica existența unei dependente de tip parabolic şi în acest fel se poate investiga posibilitatea determinării unei funcții între cele două variabile, i.e. posibilitatea construirii unei expresii de forma

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{(A2.1)}$$

unde coeficienții a, b şi c vor putea fi determinați în baza unui criteriu de optimizare a expresiei de interpolare considerate (A2.1).

In general, pentru primul set de mărimi măsurate, vom putea scrie:

Nr. crt.	Valoare variabilă	Valoare teoretică	Valoare măsurată	Eroare

1.	x_1	$y_{1t} = ax_1^{\ 2} + bx_1 + c$	y_1	$\Delta y_1 = y_1 - y_{1t} = y_1 - \left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c\right)$
2.	x_2	$y_{2t} = ax_2^{\ 2} + bx_2 + c$	y_2	$\Delta y_2 = y_2 - y_{2t} = y_2 - \left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c\right)$
3.	x_3	$y_{3t} = ax_3^{\ 2} + bx_3 + c$	y_3	$\Delta y_3 = y_3 - y_{3t} = y_3 - \left(ax_3^{\ 2} + bx_3 + c\right)$
...	...	....	...	.....
N.	x_N	$y_{Nt} = ax_N^{\ 2} + bx_N + c$	y_N	$\Delta y_N = y_N - y_{Nt} = y_N - \left(ax_N^{\ 2} + bx_N + c\right)$

Considerăm criteriul anterior enunțat legat de suma pătratelor erorilor:

$$SS = (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 + ... + (\Delta y_N)^2 = \\ = \left[y_1 - \left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c\right)\right]^2 + \left[y_2 - \left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c\right)\right]^2 + .. + \left[y_N - \left(ax_N^{\ 2} + bx_N + c\right)\right]^2 \quad \text{(A2.2)}$$

Ca și în cazul anterior, criteriul general acceptat de optimizare a funcției de interpolare este cel legat de condiția impusă ca valoarea sumei SS să prezinte valoarea cea mai mică i.e.

$$SS = (SS)_{\min im} \quad \text{(A2.3)}$$

Deoarece din expresia (A2.2) singurele mărimi necunoscute sunt parametrii coeficienților a, b și c, rezultă că funcția SS este o funcție de trei variabile:

$$SS = SS(a,b,c) \quad \text{(A2.4)}$$

Impunând condiția ca funcția SS să prezinte valoarea cea mai mică, de fapt se impune condiția numită „condiția celor mai mici pătrate” care necesită respectarea condițiilor:

$$\frac{\partial}{\partial a}(SS) = \frac{\partial}{\partial a}(SS(a,b,c)) = 0 \quad \text{(A2.5)}$$

respectiv

$$\frac{\partial}{\partial b}(SS) = \frac{\partial}{\partial b}(SS(a,b,c)) = 0 \quad \text{(A2.6)}$$

Și respectiv

$$\frac{\partial}{\partial c}(SS) = \frac{\partial}{\partial c}(SS(a,b,c)) = 0 \quad \text{(A2.7)}$$

In acest caz, condiția (A2.5) determină ecuația:

$$\frac{\partial}{\partial a}(SS) = \frac{\partial}{\partial a}\left((\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 + ... + (\Delta y_N)^2\right) = \\ = \frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[y_1 - \left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c\right)\right]^2 + \left[y_2 - \left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c\right)\right]^2 + .. + \left[y_N - \left(ax_N^{\ 2} + bx_N + c\right)\right]^2\right\} = \quad \text{(A2.8)}$$
$$= 2\left[y_1 - \left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c\right)\right]\left(-x_1^{\ 2}\right) + 2\left[y_2 - \left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c\right)\right]\left(-x_2^{\ 2}\right) + .. \\ .....+ 2\left[y_N - \left(ax_N^{\ 2} + bx_N + c\right)\right]\left(-x_N^{\ 2}\right) = 0$$

respectiv

$$\frac{\partial}{\partial b}(SS) = \frac{\partial}{\partial b}\left((\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 + ... + (\Delta y_N)^2\right) = \\ = \frac{\partial}{\partial b}\left\{\left[y_1 - \left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c\right)\right]^2 + \left[y_2 - \left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c\right)\right]^2 + .. + \left[y_N - \left(ax_N^{\ 2} + bx_N + c\right)\right]^2\right\} = \quad \text{(A2.9)}$$
$$= 2\left[y_1 - \left(ax_1^{\ 2} + bx_1 + c\right)\right](-x_1) + 2\left[y_2 - \left(ax_2^{\ 2} + bx_2 + c\right)\right](-x_2) + .. \\ .... + 2\left[y_N - \left(ax_N^{\ 2} + bx_N + c\right)\right](-x_N) = 0$$

respectiv

$$\frac{\partial}{\partial c}(SS)=\frac{\partial}{\partial c}\left((\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2+(\Delta y_3)^2+....+(\Delta y_N)^2\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial c}\left\{\left[y_1-\left(ax_1^{\,2}+bx_1+c\right)\right]^2+\left[y_2-\left(ax_2^{\,2}+bx_2+c\right)\right]^2+..+\left[y_N-\left(ax_N^{\,2}+bx_N+c\right)\right]^2\right\}= \quad \text{(A2.10)}$$
$$=2\left[y_1-\left(ax_1^{\,2}+bx_1+c\right)\right](-1)+2\left[y_2-\left(ax_2^{\,2}+bx_2+c\right)\right](-1)+..$$
$$....+2\left[y_N-\left(ax_N^{\,2}+bx_N+c\right)\right](-1)=0$$

