Marcelina Mocanu

Elena Roxana Ardeleanu

Ecuații cu derivate parțiale



COLECȚIA
ȘTIINȚE

EDITURA „ALMA MATER"
BACĂU, 2025

III 27.356

Marcelina Mocanu
Elena Roxana Ardeleanu

Ecuații cu derivate parțiale

291.735



C-291735W

EDITURA „ALMA MATER"
BACĂU, 2025

REFERENȚI ȘTIINȚIFICI

Conf. univ. dr. Carmen Violeta POPESCU
Universitatea „Vasile Alecsandri" din Bacău

Lector univ. dr. Otilia LUNGU
Universitatea „Vasile Alecsandri" din Bacău

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
MOCANU, MARCELINA
Ecuaţii cu derivate parţiale / Marcelina Mocanu, Elena Roxana Ardeleanu. - Bacău : Alma Mater, 2025
Conţine bibliografie
ISBN 978-606-527-739-7

I. Ardeleanu, Elena Roxana

51

Copyright © 2025, Editura „Alma Mater" Bacău
Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate editurii
Str. Spiru Haret, nr. 8, 600114, Bacău, România
Tel.: +40-234-542-411 int. 638
Tel./Fax: +40-234-545-753
https://editura-almamater.ub.ro/
E-mail: almamater@ub.ro
E-mail: edituraalmamater@gmail.com

Cuprins

1 Introducere in teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale **1**

1.1 Noţiunea de ecuaţie cu derivate parţiale (EDP) 1

1.2 Scurt istoric 4

1.3 Modele matematice guvernate de EDP 6

1.3.1 Elemente de teoria câmpurilor 7

1.3.2 Ecuaţii ale proceselor oscilatorii 10

1.3.3 Ecuaţia propagării căldurii 17

1.3.4 Ecuaţia proceselor staţionare 19

1.3.5 Ecuaţiile lui Maxwell 19

1.3.6 Model de reacţie-difuzie într-un mediu 3D neomogen stratificat 21

2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I **25**

2.1 Sisteme diferenţiale autonome de ordinul I 25

2.1.1 Forme ale soluţiilor 25

2.1.2 Forma simetrică a unui sistem diferenţial autonom de ordinul I 28

2.1.3 Metode de determinare a integralelor prime ale unui sistem autonom 29

2.1.4 Probleme care conduc la sisteme autonome de ordinul I . 33

2.2 Clasificări ale EDP de ordinul I 38

2.3 Construcţia unei EDP de ordinul I 40

2.4 Algoritm de rezolvare a unei EDP de ordinul I 42

2.5 Metoda curbelor caracteristice pentru o EDP liniară cu două variabile 46

3 EDP de ordinul al doilea cvasiliniare **51**
3.1 Definiţii şi exemple 51
3.2 Forme canonice ale EDP II cvasiliniare. Clasificare 52
3.3 Schimbări de variabile în EDP II cvasiliniare 54
3.3.1 Noţiunea de schimbare de variabile 54
3.3.2 Aplicarea unei schimbări de variabile în EDP II cvasiliniară 55
3.3.3 Aducerea EDP II cvasiliniare la forma canonică într-un punct 58
3.4 Clasificarea EDP II cvasiliniare 59
3.5 EDP II cvasiliniare cu două variabile independente 62
3.5.1 Introducere 62
3.5.2 Determinarea tipului EDP II cvasiliniare 63
3.5.3 Formulele de transformare pentru derivatele funcţiei necunoscute de două variabile 66
3.5.4 Laplacianul în coordonate polare 68
3.6 Metoda curbelor caracteristice 71
3.7 EDP de ordinul II liniare cu coeficienţi constanţi 78
3.7.1 Metoda curbelor caracteristice 79
3.7.2 Ecuaţii de tip hiperbolic 80
3.7.3 Ecuaţii de tip parabolic 82
3.7.4 Ecuaţii de tip eliptic 84
3.7.5 Concluzii, exemple 85
3.8 Rezolvarea unor EDP II liniare cu coeficienţi constanţi folosind EDP I cvasiliniare 91
3.9 Metoda separării variabilelor 93