Ecuația (A2.8) poate fi scrisă sub forma:

$$\left[y_1-\left(ax_1^{\,2}+bx_1+c\right)\right]\left(-x_1^{\,2}\right)+\left[y_2-\left(ax_2^{\,2}+bx_2+c\right)\right]\left(-x_2^{\,2}\right)+..$$
$$.....+\left[y_N-\left(ax_N^{\,2}+bx_N+c\right)\right]\left(-x_N^{\,2}\right)=0$$

sau echivalent

$$a\left(x_1^{\,4}+x_2^{\,4}+x_3^{\,4}+x_4^{\,4}+...+x_N^{\,4}\right)+b\left(x_1^{\,3}+x_2^{\,3}+x_3^{\,3}+x_4^{\,3}+...+x_N^{\,3}\right)+$$
$$+c\left(x_1^{\,4}+x_2^{\,4}+x_3^{\,4}+x_4^{\,4}+...+x_N^{\,4}\right)=x_1^{\,2}y_1+x_2^{\,2}y_2+...+x_N^{\,2}y_N \quad \text{(A2.11)}$$

In mod echivalent, ecuația (A2.9) poate fi scrisă sub forma:

$$\left[y_1-\left(ax_1^{\,2}+bx_1+c\right)\right](-x_1)+\left[y_2-\left(ax_2^{\,2}+bx_2+c\right)\right](-x_2)+..$$
$$....+\left[y_N-\left(ax_N^{\,2}+bx_N+c\right)\right](-x_N)=0$$

sau echivalent

$$a\left(x_1^{\,3}+x_2^{\,3}+x_3^{\,3}+x_4^{\,3}+...+x_N^{\,3}\right)+b\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}+...+x_N^{\,2}\right)+$$
$$+c\left(x_1+x_2+x_3+x_4+...+x_N\right)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_Ny_N \quad \text{(A2.12)}$$

In mod echivalent, ecuația (A2.10) poate fi scrisă sub forma:

$$\left[y_1-\left(ax_1^{\,2}+bx_1+c\right)\right](-1)+\left[y_2-\left(ax_2^{\,2}+bx_2+c\right)\right](-1)+..$$
$$....+\left[y_N-\left(ax_N^{\,2}+bx_N+c\right)\right](-1)=0$$

sau echivalent

$$a\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}+...+x_N^{\,2}\right)+b\left(x_1+x_2+x_3+x_4+...+x_N\right)+$$
$$+cN=y_1+y_2+...+y_N \quad \text{(A2.13)}$$

Introducând notațiile:

$$\begin{cases}S_{4x}=x_1^{\,4}+x_2^{\,4}+x_3^{\,4}+x_4^{\,4}+...+x_N^{\,4}\\ S_{3x}=x_1^{\,3}+x_2^{\,3}+x_3^{\,3}+x_4^{\,3}+...+x_N^{\,3}\\ S_{2x}=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}+...+x_N^{\,2}\\ S_x=x_1+x_2+x_3+x_4+...+x_N\\ M_{2xy}=x_1^{\,2}y_1+x_2^{\,2}y_2+...+y_N^{\,2}x_N\\ M_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+...+y_Nx_N\\ S_y=y_1+y_2+y_3+y_4+...+y_N\end{cases} \quad \text{(A2.14)}$$

Sistemul de ecuații format de expresiile (A2.11), (A2.12) si (A2.13) devine, in baza notațiilor (A2.14), un sistem de ecuatii linear care poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases}aS_{4x}+bS_{3x}+cS_{2x}=M_{2xy}\\ aS_{3x}+bS_{2x}+cS_x=M_{xy}\\ aS_{2x}+bS_x+cN=S_y\end{cases} \quad \text{(A2.15)}$$

Determinantul sistemului de ecuații (A2.15) este dat de expresia:

$$\Delta=S_{4x}S_{2x}N+S_{3x}S_xS_{2x}+S_{3x}S_xS_{2x}-S_{2x}^{\,3}-S_{4x}S_xS_x-S_{3x}S_{3x}N \quad \text{(A2.16)}$$

Folosind regula Kramer, vom putea obține

$$\Delta_a = M_{2xy}S_{2x}N + S_yS_xS_{3x} + M_{xy}S_xS_{2x} - S_{2x}{}^2S_y - M_{2xy}S_xS_x - M_{xy}S_{3x}N \qquad \text{(A2.17)}$$

si

$$\Delta_b = S_{4x}S_{2x}N + S_{3x}S_xS_{2x} + S_{3x}S_xS_{2x} - S_{2x}{}^3 - S_{4x}S_xS_x - S_{3x}S_{3x}N \qquad \text{(A2.18)}$$

Respectiv

$$\Delta_c = S_{4x}S_{2x}S_y + S_{3x}S_xM_{xy} + S_{3x}S_xM_{2xy} - S_{2x}{}^2M_{2xy} - S_{4x}S_xM_{xy} - S_{3x}S_{3x}S_y \qquad \text{(A2.19)}$$