4 Ecuaţii de tip hiperbolic **103**
4.1 Ecuaţia coardei vibrante 103
4.2 Vibraţiile coardei nelimitate 104
4.2.1 Vibraţiile libere ale unei coarde nelimitate 104
4.2.2 Vibraţiile forţate ale unei coarde nelimitate. Metoda lui Duhamel 115
4.3 Vibraţiile coardei fixate la capete 119
4.3.1 Vibraţiile libere ale coardei fixate la capete 119
4.3.2 Vibraţiile forţate ale coardei fixate la capete 132

5 Ecuaţii de tip parabolic **139**
5.1 Ecuaţia propagării căldurii în cazul tridimensional 139
5.2 Problema Cauchy pentru propagarea căldurii într-o bară nelimitată 140
5.2.1 Rezolvarea problemei Cauchy 141
5.2.2 Reprezentarea integrală a soluţiei 144
5.2.3 Mărginirea soluţiei problemei Cauchy 145
5.3 Soluţia fundamentală pentru cazul unidimensional 147
5.3.1 Proprietăţi ale soluţiei fundamentale 148
5.3.2 Soluţia problemei Cauchy obţinută prin convoluţie 152
5.4 Ecuaţia propagării căldurii- cazul 3D 155
5.4.1 Soluţia fundamentală- cazul 3D 155
5.4.2 Proprietăţi ale soluţiei fundamentale 3D 155
5.4.3 Soluţia problemei Cauchy în cazul tridimensional 159
5.5 Problema Cauchy- cazul neomogen 3D 161
5.5.1 Formularea problemei 161
5.5.2 Metoda lui Duhamel (Metoda impulsurilor) 161

6 Ecuaţii de tip eliptic **165**
6.1 Ecuaţia lui Laplace şi ecuaţia lui Poisson 165
6.2 Soluţii fundamentale ale ecuaţiei lui Laplace 166
6.3 Valori extreme ale soluţiilor ecuaţiei Poisson 168
6.4 Extremele funcţiilor armonice de trei variabile 170
6.4.1 Principiul slab al extremelor pentru funcţii armonice . . 170
6.4.2 Proprietăţi ale funcţiilor armonice 173
6.5 Funcţii armonice de trei variabile 174
6.5.1 Formulele lui Green 174
6.5.2 Formula celor trei potenţiale 175
6.5.3 Teorema de medie şi principiul tare al extremelor 180
6.6 Problemele Dirichlet şi Neumann pentru funcţii de trei variabile 183
6.6.1 Formularea problemelor. Unicitatea soluţiei 183
6.6.2 Problemele Dirichlet şi Neumann. Teoreme de existenţă a soluţiei 187
6.6.3 Reducerea problemelor la limită la cazul cu date pe frontieră fixate 188
6.6.4 Problema Dirichlet. Funcţia Green a unui domeniu . . . 189

6.6.5 Problema Neumann 190
6.6.6 Funcţia lui Green a unei bile. Soluţia problemei Dirichlet pentru bilă 191
6.6.7 Soluţia problemei Dirichlet pentru bilă. Formula lui Poisson 196
6.7 Funcţii armonice de două variabile 198
6.7.1 Formulele lui Green în plan 200
6.7.2 Formula celor trei potenţiale în plan 202
6.7.3 Proprietăţi ale funcţiilor armonice de două variabile . . . 204
6.7.4 Probleme la limită pentru ecuaţia lui Laplace în plan . . 209
6.7.5 Funcţia lui Green pentru problema Dirichlet în plan . . . 210
6.7.6 Soluţia problemei Dirichlet pentru disc 212

7 Anexe **217**
7.1 Extreme ale funcţiilor reale 217
7.2 Forme pătratice. Aducerea la o formă canonică 220
7.2.1 Metoda valorilor şi vectorilor proprii 221
7.2.2 Cazul bidimensional 222
7.3 Transformarea Fourier 223
7.4 Condiţii suficiente pentru derivarea integralelor cu parametru . . 225
7.5 Corectitudinea formulării problemelor pentru ecuaţiile fizicii matematice 227