Ceea ce va permite determinarea valorile coeficienților a şi b cu ajutorul expresiilor

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{M_{2xy}S_{2x}N + S_yS_xS_{3x} + M_{xy}S_xS_{2x} - S_{2x}{}^2S_y - M_{2xy}S_xS_x - M_{xy}S_{3x}N}{S_{4x}S_{2x}N + S_{3x}S_xS_{2x} + S_{3x}S_xS_{2x} - S_{2x}{}^3 - S_{4x}S_xS_x - S_{3x}S_{3x}N} \qquad \text{(A2.20)}$$

şi

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{S_{4x}S_{2x}N + S_{3x}S_xS_{2x} + S_{3x}S_xS_{2x} - S_{2x}{}^3 - S_{4x}S_xS_x - S_{3x}S_{3x}N}{S_{4x}S_{2x}N + S_{3x}S_xS_{2x} + S_{3x}S_xS_{2x} - S_{2x}{}^3 - S_{4x}S_xS_x - S_{3x}S_{3x}N} \qquad \text{(A2.21)}$$

Respectiv

$$c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{S_{4x}S_{2x}S_y + S_{3x}S_xM_{xy} + S_{3x}S_xM_{2xy} - S_{2x}{}^2M_{2xy} - S_{4x}S_xM_{xy} - S_{3x}S_{3x}S_y}{S_{4x}S_{2x}N + S_{3x}S_xS_{2x} + S_{3x}S_xS_{2x} - S_{2x}{}^3 - S_{4x}S_xS_x - S_{3x}S_{3x}N}$$

(A2.22)

La adresa www.phys.ugal.ro/LaboratorMIS/Anexa1 se poate descărca fișierul Excel pentru un calcul explicit de ordinul 2.

Cazul 3. Cazul general - Funcția de ordinul n

Ca şi în cazul anterior, considerăm cazul unui set de date experimentale grupate în două coloane numerice, reprezentând valorile măsurate pentru mărimile X şi Y

Tabelul A.3.

Nr. crt.	X	Y
1.	x_1	y_1
2.	x_2	y_2
3.	x_3	y_3
..		
..		
N.		y_N

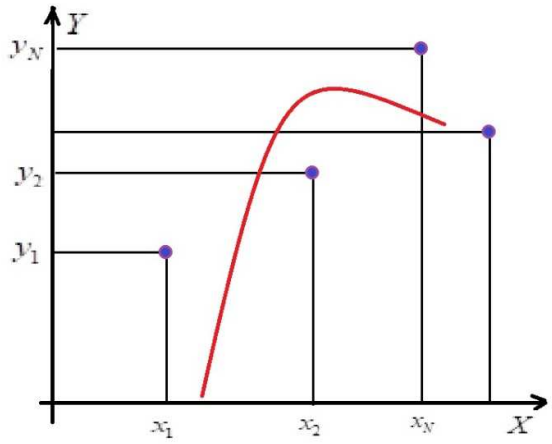


Fig. A. 3

Ca şi in cazurile anterioare, în etapa preliminară de prelucrare a datelor experimentale, se va realiza o reprezentare grafică de tip scatter plot, în care pe coloana verticală vom considera valorile numerice ale mărimii Y, de exemplu, iar pe orizontală vom considera valorile numerice ale mărimii X (Fig. A.3).

In anumite cazuri specifice, se poate identifica existența unei dependente de tip general şi în acest fel se poate investiga posibilitatea determinării unei funcții între cele două variabile, i.e. posibilitatea construirii unei expresii de forma

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \qquad \text{(A3.1)}$$

unde coeficienții a_0, a_1, a_n vor putea fi determinați în baza unui criteriu de optimizare a expresiei de interpolare considerate (A3.1).

In general, pentru primul set de mărimi măsurate, vom putea scrie:

Nr. crt.	Valoare variabilă	Valoare teoretică	Valoare măsurată	Eroare
1.	x_1	$y_{1t} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n$	y_1	$\Delta y_1 = y_1 - y_{1t} = y_1 - \left(a_0 + a_1 x_1 .. + a_n x_1^n\right)$
2.	x_2	$y_{2t} = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + ... + a_n x_2^r$	y_2	$\Delta y_2 = y_2 - y_{2t} = y_2 - \left(a_0 + a_1 x_2 .. + a_n x_2^n\right.$
3.	x_3	$y_{3t} = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + ... + a_n x_3^n$	y_3	$\Delta y_3 = y_3 - y_{3t} = y_3 - \left(a_0 + a_1 x_3 .. + a_n x_3^n\right)$
...	...	....	...	.....
N.	x_N	$y_{Nt} = a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + ... + a_n x$	y_N	$\Delta y_N = y_N - y_{Nt} = y_N - \left(a_0 + a_1 x_3 .. + a_n x\right.$

Considerăm criteriul anterior enunțat legat de suma pătratelor erorilor (*squares sum – SS*):

$$SS = (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 + ... + (\Delta y_N)^2 = \\ = \left[y_1 - \left(a_0 + a_1 x_1 .. + a_n x_1^n\right)\right]^2 + \left[y_2 - \left(a_0 + a_1 x_2 .. + a_n x_2^n\right)\right]^2 + .. + \left[y_N - \left(a_0 + a_1 x_N .. + a_n x_N^n\right)\right]^2 \quad \text{(A3.2)}$$

Ca şi în cazurile anterioare, criteriul general acceptat de optimizare a funcției de interpolare este cel legat de condiția impusă ca valoarea sumei SS să prezinte valoarea cea mai mică, i.e.

$$SS = (SS)_{\min im} \quad \text{(A3.3)}$$

Deoarece din expresia (A3.3) singurele mărimi necunoscute sunt parametrii coeficienților a_0, a_1, a_n rezultă că funcția SS este o funcție de $n+1$ variabile:

$$SS = SS(a_0, a_1, ..., a_n) \quad \text{(A3.4)}$$

Impunând condiția ca funcția SS să prezinte valoarea cea mai mică, de fapt se impune condiția numită „condiția celor mai mici pătrate” care necesită respectarea teoremei Fermat, ceea ce ne va conduce la scrierea unui set de $n+1$ ecuații:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a_n}(SS) = \frac{\partial}{\partial a_n}(SS(a_0, a_1, ..., a_n)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_{n-1}}(SS) = \frac{\partial}{\partial a_{n-1}}(SS(a_0, a_1, ..., a_n)) = 0 \\ .... \\ \frac{\partial}{\partial a_k}(SS) = \frac{\partial}{\partial a_k}(SS(a_0, a_1, ..., a_n)) = 0 \\ .... \\ \frac{\partial}{\partial a_0}(SS) = \frac{\partial}{\partial a_0}(SS(a_0, a_1, ..., a_n)) = 0 \end{cases} \quad \text{(A3.5)}$$

In acest caz, condiția (A3.5) determină setul de ecuații:

$$\frac{\partial}{\partial a_n}(SS)=\frac{\partial}{\partial a_n}(SS(a_0,a_1,....,a_n))=\frac{\partial}{\partial a_n}\left((\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2+(\Delta y_3)^2+....+(\Delta y_N)^2\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial a_n}\left\{\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1{}^n\right)\right]^2+\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2{}^n\right)\right]^2+..+\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N{}^n\right)\right]^2\right\}=$$
$$=2\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1{}^n\right)\right]\left(-x_1{}^n\right)+2\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2{}^n\right)\right]\left(-x_2{}^n\right)+..$$
$$.....+2\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N{}^n\right)\right]\left(-x_N{}^n\right)=0$$

Respectiv

$$\frac{\partial}{\partial a_{n-1}}(SS)=\frac{\partial}{\partial a_{n-1}}(SS(a_0,a_1,....,a_n))=\frac{\partial}{\partial a_{n-1}}\left((\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2+(\Delta y_3)^2+....+(\Delta y_N)^2\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial a_{n-1}}\left\{\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1{}^n\right)\right]^2+\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2{}^n\right)\right]^2+..+\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N{}^n\right)\right]^2\right\}=$$
$$=2\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1{}^n\right)\right]\left(-x_1{}^{n-1}\right)+2\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2{}^n\right)\right]\left(-x_2{}^{n-1}\right)+..$$
$$.....+2\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N{}^n\right)\right]\left(-x_N{}^{n-1}\right)=0$$

.....

Respectiv un termen general

$$\frac{\partial}{\partial a_k}(SS)=\frac{\partial}{\partial a_k}(SS(a_0,a_1,....,a_n))=\frac{\partial}{\partial a_k}\left((\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2+(\Delta y_3)^2+....+(\Delta y_N)^2\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial a_k}\left\{\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1{}^n\right)\right]^2+\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2{}^n\right)\right]^2+..+\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N{}^n\right)\right]^2\right\}=$$
$$=2\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1{}^n\right)\right]\left(-x_1{}^k\right)+2\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2{}^n\right)\right]\left(-x_2{}^k\right)+..$$
$$.....+2\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N{}^n\right)\right]\left(-x_N{}^k\right)=0$$

....

Și, la final, ultima ecuație din sistemul de $n+1$ ecuații (A3.5) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{\partial}{\partial a_0}(SS)=\frac{\partial}{\partial a_0}(SS(a_0,a_1,....,a_n))=\frac{\partial}{\partial a_0}\left((\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2+(\Delta y_3)^2+....+(\Delta y_N)^2\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial a_0}\left\{\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1{}^n\right)\right]^2+\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2{}^n\right)\right]^2+..+\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N{}^n\right)\right]^2\right\}=$$
$$=2\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1{}^n\right)\right](-1)+2\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2{}^n\right)\right](-1)+..$$
$$.....+2\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N{}^n\right)\right](-1)=0$$

Sistemul de $n+1$ ecuații (A3.5) poate fi scris sub forma

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial a_n}(SS)=\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1^{\ n}\right)\right]\left(-x_1^{\ n}\right)+2\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2^{\ n}\right)\right]\left(-x_2^{\ n}\right)+..\\
.....+2\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N^{\ n}\right)\right]\left(-x_N^{\ n}\right)=0\\
\frac{\partial}{\partial a_{n-1}}(SS)=2\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1^{\ n}\right)\right]\left(-x_1^{\ n-1}\right)+2\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2^{\ n}\right)\right]\left(-x_2^{\ n-1}\right)+..\\
.....+2\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N^{\ n}\right)\right]\left(-x_N^{\ n-1}\right)=0\\
....\\
\frac{\partial}{\partial a_k}(SS)=2\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1^{\ n}\right)\right]\left(-x_1^{\ k}\right)+2\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2^{\ n}\right)\right]\left(-x_2^{\ k}\right)+..\\
.....+2\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N^{\ n}\right)\right]\left(-x_N^{\ k}\right)=0\\
....\\
\frac{\partial}{\partial a_0}(SS)=2\left[y_1-\left(a_0+a_1x_1\ ..+a_nx_1^{\ n}\right)\right](-1)+2\left[y_2-\left(a_0+a_1x_2\ ..+a_nx_2^{\ n}\right)\right](-1)+..\\
.....+2\left[y_N-\left(a_0+a_1x_N\ ..+a_nx_N^{\ n}\right)\right](-1)=0
\end{cases} \tag{A3.6}$$

Sau echivalent

$$\begin{cases}
a_n\left(x_1^{\ 2n}+x_2^{\ 2n}+...+x_N^{\ 2n}\right)+a_{n-1}\left(x_1^{\ 2n-1}+x_2^{\ 2n-1}+...+x_N^{\ 2n-1}\right)+....+a_1\left(x_1^{\ n+1}+x_2^{\ n+1}+...+x_N^{\ n+1}\right)+\\
\quad+a_0\left(x_1^{\ n}+x_2^{\ n}+...+x_N^{\ n}\right)=y_1x_1^{\ n}+y_2x_2^{\ n}+..+y_Nx_N^{\ n}\\
a_n\left(x_1^{\ 2n-1}+x_2^{\ 2n-1}+...+x_N^{\ 2n-1}\right)+a_{n-1}\left(x_1^{\ 2n-2}+x_2^{\ 2n-2}+...+x_N^{\ 2n-2}\right)+....+a_1\left(x_1^{\ 1+k}+x_2^{\ 1+k}+...+x_N^{\ 1+k}\right)+\\
\quad+a_0\left(x_1^{\ k}+x_2^{\ k}+...+x_N^{\ k}\right)=y_1x_1^{\ k}+y_2x_2^{\ k}+..+y_Nx_N^{\ k}\\
....\\
a_n\left(x_1^{\ n+k}+x_2^{\ n+k}+...+x_N^{\ n+k}\right)+a_{n-1}\left(x_1^{\ n+k-1}+x_2^{\ n+k-1}+...+x_N^{\ n+k-1}\right)+....+a_1\left(x_1^{\ n}+x_2^{\ n}+...+x_N^{\ n}\right)+\\
\quad+a_0\left(x_1^{\ n-1}+x_2^{\ n-1}+...+x_N^{\ n-1}\right)=y_1x_1^{\ n-1}+y_2x_2^{\ n-1}+..+y_Nx_N^{\ n-1}\\
....\\
a_n\left(x_1^{\ n}+x_2^{\ n}+...+x_N^{\ n}\right)+a_{n-1}\left(x_1^{\ n-1}+x_2^{\ n-1}+...+x_N^{\ n-1}\right)+....+a_1\left(x_1+x_2+...+x_N\right)+\\
\quad+a_0N=y_1+y_2+..+y_N
\end{cases}$$

Introducând notațiile:

$$\begin{cases}
S_{2nx}=x_1^{\ 2n}+x_2^{\ 2n}+x_3^{\ 2n}+x_4^{\ 2n}+...+x_N^{\ 2n}\\
S_{2n-1}=x_1^{\ 2n-1}+x_2^{\ 2n-1}+x_3^{\ 2n-1}+x_4^{\ 2n-1}+...+x_N^{\ 2n-1}\\
.....\\
S_k=x_1^{\ k}+x_2^{\ k}+x_3^{\ k}+x_4^{\ k}+...+x_N^{\ k},k=1,2,..,n\\
S_1=x_1+x_2+x_3+x_4+...+x_N\\
M_{xky}=x_1^{\ k}y_1+x_2^{\ k}y_2+...+y_N^{\ k}x_N,\quad k=1,2,..,n\\
S_y=y_1+y_2+y_3+y_4+...+y_N
\end{cases}$$

Sistemul de ecuații format de expresiile (A3.7), în baza notațiilor (A3.8), poate fi scris sub forma:

$$\begin{cases} a_n S_{2n} + a_{n-1} S_{2n-1} + ... + a_1 S_{n+1} + a_0 S_n = M_{xny} \\ a_n S_{2n-1} + a_{n-1} S_{2n-2} + ... + a_1 S_n + a_0 S_{n-1} = M_{x(n-1)y} \\ .... \\ a_n S_{n+k} + a_{n-1} S_{n+k-1} + ... + a_1 S_{k+1} + a_0 S_k = M_{xky} \\ .... \\ a_n S_n + a_{n-1} S_{n-1} + ... + a_1 S_1 + a_0 N = S_y \end{cases} \quad \text{(A3.7)}$$

Sau, în mod echivalent, folosind relații matriceale, vom putea rescrie sistemul (A3.7) sub forma

$$\begin{bmatrix} S_{2n} & S_{2n-1} & ... & S_n \\ S_{2n-1} & S_{2n-2} & .... & S_{n-1} \\ ... & .... & ... & ,,, \\ S_n & S_{n-1} & ... & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ ... \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xny} \\ M_{x(n-1)y} \\ ... \\ S_y \end{bmatrix} \quad \text{(A3.8)}$$

Rezolvarea sistemului de ecuații (A3.9) se poate face automat, folosind metoda substituției, în mod recurent, eliminând câte o variabilă la fiecare pas, până obținem o singură ecuație cu o singură necunoscută.

Programul şi schema logică pentru rezolvarea unui sistem linear de ecuații sunt date în Anexa 2.

La adresa www.phys.ugal.ro/LaboratorMIS/Anexa1 se poate descărca fișierul Excel pentru un calcul explicit.

De asemenea, de la adresa www.phys.ugal.ro/LaboratorMIS/Anexa1 se pot descărca fișierele MAPLE care conțin scripturile ce evidențiază aceste proceduri în mod aplicativ.

Anexa 2

DECUPLAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE OMOGENE. OBȚINEREA MODURILOR FUNDAMENTALE

In cazul unui sistem de două resorturi de constante elastice k_1 şi respectiv k_2. In acest caz, considerăm deplasările $x_1 = x_1(t)$ şi respectiv $x_2 = x_2(t)$ faţă de poziţiile de echilibru.

De asemenea, fie m_1şi respectiv m_2 masele celor două corpuri.

In acest caz, considerăm sensul axei Ox, în sensul deplasării corpului de masa m_1 putem scrie relația:

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = -k_1 x_1(t) + k_2 [x_2(t) - x_1(t)] \tag{1}$$

Sau echivalent

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = -[k_1 + k_2] x_1(t) + k_2 x_2(t) \tag{2}$$

Sau încă

$$\frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = -\frac{[k_1 + k_2]}{m_1} x_1(t) + \frac{k_2}{m_1} x_2(t) \tag{3}$$

In mod analog, pentru corpul al doilea ar trebui scris

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) = -k_2 [x_2(t) - x_1(t)] \tag{4}$$

Sau echivalent

$$\frac{d^2}{dt^2} x_2(t) = -\frac{k_2}{m_2} x_2(t) + \frac{k_2}{m_2} x_1(t) \tag{5}$$

Aceste două ecuații (3) şi (5), pot fi scrise sub forma unui sistem de două ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = -\frac{[k_1 + k_2]}{m_1} x_1(t) + \frac{k_2}{m_1} x_2(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) = -\frac{k_2}{m_2} x_2(t) + \frac{k_2}{m_2} x_1(t) \end{cases} \tag{6}$$

Sau, dacă definim o matrice coloana

$$\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

De unde vom putea scrie

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

Atunci vom putea scrie relațiile (6) sub forma

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{[k_1 + k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{9}$$

Sau echivalent

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{X}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{[k_1 + k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \hat{X}(t) \tag{10}$$

Sau încă

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{X}(t)=A\hat{X}(t) \tag{11}$$

Unde am notat cu A - matricea

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Se observă că, în relația (9), dacă vom găsi o transformare care să ne permită trecerea de la coordonatele $x_1=x_1(t)$ şi respectiv $x_2=x_2(t)$ la alte coordonate – numite coordonate naturale - $y_1=y_1(t)$ şi respectiv $y_2=y_2(t)$ pe baza unor transformări lineare, de forma

$$y_1(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \tag{13}$$

Respectiv

$$y_2(t)=\delta x_1(t)+\gamma x_2(t) \tag{14}$$

unde coeficienții $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ sunt considerați constanți

In acest caz, setul nou de coordonate ($y_1=y_1(t)$ si $y_2=y_2(t)$) va fi scris in funcție de cel vechi ($x_1=x_1(t)$ si $x_2=x_2(t)$) sub forma

$$\begin{cases} y_1(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \\ y_2(t)=\delta x_1(t)+\gamma x_2(t) \end{cases} \tag{15}$$

Sau echivalent

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{16}$$

Sauîncă

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\Delta\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{17}$$

Unde am notat matricea de transfer de la un set de coordonate la altul sub forma

$$\Delta=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \tag{18}$$

Observație:

vom putea inversa această relație, şi vom putea scrie şi coordonatele $x_1=x_1(t)$ si $x_2=x_2(t)$ în funcție de coordonatele $y_1=y_1(t)$ si $y_2=y_2(t)$, sub forma

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\Delta^{-1}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{cases} x_1(t)=\eta_{11}y_1(t)+\eta_{12}y_2(t) \\ x_2(t)=\eta_{21}y_1(t)+\eta_{12}y_2(t) \end{cases} \tag{19}$$

Se observă că determinatul matricei Δ trebuie să fie nenul.

Din relația (16) vom putea scrie

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y_2(t) \end{bmatrix}=\frac{d^2}{dt^2}\left\{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Sau echivalent

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x_2(t) \end{bmatrix} \tag{20}$$

Din relațiile (9) şi (20) vom putea scrie

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (21)$$

Sau echivalent

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sau echivalent

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Unde am ținut cont că

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Și am notat cu

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}^{-1} = \Delta^{-1} \quad (25)$$

Matricea inversă

In acest caz, relația (23) se va putea scrie

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Sau echivalent

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}y_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Unde am notat cu $\tilde{A}$ matricea

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}^{-1} \quad (27)$$

Obsevație:

Dacă matricea de trecere de la un sistem de coordonate la altul

$$\Delta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}$$

este bine aleasă, astfel încât matricea $\tilde{A}$ să ajungă la o formă diagonală

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Atunci, ecuația (26) devine

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} y_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \tag{30}$$

Sau, echivalent, cele două ecuații se vor scrie sub forma decuplată

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2} y_1(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ &\frac{d^2}{dt^2} y_2(t) = \lambda_2 y_2(t) \end{aligned} \tag{31}$$

Cu soluțiile binecunoscute

$$\begin{aligned} &y_1(t) = A \exp(\sqrt{\lambda_1} t) \\ &y_2(t) = B \exp(\sqrt{\lambda_2} t) \end{aligned} \tag{32}$$

Și din relația (19) vom putea deci scrie

$$\begin{cases} x_1(t) = \eta_{11} y_1(t) + \eta_{12} y_2(t) = \eta_{11} A \exp(\sqrt{\lambda_1} t) + \eta_{12} B \exp(\sqrt{\lambda_2} t) \\ x_2(t) = \eta_{21} y_1(t) + \eta_{12} y_2(t) = \eta_{11} A \exp(\sqrt{\lambda_1} t) + \eta_{12} B \exp(\sqrt{\lambda_2} t) \end{cases} \tag{33}$$

Sau, echivalent,

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \exp(\sqrt{\lambda_1} t) + B_1 \exp(\sqrt{\lambda_2} t) \\ x_2(t) = A_2 \exp(\sqrt{\lambda_1} t) + B_2 \exp(\sqrt{\lambda_2} t) \end{cases} \tag{33}$$

Observație extrem de importantă:

Ceea ce este esențial de reținut este deci aducerea sistemului de ecuații

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{[k_1 + k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Pe baza transformării lineare

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

La sistemul de ecuații sub formă diagonală

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} y_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Unde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{[k_1 + k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Nu este necesară aflarea transformării lineare care face transformarea. Important este găsirea celor două valori $\{\lambda_1, \lambda_2\}$

Aceste valori se obțin ușor dacă vom considera determinatul relației (34)

$$\left| \tilde{A} \right| = \left| \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{[k_1 + k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix}^{-1} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right| \tag{35}$$

Sau echivalent

$$\left\| \begin{bmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right\| \tag{36}$$

Sau echivalent

$$\begin{vmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} - \lambda_1 & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{37}$$

Se numește problema de valori proprii ale ecuației diferențiale.

In acest caz, vom considera ecuația de vectori şi valori proprii:

$$\begin{vmatrix} -\frac{[k_1+k_2]}{m_1} - \lambda & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{38}$$

Sau echivalent:

$$\left(-\frac{[k_1+k_2]}{m_1} - \lambda \right)\left(-\frac{k_2}{m_2} - \lambda \right) - \frac{k_2}{m_2}\frac{k_2}{m_1} = 0 \tag{39}$$

Sau, încă

$$\lambda^2 + \lambda\left(\frac{[k_1+k_2]}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{[k_1+k_2]}{m_1}\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_2}{m_2}\frac{k_2}{m_1} = 0 \tag{39}$$

Sau, încă

$$\lambda^2 + \lambda\left(\frac{[k_1+k_2]}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{k_1}{m_1}\frac{k_2}{m_2} = 0 \tag{40}$$

Care dau două soluții $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ şi respectiv soluţii generale de forma

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \exp(\sqrt{\lambda_1}t) + B_1 \exp(\sqrt{\lambda_2}t) \\ x_2(t) = A_2 \exp(\sqrt{\lambda_1}t) + B_2 \exp(\sqrt{\lambda_2}t) \end{cases} \tag{41}$$

In cazul nostru, cele două ecuații sunt

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \frac{11}{6}\omega_0^2 x_1(t) - \frac{1}{6}\omega_0^2 x_2(t) = 0 \\ \ddot{x}_2(t) + \omega_0^2 x_2(t) - \omega_0^2 x_1(t) = 0 \end{cases} \tag{42}$$

Care pot fi scrise sub forma

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6}\omega_0^2 & \frac{1}{6}\omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Considerăm deci o transformare la coordonatele naturale, pe baza transformării lineare

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{44}$$

Vom căuta să scriem ecuația (43) sub forma

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} y_1(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} y_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Valorile $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ sunt soluții ale ecuaţiei de valori proprii

$$\begin{vmatrix} -\frac{11}{6}\omega_0^2 - \lambda & \frac{1}{6}\omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega_0^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{45}$$

Sau echivalent

$$\left(-\frac{11}{6}\omega_0^2-\lambda\right)\left(-\omega_0^2-\lambda\right)-\frac{1}{6}\omega_0^2\omega_0^2= \quad (46)$$

Sau încă

$$\lambda^2+\lambda\left[\frac{11}{6}\omega_0^2+\omega_0^2\right]+\frac{11}{6}\omega_0^2\omega_0^2-\frac{1}{6}\omega_0^2\omega_0^2=0 \quad (47)$$

De unde rezultă

$$\lambda^2+\lambda\frac{17}{6}\omega_0^2+\frac{10}{6}\omega_0^2\omega_0^2=0 \quad (46)$$

De unde obținem

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{1}{2}\left[-\frac{17}{6}\omega_0^2+\sqrt{\frac{49}{36}}\omega_0^2\right]\\ \lambda_2&=\frac{1}{2}\left[-\frac{17}{6}\omega_0^2-\sqrt{\frac{49}{36}}\omega_0^2\right]\end{aligned} \quad (47)$$

Sau echivalent

$$\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{2}\left[-\frac{10}{6}\omega_0^2\right]\\ \lambda_2=\frac{1}{2}\left[-\frac{24}{6}\omega_0^2\right]\end{cases} \quad (47)$$

Ceea ce determină soluții de forma

$$\begin{cases}x_1(t)=A_1\exp(\sqrt{\lambda_1}t)+B_1\exp(\sqrt{\lambda_2}t)=A_1\sin\left(\sqrt{\frac{10}{12}}\omega_0 t\right)+B_1\sin in\left(\sqrt{\frac{24}{12}}\omega_0 t\right)\\ x_2(t)=A_2\exp(\sqrt{\lambda_1}t)+B_2\exp(\sqrt{\lambda_2}t)==A_2\sin\left(\sqrt{\frac{10}{12}}\omega_0 t\right)+B_2\sin in\left(\sqrt{\frac{24}{12}}\omega_0 t\right)\end{cases} \quad (48)$$

Deci

$$\begin{cases}\omega_1=\sqrt{-\lambda_1}=\sqrt{\frac{10}{12}}\omega_0\Rightarrow\frac{\omega_1}{\omega_0}=\sqrt{\frac{10}{12}}\\ \omega_2=\sqrt{-\lambda_2}=\sqrt{\frac{24}{12}}\omega_0\Rightarrow\frac{\omega_2}{\omega_0}=\sqrt{\frac{24}{12}}\end{cases}$$

Primul mod de oscilație are frecvența mai mica, iar al doilea mod de oscilație are frecvența mai mare.

Bibliografie

1. G. Murariu, "Modelarea şi Simulare - Lucrări de Laborator", Editura Universităţii Bucureşti (156 pagini) 2006 – ISBN (10)-973-558-264-3 - ISBN (13)-978-973 - 558-264-7

2. Murariu L, **Murariu G**., Toward an Interdisplinary Virtual Laboratory, http:// scitation.aip.org/ content/aip/proceeding/aipcp/10.1063/1.3322378 , AIP Conference Proceedings Volume: 1203 Pages: 1394-1397 Published: 2009 , the 7th International Conference of the Balkan-Physical-Union, SEP 09-13, 2009 Alexandroupolis, GREECE (http://www.gbv.de/dms/tib-ub-hannover/623910403.pdf)

3. Murariu, Gabriel; Timofti, Mihaela; Popa, Paula; et al., Complementary models on the Danube River state parameters measured in the Galati area, **DOI:** 10.1109/ISEEE.2013.6674358 , The 4th International Symposium on Electrical and Electronics Engineering (ISEEE) Location: Dunarea de Jos Univ Galati, Galati, ROMANIA Date: OCT 11-13, 2013, Edited by: Gaiceanu, M. (http://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?reload=true&punumber=6662537)

4. **Murariu, Gabriel;** Hahuie, Valentin; Georgescu, Lucian; et al. Study on the Influence of Atmospheric Parameters on the Accuracy of the Geodetic Measurements; Conference: TIM15-16 Physics Conference Location: W Univ Timisoara, Phys Fac, Timisoara, ROMANIA Date: MAY 26-28, 2016, TIM15-16 PHYSICS CONFERENCE Book Series: AIP Conference Proceedings Volume: 1796 Article Number: UNSP 040009-1 Published: 2017

5. **Murariu, G**; Iticescu, C; Murariu, A; Rosu, B; Munteanu, D; Buruiana, DL, Assessment of Water Quality State Dynamics Using Adaptive Filtering Methods and Neural Networks Approaching Case study - Danube River in Galati area REVISTA DE CHIMIE Volume: 70 Issue: 6 Pages: 1914-1919 Published: JUN 2019, Accession Number: WOS:000475860100006

6. Murariu, G; Timofti, M; Savinuta, I; Murariu, A; Iticescu, C; Georgescu, L; Tudor, M; Mocanu, GD ,Seasonal Statistical Analysis on the Quality of Underwater Supplies in South-Eastern Romania, REVISTA DE CHIMIE Volume: 70 Issue: 3 Pages: 820-827 Published: MAR 2019, Accession Number: WOS:000464911600016

7. L. Dinca, O. Badea, G. Guiman, C. Braga, V. Crisan, V. Greavu, G. Murariu, L. Georgescu, Monitoring of soil moisture in Long-Term Ecological Research (LTER) sites of Romanian Carpathians, Annals of Forest Research. 2018, Accession Number: WOS:000456193900005